Analysis Beispiele

Analysis Beispiele

Es sind ungefähr 70 Bsp die ich gelöst habe. Es sind etwas weniger distinct Bsp da ich ab und zu Aufgaben doppelt gemacht habe (vor allem in der Theorie). Gittenberger Aufgabensammlung stand 2. November 2023 von der Website. Einige Bsp habe ich ausgelassen weil sie zu schwer waren, oder nicht mehr im Stoff. Für Richtigkeit wird keine Haftung übernommen.

Theorie (26 Bsp)

5)(8 P.) Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen. Geben Sie exakte Definitionen für die Begriffe Grenzwert und Häufungspunkt an.

Gibt es eine Folge reeller Zahlen, die zwei Grenzwerte hat? Wenn ja, geben Sie eine solche Folge konkret an. Wenn nein, beweisen Sie, dass es so eine Folge nicht geben kann.

Eine reele Zahl a heißt Grenzwert (oder Limes) der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$, falls in jeder ε-Umgebung von a fast alle Folgenglieder a_n liegen, d.h. falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n > N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$$

Wenn in jeder ε-Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder liegen, so ist a ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$.

Eine Folge kann zwar mehrere Häufungspunkte haben, aber nicht mehrere Grenzwerte. Falls a und b zwei Häufungspunkte von $(a_n)_{n\geq 0}$ sind, so gilt für $\varepsilon < \frac{1}{2}|a-b|$, dass $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$. Daher können nicht fast alle a_n sowohl in $U_\varepsilon(a)$ als auch in $U_\varepsilon(b)$ liegen. Daher kann es nicht zwei Grenzwerte geben.

4)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine total differenzierbare Funktion. Weiters seien $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen.

1) Wie ist die partielle Ableitung von f im Punkt (x_0, y_0) definiert?

2) Wie lautet die Kettenregel für das Ableiten von $F(x) = f(u(x), v(x))$?

3) Wie berechnet man die Ableitung von $y(x)$ an der Stelle x_0, wenn $y(x)$ die Lösung der Gleichung $F(x, y) = 0$ ist? Begründen Sie Ihre Antwort und nennen Sie die Voraussetzungen, die Sie dabei zugrunde legen!

1) Die partielle Ableitung von f im Punkt (x_0, y_0) ist definiert als die Ableitung einer Funktion im Bezug auf eine Variable, während die andere Variable festgehalten wird.

Dann heißt f in (x_0, y_0) partiell nach x differenzierbar, falls der Grenzwert:

$$f_x(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}$$

existiert, und partiell nach y differenzierbar falls der Grenzwert:

$$f_y(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0}$$

existiert. Die beiden Grenzwerte $f_x(x_0,y_0)$ und $f_y(x_0,y_0)$ werden partielle Ableitungen von f nach x bzw. y genannt.

2)
$$F'(x) = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot u'(x) + \frac{\partial f}{\partial v} v'(x)$$

hier sind $\frac{\partial f}{\partial u}$ und $\frac{\partial f}{\partial v}$ die partiellen Ableitungen von f nach u und v an der Stelle $(u(x), v(x))$, und $u'(x)$ und $v'(x)$ sind die Ableitungen von u und v nach x.

3) Um die Ableitung von $y(x)$ an der Stelle x_0 zu berechnen, wenn $y(x)$ die Lösung der Gleichung $F(x,y)=0$ ist, wird die implizite Differentiation verwendet.

Voraussetzungen:

- $F(x,y)$ ist stetig differenzierbar in der Umgebung von (x_0, y_0)
- Die partielle Ableitung $\frac{\partial F}{\partial y}$ an der Stelle (x_0, y_0) ist nicht 0.

Unter diesen Bedingungen kann man die Gleichung $F(x,y)=0$ nach x differenzieren und erhält:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y'(x) = 0$$

umformen auf

$$y'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

und für x_0 erhält man

$$y'(x_0) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

Dies ist die Steigung der Funktion an der Stelle x_0.

