# Kapitel 7

## Differenzengleichungen

# Inhaltsverzeichnis

# Differenzengleichungen

## Einführung und Beispiele

Mit Differenzengleichungen definiert man die Schrittfolge von Rekursionen. Dabei startet man entweder mit einer bereits gegebenen Rekursion (Beispiel: Babylonisches Wurzelziehen):

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a_n}{x_n}\right)$$

oder bildet sich eine Rekursion aus einer Summe:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = x_n \rightarrow x_{n+1}$$
$$= x_n + q^{n+1}$$

### Ordnung einer Rekursion

> Differenzengleichung 1. Ordnung: $x_{n+1} = f(x_n)$
> Differenzengleichung 2. Ordnung: $x_{n+2} = f(x_{n+1}, x_n)$
> Differenzengleichung k. Ordnung: $x_{n+\mathrm{k}} = f(n, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1})$

Lässt sich die Aufgabenstellung in der oberen Schreibweise anschreiben (nur $x_{n+k}$ auf der linken Seite), spricht man von einer **expliziten** Differenzengleichung.

### Gleichgewichtslage

Die Gleichgewichtslage bzw. Gleichgewichtslösung ist der Wert, gegen den die Rekursion konvergiert. Beim Babylonischen Wurzelziehen konvergiert die Rekursion natürlich gegen $\sqrt{a}$.

## Differenzengleichung 1. Ordnung

Eine Differenzengleichung 1. Ordnung bedeutet, dass die Rekursion nur über den letzten Schritt definiert ist.

$$x_{n+1} = ax_n + b$$

Dabei sind a und b die Koeffizienten und beschreiben die Änderung zum vorherigen Schritt.

### Konstante Faktoren

Wir gehen davon aus, dass a und b konstant sind! Die homogene Lösung kann nach folgender Vorschrift gebildet weren:

$$x_n = \begin{cases} a^n x_0 + b\dfrac{a^n - 1}{a - 1}, & a \neq 1 \\ x_0 + bn, & a = 1 \end{cases}$$

### Allgemeine lineare Differenzengleichung erster Ordnung

Sind die Koeffizienten a und b **nicht konstant**, so liegt der allgemeine Fall einer linearen Differenzengleichung erster Ordnung vor:

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n$$

$a_n$ und $b_n$ sind beliebige Funktionen. Der Term $\boldsymbol{b_n}$ heißt Störfunktion. Gilt $b_n = 0$ so nennt man die Gleichung eine **homogene** Gleichung, ansonsten wird sie **inhomogene** Gleichung genannt.

Bei der Lösung solcher Rekursionen, werden immer zuerst die homogene Gleichung und anschließend die Störfunktion betrachtet. Die Lösung ergibt sich dann mit:

$$x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$$

# Elementare Differentialgleichungen

## Gewöhnliche Differentialgleichungen – Einführung und Allgemeine Theorie

### Wofür brauche ich überhaupt Differentialgleichungen?

Das sind Gleichungen wo der Differentialquotient dabei ist. Also brauche ich das immer, wenn ich eine Änderung beschreiben will. Beispiele dafür wären Wachstumsmodelle, Chemische Modelle, Zerfallsmodelle.

Ich betrachte also den Zuwachs/die Abnahme, welcher proportional zur momentan Größe ist.

### Allgemeine Lösung

Bei einfachen Differentialgleichungen ist meistens eine Funktion gegeben, die eine bis mehrere Konstanten $C_1, C_2, \ldots$ enthält. Diese Funktion nennt man allgemeine Lösung. Dabei muss noch unterschieden werden, welche Form diese Funktion hat:

- Implizite Funktion: $f(x, y) = Konstante \Rightarrow$ Keine Darstellung für y alleine
- Explizite Funktion: $y = f(x) \Rightarrow$ Klassische Form

Zum Beispiel wäre eine allgemeine Lösung:

$$y(x) = C_1 x^3 + \frac{C_2}{x} - 2\ln x + \frac{1}{3}$$

### Partikuläre Lösung

Sind Anfangsbedingungen gegeben, dann kann man sich eine partikuläre Lösung berechnen. Diese Lösung stimmt jedoch NUR, wenn auch diese Anfangsbedingungen gelten.

$$y(1) = \frac{2}{3};\ \ y'(1) = -1$$

Mit diesen Angaben, können wir $C_1 = \frac{1}{3}$ und $C_2 = 0$ berechnen. Damit lautet unsere partikuläre Lösung:

$$y(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2\ln x + \frac{1}{3}$$

Es ergeben sich somit für verschiedene Anfangsbedingungen verschiedene partikuläre Lösungen.

