Übung 3

1)

X \ Y	-1	0	1	$P_Y(y)$
-1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$P_X(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

$$P(X=0)\cdot \mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(X=0,Y=1)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{8} \neq \frac{1}{4} \Rightarrow \text{nicht unabhängig}$$

x \ y	-1	0	1	$P_Y(y)$
-1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
0	0	0	0	0
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$P_X(x)$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	

$$\mathbb{P}(X=1)\,\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(X=1,Y=1)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{unabhängig}$$

2)

a)

$$\mathbb{P}(X=x, X=x) = \mathbb{P}(X=x)\cdot\mathbb{P}(X=x)$$

$$\mathbb{P}(\{X=x\}\cap\{X=x\}) = (\mathbb{P}(X=x))^2$$

$$\mathbb{P}(X=x) = (\mathbb{P}(X=x))^2$$

$$\Rightarrow p_x(X=x)=0 \quad \text{oder} \quad p_x(X=x)=1$$

b)

$$\mathbb{P}(Y=y, Y^2=y) = \mathbb{P}(Y=y)\,\mathbb{P}(Y^2=y)$$

$$\mathbb{P}(Y^2=y^2) = \mathbb{P}(Y^2=y^2, Y=y) + \mathbb{P}(Y^2=y^2, Y=y)$$

$$= \mathbb{P}(Y^2=y^2)\,\mathbb{P}(Y=y) + \mathbb{P}(Y^2=y^2)\,\mathbb{P}(Y=-y)$$

$$= \mathbb{P}(Y^2=y^2)\left(\mathbb{P}(Y=y)+\mathbb{P}(Y=-y)\right)$$

1) $\mathbb{P}(Y^2=y^2)=0 \iff \mathbb{P}(Y=y)=0$

2) $\mathbb{P}(Y=y)+\mathbb{P}(Y=-y)=1$

3)

Gedächtnislos

$$\mathbb{P}(X\geq n) = \mathbb{P}(X\geq m+n \mid X\geq m)$$

$\mathbb{P}(x=k)=p(1-p)^k$ für $k\in\mathbb{N}$

[redacted]

> Achtung:
> Es gab zwei Angaben, weil es zwei Definitionen der geometrischen Verteilung gibt:
>
> $\mathbb{P}(X\geq n)=\mathbb{P}(X\geq m+n \mid X\geq m)$ — $(n=1,2,3,\dots)$ $P(X=n)=p(1-p)^{n-1}$
>
> $\mathbb{P}(X>n)=\mathbb{P}(X>m+n \mid X>m)$ — $(n\neq 0,1,2,3,\dots)$ $P(X=n)=p(1-p)^{n-1}$

$$\mathbb{P}(x\geq n) = 1-\mathbb{P}(X<n)$$

$$\mathbb{P}(X<n) = \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(x=k) = \sum_{k=0}^{n-1}p(1-p)^k = p\sum_{k=0}^{n-1}(1-p)^k = p\,\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^n$$

$$\mathbb{P}(x\geq n) = 1-\mathbb{P}(X<n) = 1-1+(1-p)^n = (1-p)^n$$

$$\underline{\underline{\mathbb{P}(X\geq m+n \mid X\geq m)}} = \frac{\mathbb{P}(X\geq m+n)}{\mathbb{P}(X\geq m)} = \frac{(1-p)^{m+n}}{(1-p)^m} = (1-p)^n = \underline{\underline{\mathbb{P}(X\geq n)}}$$

4)

X mit $X(\Omega) = \mathbb{N}$

z.z. $\exists p: \mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^k,\ k \in \mathbb{N}$

$\mathbb{P}(X>n) = \mathbb{P}(X>m+n \mid X>m)$

$$\frac{\mathbb{P}(\{X>n+m\} \cap \{X>m\})}{P(X>m)} = \frac{P(X>n+m)}{P(X>m)}$$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X>n+m) = \mathbb{P}(X>n)\,\mathbb{P}(X>m)$

X nimmt nur Werte von $\mathbb{N}$ an

$\to 1 = \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X>1) = \mathbb{P}(\Omega)$

$p = \mathbb{P}(X=1) \Rightarrow \mathbb{P}(X>1) = 1-p$

Für $n=m=1$ $\quad P(X>2) = P(X>1) \cdot P(X>1) = (1-p)^2$

allg. $\quad P(X>k) = P(X>k-1) \cdot P(X>1) = (1-p)^k \quad k \in \mathbb{N}$

6)

$X(\Omega) = Y(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$\mathbb{P}(X,Y) = (1,1) = \frac{1}{4}$
$\mathbb{P}(X,Y) = (-1,-1) = \frac{1}{4}$
$\mathbb{P}(X,Y) = (2,-2) = \frac{1}{4}$
$\mathbb{P}(X,Y) = (-2,2) = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow$
$\mathbb{P}(X^2,Y^2) = (1,1)$
$\mathbb{P}(X^2,Y^2) = (1,1)$
$\mathbb{P}(X^2,Y^2) = (4,4)$
$\mathbb{P}(X^2,Y^2) = (4,4)$

$\Rightarrow$ nicht unabhängig

$\mathbb{P}(X^2=1, Y^2=1) = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(X^2=4, Y^2=4) = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(X^2=1) = \frac{1}{2}$
$\mathbb{P}(X^2=4) = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(Y^2=1) = \frac{1}{2}$
$\mathbb{P}(Y^2=4) = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(X^2=x, Y^2=y) = \mathbb{P}(X^2=x) \cdot \mathbb{P}(Y^2=y)$ für $x,y \in \{1,4\}$

$\Rightarrow$ unabhängig

6)

X	Y	X+Y	m=min(X,Y)	M=max(X,Y)		m·M
1	1	2	1	1		1
1	2	3	1	2	b)	2
1	3	4	1	3		3
2	1	3	1	2	b)	2
2	2	4	2	2	b)	4
2	3	5	2	3		6
3	1	4	1	3		3
3	2	5	2	3		6
3	3	6	3	3		9

a)

$\mathbb{P}(X+Y, m \cdot M)$

$\mathbb{P}(X,Y)(2,1) = \frac{1}{9}$

$\mathbb{P}(X,Y)(3,2) = \frac{2}{9}$

$\mathbb{P}(X,Y)(4,3) = \frac{2}{9}$

$\mathbb{P}(X,Y)(4,4) = 1/9$

$\mathbb{P}(X,Y)(5,6) = 2/9$

$\mathbb{P}(X,Y)(6,9) = 1/9$

b)

$\mathbb{P}(X=1, M=2) = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

$\mathbb{P}(X=2, M=2) = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$

c)

$\mathbb{P}(m = X) = \mathbb{P}(\mathbb{1}_{\{X=m\}} = 1) = \frac{2}{3}$

$\mathbb{P}(\mathbb{1}_{\{X=m\}} = 1, m = 1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{27}$

$\Rightarrow$ wenn man mit Tabele vergleicht, kann man sehen dass es nicht unabhängig ist