Übungstest Bsp 1

NB,

$\lambda_1: \quad 8 \geqslant x_A + x_B + x_C = 8 - x_A - x_B - x_C \geqslant 0$

$\lambda_2: \quad 19200 \geqslant 2 \cdot 3600 \cdot x_A + 1 \cdot 3200\, x_C = 19200 - 7200 x_A - 3200\, x_C$

Zielfunktion

$$f(x_A, x_B, x_C) = 0{,}2 \cdot 3600\, x_A + 0{,}15 \cdot 3600\, x_B + 0{,}25 \cdot 3200\, x_C$$
$$= 720\, x_A + 540\, x_B + 800\, x_C$$

Primales Programm

$\text{!}\; c'x \Rightarrow Max$

$c = \begin{pmatrix} 720 \\ 540 \\ 800 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{pmatrix}$

$\text{!}\; A \cdot \underbrace{x}_{\text{gesucht}} \leq b$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7200 & 0 & 3200 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 19200 \end{pmatrix}$

↳ NB

↳ Grenzen der NB

Duales Programm

$\text{!}\; b' \cdot \lambda \Rightarrow Min$

$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$

$\text{!}\; A' \cdot \underbrace{\lambda}_{\text{Gesucht}} \geqslant c$

a)

Primal

$$\mathcal{L}(x_A x_B x_C \lambda_1 \lambda_2) = 720 x_A + 540 x_B + 800 x_C + \lambda_1 (8 - x_A + x_B - x_C) + \lambda_2 (19200 - 7200 x_A - 3200 x_C)$$

$\frac{d\mathcal{L}}{d x_A} = 720 - \lambda_1 - 7200 \lambda_2$

$\frac{d\mathcal{L}}{d x_B} = 540 - \lambda_1$

$\frac{d\mathcal{L}}{d \lambda_1} = 8 - x_A - x_B - x_C$

$\frac{d\mathcal{L}}{d \lambda_2} = 19200 - 7200 x_A - 3200 x_B$

λ_1, λ_2 wird aus Zeile [1] (Angabe) herausgelesen:

$\frac{d\mathcal{L}}{dx_B} = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 540}$

$\frac{d\mathcal{L}}{dx_C} = 0 \Rightarrow 800 - 540 - 3200 \cdot \lambda_2 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda_2 = 0{,}0815}}$

$\hookrightarrow x_A = 0$ da in Zeile [1] steht dass $x_A \Rightarrow$ neg DB produziert daher 0.

Letzen 3 Einträge aus Zeile [1] sind relative DB.

$x_A = 0 \Rightarrow$ neg DB

Aus $\frac{d\mathcal{L}}{d\lambda_1} = 0$ & $\frac{d\mathcal{L}}{d\lambda_2} = 0$

$\Rightarrow x_B = 2$

$x_C = 6$

$f(0,2,6) = 540 \cdot 2 + 800 \cdot 6 = \underline{5880}$ ... Primal

$8 \cdot \lambda_1 + 19200 \cdot \lambda_2 = 8 \cdot 540 + 19200 \cdot 0{,}08125 = \underline{\underline{5880}}$ Dual

Im Optimum sind die Primale u. Duale Zielfunktion gleich.

Übungstest Bsp 2

$f(x_1 x_2) = 30-(16-2x_1)^2-(8-x_2)^2 \Rightarrow max$

$f(x_1 x_2) = -290 - 4x_1^2 - x_2^2 + 64x_1 + 16x_2$

NB - Complimentary Slackness

$\lambda_1 = 4x_1 + x_2 - 50 \geq 0$

$\lambda_2 = x_2 - 4x_1 + 14 \geq 0$

1. Versuch, $\lambda_1 ; \lambda_2 \neq 0$ ... Bindend

$\mathcal{L}(x_1 x_2 \lambda_1 \lambda_2) = -290 - 4x_1^2 - x_2^2 + 64x_1 + 16x_2 + \lambda_1(4x_1 + x_2 - 50) + \lambda_2(-4x_1 + x_2 + 14)$

$\frac{d\mathcal{L}}{dx_1} = -8x_1 + 64 + 4\lambda_1 - 4\lambda_2 = -64 + 64 + 80 - 4\lambda_2 - 4\lambda_2 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda_2 = 10}}$

$\frac{d\mathcal{L}}{dx_2} = -2x_2 - 16 + \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_1 = 36 - 16 - \lambda_2 = 20 - \lambda_2 = \underline{\underline{\lambda_1 = 10}}$