### 1. Ableitung

Manchmal weiß man aus einer Problemstellung nur die Anfangsbedingungen und eine Problemstellung. Zum Beispiel hat mein eine bestimmte Menge, die mit der Zeit und in Relation zur aktuellen Menge abnimmt. Somit wissen wir nur die Änderung, also die 1. Ableitung. Diese besteht aus der Zeit und einem Koeffizienten p, der Abnahme/Zunahme beschreibt.

$$y'(t) = t * p$$

Ist $p > 1$ findet eine Zunahme statt, $p < 1$ beschreibt eine Abnahme und $p = 1$ würde eine konstant bleibende Menge bedeuten. Die Stammfunktion und allgemeine Lösung sieht demnach so aus:

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2 * p + C$$

## Weitere Beispiele

**Beispiel 1: Der freie Fall**

Sei $s(t) = Weg(Zeit), g = Erdbeschleunigung = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$

$$s''(t) = g = gewöhnlich\ Differentialgleichung\ 2.Ordnung\ für\ s(t)$$

$$\Rightarrow s'(t) = g * t + C_1$$
$$\Rightarrow s(t) = \frac{g}{2} t^2 + C_1 t + C_2 \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Das ist die allgemeine Lösung. Theoretisch gibt es unendlich viele Lösungen, da ich ja die zwei Konstanten beliebig wählen.

$C_1, C_2$ sind also durch Anfangsbestimmungen bestimmt. Zum Beispiel:

$$s(0) = s_0, \qquad v(0) = s'(0) = v_0 \Rightarrow C_1 = V_0, C_2 = s_0$$

Ich erhalte also eine partikuläre (=spezielle, eindeutige) Lösung: $s(t) = \frac{g}{2} t^2 + v_0 t + s_0$

Schwerer wird es, wenn auf der rechten Seite nicht nur eine Konstante ist, sondern eine weitere Ableitung stehen würde.

**Beispiel 2: Logistisches Wachstum aus der Biologie**

Beschreibt ein Wachstum, bei dem eine Sättigung bzw. Dämpfung vorkommt. Zum Beispiel die Erdbevölkerung. Sie wird nicht ewig wachsen, irgendwann ist der Lebensraum beschränkt und das Wachstum dämpft sich ein.

Sei $N(t) = Populationsgröße(Zeit), v\ Wachstumsrate, K\ Sättigungskonstante$

$$N'(t) = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) = gewöhnlich\ Differentialgleichung\ 1.Ordnung\ für\ N(t)$$

Am Anfang wächst alles exponentiell. N wächst aber immer mehr und je näher ich an die Sättigungskonstante herankomme, des so größer wird $\frac{N}{K}$. Ist die Sättigungskonstante K erreicht, so gilt $\frac{N}{K} = \frac{K}{K}$ und es findet kein Wachstum mehr statt.

Lösung: $N(t) = \frac{K}{1+C*e^{-rt}}, C \in \mathbb{R}$ oder $N = 0$

Denn: $N' = -\frac{K}{(1+Ce^{-rt})^2} Ce^{-rt}(-r) = \frac{KCre^{-rt}}{(1+Ce^{-rt})^2}$

$$rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) = \cdots = \frac{KCre^{-rt}}{(1+Ce^{-rt})^2}$$

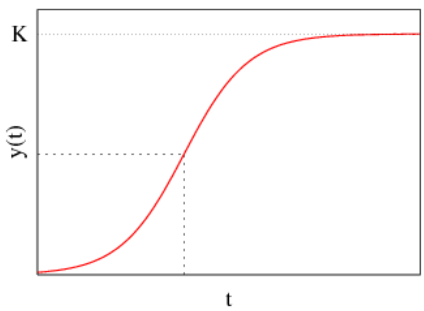
Zur Berechnung einer partikulären Lösung brauche ich wieder Anfangsbedingungen:

Anfangsbedingung: $N(0) = N_0$: $N_0 = \frac{K}{1+C*1} \Rightarrow C = \frac{K}{N_0} - 1 = \frac{K-N_0}{N_0}$

$$\Rightarrow N(t) = \frac{K}{1 + \frac{K-N_0}{N_0} e^{-rt}} = partikuläre\ Lösung$$

Die partikulären Lösungen sind also abhängig davon, wie ich meine Anfangsbedingungen wähle, da sich z.B. die Gleichung durch das wählen von $t = 0$ erheblich vereinfachen kann.
Also ist für diese Anfangsbedingung die partikuläre Lösung viel einfacher, als für andere t-Werte.