5)(8 P.) Gegeben ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Geben Sie eine geometrische (d.h. anschauliche) Definition von totaler Differenzierbarkeit. Wie lassen sich die partiellen Ableitungen f_x und f_y sowie die Richtungsableitung von f in Richtung eines normierten Vektors $\mathbf{v}$, jeweils im Punkt (a, b), geometrisch beschreiben? Wie lautet die Richtungsableitung von $f(x, y) = \arctan(\log(x^2))\sin(y)$ in Richtung des Vektors $(0, 1)$ und im Punkt $(1, 0)$?

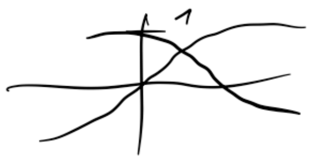
Die Funktion $f(x,y)$ ähnelt im Punkt (x_0,y_0) der Tangentialebene im Punkt (x_0,y_0).

Die partiellen Ableitungen sind der Anstieg der Tangential ebene in diese Richtung

Die Richtungsableitung gibt an wie stark diese Tangentialebene in die Richtung des Vektors ansteigt.

$$f(x,y) = \arctan(\log(x^2))\sin(y) \qquad v = (0,1) \quad x = (1,0)$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\frac{2x}{x^2}}{1+\log(x^2)^2}\sin(y) = \frac{2 \cdot \sin(y)}{x + x\log(x^2)^2} =$$



$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \arctan(\log(x^2)) \cdot \cos(y)$$

$$f_x(1,0) = \frac{2 \cdot \sin(1)}{1+\log(1)^2} = 2 \cdot \sin(1)$$

$$f_y(1,0) = \arctan(\log(1)) \cdot \cos(0) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2\cdot\sin(1) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

4)(8 P.) Was versteht man (anschaulich) unter dem bestimmten Integral einer reellwertigen Funktion f über einem Intervall $[a, b]$? Wann heißt so ein Integral uneigentlich? Erklären Sie den Zusammenhang zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integral und berechnen Sie

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_x^y e^{\tan(z^2)}\,\mathrm{d}z.$$

__Bestimmtes Integral:__

Man kann sich das bestimmte Integral einer Funktion f über einem Intervall $[a, b]$ vorstellen als die Fläche zwischen der Funktion $f(x)$ und der x-Achse und vertikalen Linien bei a und b.
Ist die Funktion im Intervall positiv ist ist die Fläche tatsächlich positiv, ist sie Negativ ist auch die Fläche negativ.

__Uneigentliches Integral:__

Ein Integral heißt uneigentlich wenn:

1) f über $[a, b]$ nicht beschränkt ist, d.h. sie hat eine oder mehrere Unendlichkeitsstellen
2) Das Intervall selbst ist unbeschränkt, also es hat die Form $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ oder $(-\infty, \infty)$.

__Zusammenhang:__

Das unbestimmte Integral der Funktion f wird oft als $F(x)$ bezeichnet (Antiderivat). Das bestimmte Integral lässt sich über dem Intervall $[a, b]$ berechnen als

$$F(b) - F(a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_x^y e^{\tan(z^2)}\,dz$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_x^y e^{\tan(z^2)}\,\mathrm{d}z. = \underline{\underline{-e^{\tan(x^2)}}}$$

$$\underline{f(z) = e^{\tan(z^2)}} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\Big(F(y) - F(x)\Big)$$

$$\underset{0}{\Downarrow} \quad - f(x)$$

5)(8 P.) Was versteht man (anschaulich) unter dem bestimmten Integral einer reellwertigen Funktion f über einem Intervall $[a,b]$? Wann heißt so ein Integral uneigentlich? Erklären Sie den Zusammenhang zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integral und berechnen Sie

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_x^y e^{\tan(z^2)}\,\mathrm{d}z.$$

Unter dem bestimmten Integral von f im Intervall $[a,b]$ kann man sich die Fläche unter der Kurve vorstellen, also zwischen dem Graphen der Funktion $f(x)$ und der x-Achse. Ist die Funktion im Intervall positiv, so ist auch die Fläche positiv, sonst negativ.

Ein Integral heißt uneigentlich wenn:

- f ist über $[a,b]$ unbeschränkt, d.h. sie hat eine oder mehrere Unendlichkeitsstellen
- Das Intervall selbst ist unbeschränkt, also hat die Form $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, \infty)$.