$\frac{d\mathcal{L}}{d\lambda_1} = 4x_1 + x_2 - 50 = 4x_1 + 4x_1 - 14 - 50 = 8x_1 - 64 = \underline{\underline{x_1 = 8}}$

$\frac{d\mathcal{L}}{d\lambda_2} = -4x_1 + x_2 + 14 = 4x_1 - 14 = 32 - 14 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = 18}}$

Zielfunktion

$f(x_1 x_2) = -290 - 4 \cdot 8^2 - 18^2 + 64 \cdot 8 + 16 \cdot 18 = \underline{\underline{-70}}$

2 Versuch $\lambda_1 = 0$ nicht Bindend ; $\lambda_2 \neq 0$ ... Bindend

$\frac{d\mathcal{L}}{dx_1} = -8x_1 + 64 - 4\lambda_2 \Rightarrow -8x_1 + 64 - 36x_1 + 176 \Rightarrow 40x_1 = 240 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 6}}$

$\frac{d\mathcal{L}}{dx_2} = -2x_2 + 16 + \lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = 2x_2 - 16 = 8x_1 - 28 - 16 = 8x_1 - 44 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda_2 = 4}}$

$\frac{d\mathcal{L}}{d\lambda_2} = -4x_1 + x_2 + 14 \Rightarrow x_2 = 4x_1 - 14 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = 10}}$

Probe g_1 $4 \cdot 6 \geq 50 - 10$

$\underline{\underline{24 \geq 40}}$ ↯ Verletzt

$f(x_1 x_2) = -290 - 4x_1^2 - x_2^2 + 64x_1 + 16x_2$

$\frac{\partial L}{x_1} = -8x_1 + 64 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 8}}$

$\frac{\partial L}{x_2} = -2x_2 + 16 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = 8}}$

$f(x_1 x_2) = -290 - 4 \cdot 8^2 - 8^2 + 64 \cdot 8 + 16 \cdot 8 = \underline{\underline{30}}$

Bsp 4 Übungstest

$f(x) = X = 4 r_1^{3/6} r_2^{2/6} = 4 r_1^{1/2} r_2^{1/3}$

Faktorpreise $\varphi_1 = 9$

$\varphi_2 = 3$

Ausbringungsmenge $X = 512$

$K = \varphi_1 r_1 + \varphi_2 r_2 = 9 r_1 + 3 r_2$

$\mathcal{L}(r_1, r_2) = 4 r_1^{1/2} r_2^{1/3} - 512$

a) $\frac{d\mathcal{L}}{dr_1} = \frac{2\cancel{4}\sqrt[3]{r_2}}{\cancel{2}\sqrt{r_1}} = \frac{2\sqrt[3]{r_2}}{\sqrt{r_1}} = MP_1$ ... Grenzproduktivität von 1

b) $\frac{d\mathcal{L}}{dr_2} = \frac{4\sqrt{r_1}}{3 r_2^{2/3}} = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt[3]{r_2^2}} = MP_2$!

c) $\frac{MP_1}{\varphi_1} = \frac{MP_2}{\varphi_2}$!

$\frac{1}{\cancel{9}} \frac{\cancel{2} r_2^{2/3}}{\sqrt{r_1}} = \frac{\cancel{4}\sqrt{r_1}}{\cancel{9} r_2^{1/3}} = r_2 = 2 r_1$

$K = 9 r_1 + 3 r_2$

d) $K = 9 r_1 + 6 r_1 = 15 r_1$

$f(x) = x = 4 r_1^{1/2} (2 r_1)^{1/3} = X = 4 r^{1/2} \cdot r^{1/3} 2^{1/3} = 4\sqrt[3]{2}\, r^{\frac{3+2}{6}} = 4\sqrt[3]{2}\, r^{5/6} = X$

$r_1^{5/6} = \frac{X}{4\sqrt[3]{2}} = r_1 = \frac{X^{6/5}}{(4\sqrt[3]{2})^{6/5}} \Rightarrow K = 15 r_1 = \frac{15 X^{6/5}}{(4\sqrt[3]{2})^{6/5}}$

e) $X = 512 = 4 r_1^{1/2} (2 r_1)^{1/3} = 4\sqrt[3]{2}\, r_1^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 4\sqrt[3]{2}\, r_1^{5/6} = r_1 = \left(\frac{512}{4\sqrt[3]{2}}\right)^{6/5} = 256$

f) $(K)'$ = Grenzkosten !

