

Mathematik 2 Übung – 3. Übung, 09. November 2004

11. Das elektrostatische Potential einer Punktladung Q im

Koordinatenursprung ist durch $\varphi_1(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ gegeben,

für das Potential eines Dipols mit dem Dipolmoment $\vec{p} = (p, 0, 0)$ gilt

$\varphi_2(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{px}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$. (dabei sind Q, p und ϵ_0 Konstanten. In

beiden Fällen berechne man das zugehörige elektrische Feld \vec{E} nach der Formel $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$.

$$\text{Allgemein: } \text{grad } f = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix}$$

$$\varphi_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\varphi_{1x} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot -\frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (2x) = -\frac{Qx}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$$

$$\varphi_{1y} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot -\frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (2y) = -\frac{Qy}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$$

$$\varphi_{1z} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot -\frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (2z) = -\frac{Qz}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$$

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\begin{pmatrix} \varphi_{1x} \\ \varphi_{1y} \\ \varphi_{1z} \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2(x, y, z) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{px}{4\pi\epsilon_0} \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\varphi_{2x} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} - x \cdot \frac{3}{2} \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x}{\left((x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} \right)^2} =$$

$$\varphi_{2x} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(x^2 + y^2 + z^2) \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} - 3x^2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} =$$

$$\varphi_{2x} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{-2x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\varphi_{2y} = \frac{\rho x}{4\pi\epsilon_0} \cdot -\frac{3}{2} \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2y = -\frac{3\rho xy}{4\pi\epsilon_0} \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3\rho xy}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^5}}$$

$$\varphi_{2z} = -\frac{3\rho xz}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^5}}$$

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\begin{pmatrix} \varphi_{2x} \\ \varphi_{2y} \\ \varphi_{2z} \end{pmatrix}$$