Ein weiteres Beispiel mit diesem Wachstum wäre der Markt vom iPhone 5. Am Anfang kaufen es viele und irgendwann hat Jeder eines, die Anderen wollen aus Prinzip keines, und es pendelt sich ein.



**Beispiel 3: Diffusionsgleichung, Wärmeleitungsgleichung**

Sei $c(x,t) = Konzentration(Ort, Zeit), D = Diffusionskonstante$

D beschreibt die Ausbreitung der Wärme und ist materialspezifisch.

$$\frac{\delta c}{\delta t} = D * \frac{\delta^2 c}{\delta x^2} \ \ partielle\ Differenzgleichung\ 2. Ordnung$$

Eine Lösung ist z.B.: $c(x,t) = \left(A * \cos(Cx) + B\ sin(Cx)\right)e^{-c^2 Dt} \qquad A, B, C \in \mathbb{R}\ beliebig$

Dieses Beispiel ist schon viel komplexer, da ich drei Konstanten habe, die ich beliebig wählen kann.

**Allgemein**

$$y(x), Ableitungen\ y', y'', \dots, y^{(n)}$$

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0\ heißt\ gewöhnliche\ Differentialgleichung\ n - ter\ Ordnung$$

Insbesondere $F(x, y, y') = 0\ heißt\ gewöhnliche\ Differentialgleichung\ 1. Ordnung$

$$y' = f(x,y)\ heißt\ explizite\ Differentialgleichung\ 1. Ordnung$$

**Lösungen**

- Allgemeine Lösung z.B.: $s(t) = \frac{g}{2}t^2 + C_1 t + C_2$ entspricht einer Kurvenschar
- Partikuläre Lösung z.B.: Logistische Gleichung mit $N_0 = \frac{K}{2}$

$$N(t) = \frac{K}{1 + e^{-rt}}$$

- Singuläre Lösung (nur selten) z.B..: $N = 0$

# Lineare Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung

### Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung hat die Form:

$$y' + a(x)y = \begin{cases} 0 & homogene\ Gleichung \\ s(x) & inhomogene\ Gleichung \end{cases}$$

$s(x)$ wird als Störfunktion bezeichnet. Die Lösung einer linearen Differentialgleichung der Form $y' + a(x)y = s(x)$ ist durch $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ gegeben.

Dabei wendet man folgenden Lösungsweg an:

- Lösung der homogenen Gleichung durch „Trennung der Variablen“
- Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung durch „Variation der Konstanten“
- Ermittlung der Lösungsgesamtheit gemäß $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

### Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung hat die Form:

$$y'' + ay' + by = \begin{cases} 0 & homogene\ Gleichung \\ s(x) & inhomogene\ Gleichung \end{cases}$$

a und b sind konstante Koeffizienten. $s(x)$ wird als Störfunktion bezeichnet. Die Lösung einer linearen Differentialgleichung der Form $y'' + ay' + by = s(x)$ ist durch $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ gegeben.

Dabei wendet man folgenden Lösungsweg an:

- Lösung der homogenen Gleichung durch einen Exponentialansatz
- Bestimmung einer partikulären Lösung mit Hilfe eines unbestimmten Ansatzes
- Ermittlung der Lösungsgesamtheit gemäß $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

Meist ist eine charakteristische Gleichung gegeben, aus der wir $\lambda_1, \lambda_2$ erhalten. Die homogene Lösung ist dann:

$$y_h(x) = f(x) = \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, & falls\ \lambda_1 \neq \lambda_2\ reell \\ e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), & falls\ \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta\ konjugiert\ komplex \\ (C_1 + C_2 x)e^{\lambda_1 x}, & falls\ \lambda_1 = \lambda_2\ reell \end{cases}$$

Für die partikuläre Lösung müssen wir die Störfunktion näher betrachten:

| **Störfunktion $s(x)$** | **Versuchslösung $y_p(x)$** |
|---|---|
| $\mathbf{1}$ | $A$ |
| $\boldsymbol{e^{rx}}$ | $Ae^{rx}$ |
| $\boldsymbol{\sin rx}$ oder $\boldsymbol{\cos rx}$ | $A \sin rx + B \cos rx$ |
| $\boldsymbol{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k}$ | $A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_k x^k$ |
| $\boldsymbol{(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k)e^{rx}}$ | $(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_k x^k)e^{rx}$ |