$K' = \left(\frac{15}{(\ )} \cdot x^{6/5}\right)' = \frac{15}{(4\sqrt[3]{2})^{6/5}} \cdot \frac{6}{5} \cdot X^{1/5} = \frac{\overset{3}{\cancel{15}} \cdot 6 \cdot \sqrt[5]{512}}{(4\sqrt[3]{2})^{6/5} \cdot \cancel{5}} = \frac{18\sqrt[5]{512}}{6{,}9644} = 9$ €/Eh

// Relativ DB = $\frac{dL}{dx_i}$

$\frac{dL}{dx_i} \cdot x_i = 0$ ... complementary slackness

$dL/dx_i \le 0$; $x_i \ge 0$ ... bei MAX

Übungs Klausur Dez 2011

330.227 Betriebswirtschaftliche Optimierung

ao.Univ.Prof. Mag. DDr. Thomas Dangl

Vorname: ....

Nachname: ....

Matrikelnummer: ....

Studienkennzahl: ....

Aufgabe 1 (25 %):

Firma Z ist ein metallverarbeitender Betrieb. In der Vorweihnachtszeit stanzt das Unternehmen Christbäume und Sterne aus Kupferblech, emailliert sie bunt und verkauft sie als Christbaumschmuck.

Die Stanzmaschine lässt sich in drei unterschiedlichen Einstellungen betreiben.

A: Aus einer Blechplatte werden 2 Christbäume gestanzt, es können 3600 Platten pro Stunde gestanzt werden. Pro Platte wird ein Deckungsbeitrag von EUR 0.2 erzielt.

B: Aus einer Blechplatte werden 5 Sterne gestanzt, es können 3600 Platten pro Stunde gestanzt werden. Pro Platte wird ein Deckungsbeitrag von EUR 0.15 erzielt.

C: Aus einer Blechplatte werden ein Christbaum und 4 Sterne gestanzt. In dieser Einstellung können 3200 Platten pro Stunde gestanzt werden. Pro Platte wird ein Deckungsbeitrag von EUR 0.25 erzielt.

Pro Tag kann maximal 8 Stunden gearbeitet werden. Die maximale Anzahl an Christbäumen, die pro Tag abgesetzt werden kann, ist 19200.

Wieviele Stunden pro Tag soll die Maschine in den Einstellungen A, B und C betrieben werden, wenn der Gesamtdeckungsbeitrag maximiert werden soll.

Das primale Problem wird mit Hilfe der Funktion `lp` in R implementiert (Reihenfolge der Variablen: x_A, x_B, x_C bezeichnen die Anzahl der Stunden, die die Maschine in den Einstellungen A, B und C arbeitet. Reihenfolge der Nebenbedingungen: "Zeit", "Anzahl der Christbäume") und die Lösung in der Variablen `solPrimal` gespeichert. Mit dem Befehl `solPrimal$duals` erhält man als Ausgabe

L zuerst duale Variablen NB dann die der Variablen

λ_1 λ_2

```
[1] 540.00000 0.08125 -405.00000 0.00000 0.00000
```

x_A x_B x_C

Welche der folgenden Aussagen sind richtig (alle richtig):

a) Im primalen Problem sind die Koeffizienten der Zielfunktion: 720, 540, 800 = DB

b) Der optimale Zielfunktionswert ist gleich 5880.

c) Die optimale Lösung ist es, die Maschine 2 Stunden/Tag mit Einstellung 2 und 6 Stunden/Tag mit Einstellung 3 zu betreiben.

d) Eine zusätzliche Arbeitsstunde/Tag würde den maximal erzielbaren Deckungsbeitrag um EUR 540/Tag steigern.

e) Im dualen Problem sind die Koeffizienten der Zielfunktion: 8, 19200. ⇒ Dual dreht alles

NB → HB

min → max

f) Die Nebenbedingungen im dualen System lauten

$$\begin{array}{rcrcl} \lambda_1 & + & 7200\lambda_2 & \geq & 720 \\ \lambda_1 & & & \geq & 540 \\ \lambda_1 & + & 3200\lambda_2 & \geq & 800 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ A & & B & & DB \end{array}$$

Aufgabe 2 (25 %):

Betrachte folgendes Maximierungsproblem:

$$f(x_1, x_2) = 30 - (16 - 2x_1)^2 - (8 - x_2)^2 \rightarrow_{x_1, x_2} \max$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{lrcl} g1: & 4x_1 & \geq & 50 - x_2, \\ g2: & x_2 & \geq & -14 + 4x_1. \end{array}$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig (alle richtig):

a) Die erste partielle Ableitung der Lagrangefunktion nach x_1 ist $4(16-2x_1) + 4\lambda_1 - 4\lambda_2$.

b) Die optimale Lösung ist $x_1 = 8$, $x_2 = 18$, $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 10$, der optimale Zielfunktionswert ist -70.

c) Die zur zweiten Randbedingung gehörende "complementary slackness" - Bedingung lautet: $(14 - 4x1 + x2)\lambda_2 = 0$

d) Betrachten Sie den Lösungsversuch, wo angenommen wird, dass nur die zweite Nebenbedingung g_2 bindend ist. Dann ist die Lösung $x_1 = 6$, $x2 = 10$, $\lambda_2 = 4$, der Zielfunktionswert ist 10. Allerdings ist an dieser Stelle die Nebenbedingung g_2 verletzt. $g_2 = g_1$ Angabefehler ?

e) Ändert man die Nebenbedingung g_2 marginal in

$$x_2 \geq -(14 + dp) + 4x_1$$

dann steigt die optimale Zielfunktion um $10dp$. $= \lambda_2 dp$

f) Die optimale Lösung des unbeschränkten Problems ist $x_1 = 8$, $x_2 = 8$, der Zielfunktionswert an dieser Stelle ist gleich 30.

Aufgabe 3 (25 %):

Wie in der Vorlesung nehmen wir an, dass Zielfunktionen zwei Mal stetig differenzierbar sind und auf offenen und konvexen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ definiert sind.
Welche der folgende Aussagen sind richtig (alle richtig):

a) Eine symmetrische Matrix ist negativ-definit genau dann, denn alle Eigenwerte der Matrix negativ sind.

b) Optimierung ohne Nebenbedingungen: Wenn $f(x)$ ein (lokales) Minimum bei x^* erreicht, dann folgt daraus, dass f_{xx} bei x^* positiv-semidefinit ist.

c) Optimierung ohne Nebenbedingungen: Ist die Zielfunktion konkav und gilt $f_x(x^*) = 0$, dann ist x^* ein globales Maximum.

d) Optimierung mit Nebenbedingungen: Eine Nebenbedingung g_i ist in einem Punkt $\bar{x}$ genau dann bindend, wenn $g_i(\bar{x}) = 0$.

e) Maximierungsproblem mit Nebenbedingungen: Lagrange-Multiplikatoren sind immer nicht-negativ.

f) Produktionstheorie: Als Substitutionseffekt bezeichnet man die Verschiebung der optimalen Faktorkombination als Reaktion auf eine Veränderung der relativen Faktorpreise bei konstantem Output.

Aufgabe 4 (25 %):

Eine Firma will ein Gut X produzieren. Die zugrundeliegende Produktionsfunktion lautet

$$f(x) = 4r_1^{(3/6)}r_2^{(2/6)},$$

wobei x die Ausbringungsmenge pro Zeiteinheit und r_1, r_2 die Faktoreinsatzmengen pro Zeiteinheit der Produktionsfaktoren 1 und 2 bezeichnet. Die Faktorpreise betragen $q_1 = 9$ EUR/EH und $q_2 = 3$ EUR/EH.
Die Produktion soll auf eine Ausbringung von 512 Einheiten pro Zeiteinheit ausgelegt werden.
Welche der folgende Aussagen sind richtig (alle richtig):

a) Die Grenzproduktivität des Produktionsfaktors 1 ist $MP_1 = \dfrac{2r_2^{(1/3)}}{\sqrt{r_1}}$.

b) Die Grenzproduktivität des Produktionsfaktors 2 ist $MP_2 = \dfrac{4\sqrt{r_1}}{3r_2^{(2/3)}}$.

c) Der optimale Expansionspfad lautet $r_2 = 2r_1$.

d) Die Kostenfunktion lautet $K(x) = \dfrac{15x^{(6/5)}}{(4 \cdot 2^{(1/3)})^{(6/5)}} = \dfrac{15}{4}\dfrac{x^{(6/5)}}{2^{(4/5)}}$.

e) Bei einer Ausbringung von $x = 512$ ist die optimale Einsatzmenge des Faktors 1 gleich $r_1 = 256$.

f) Bei optimaler Produktion von $x = 512$ sind die Grenzkosten gleich 9 EUR/EH.