Der Zusammenhang besteht darin das das unbestimmte Integral von f oft als $F(x)$ bezeichnet (Antiderivat). Das bestimmte Integral lässt sich über dem Intervall $[a,b]$ berechnen als

$$F(b) - F(a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_x^y e^{\tan(z^2)}\,dz = \underline{\underline{-e^{\tan(x^2)}}}$$

$$f(z) = e^{\tan(z^2)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_x^y f(z)\,dz = \frac{\partial}{\partial x}\big(\underbrace{F(y)}_{0} - \underbrace{F(x)}_{f(x)}\big) = -f(x)$$

5)(8 P.) Was versteht man (anschaulich) unter dem bestimmten Integral einer reellwertigen Funktion f über einem Intervall $[a, b]$? Wann heißt so ein Integral uneigentlich? Erklären Sie den Zusammenhang zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integral und berechnen Sie

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_x^y e^{\tan(z^2)} \, \mathrm{d}z.$$

Unter dem bestimmten Integral über $[a, b]$ kann man sich die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse vorstellen im Teil $[a, b]$.
Ist die Funktion positiv so ist auch die Fläche positiv, ist sie negativ, dann negativ.
Ein solches Integral heißt uneigentlich wenn Die Funktion im Teil $[a, b]$ unbeschränkt ist, also eine Unendlichkeitsstelle hat, oder wenn das Intervall selbst unbeschränkt ist: $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, \infty)$.
Der Zusammenhang besteht darin das das unbestimmte Integral von $f(x)$ oft als $F(x)$ (Antiderivat) bezeichnet wird. Das bestimmte Integral über $[a, b]$ lässt sich berechnen durch

$$F(b) - F(a).$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_x^y e^{\tan(z^2)} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_x^y f(z) \, dz = \frac{\partial}{\partial x} \left(F(y) - F(x) \right) =$$

$$f(z) = e^{\tan(z^2)} \qquad = -F(x) = \underline{\underline{-e^{\tan(x^2)}}}$$

5)(8 P.) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen. Was bedeuten die folgenden Aussagen? a) $a_n = O(b_n)$, b) $a_n = o(b_n)$, c) $a_n \sim b_n$.

Stimmen die folgenden Schlussfolgerungen?
(Ihre Antwort muss begründet werden!)

d) Aus $a_n = o(1)$ folgt, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.
e) Aus $a_n \sim b_n$ folgt $a_n - b_n = o(a_n)$.

Geben Sie weiters je zwei konkrete Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, sodass

f) $a_n = O(b_n)$, g) $a_n = o(b_n)$ gilt bzw h) $a_n = O(b_n)$ <u>nicht</u> gilt.

a) (a_n) ist asymptotisch beschränkt durch (b_n) d.h. (a_n) wächst höchstens so schnell wie (b_n)

b) (a_n) ist im Vergleich zu (b_n) vernachlässigbar, wenn $n \to \infty$
(a_n) wächst langsamer als jede noch so kleine Vielfache von (b_n)

c) (a_n) und (b_n) sind asymptotisch äquivalent.

---

d) $(a_n) = o(1) \to (a_n)$ ist Nullfolge $\Rightarrow$ stimmt
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{1} = 0$ kann nur dann gelten wenn a_n Nullfolge

e)
$$\frac{(a_n)}{(b_n)} \to 1 \Rightarrow \frac{a_n - b_n}{a_n} \to 0 \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{a_n}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty}(1-1) = \underline{\underline{0}}$$
$$\frac{a_n - b_n}{a_n} = 1 - \frac{a_n}{b_n}$$
✓

f) $a_n = O(b_n)$

$a_n = n$
$b_n = n^2$ $|a_n| \le C \cdot |b_n|$

h) $a_n \neq O(b_n)$

$a_n = n^2$
$b_n = n$

Es gibt kein C sodass gilt
$|a_n| \le C \cdot |b_n|$

g) $a_n = o(b_n)$

$a_n = \frac{1}{n}$
$b_n = 1$ $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[\infty]{} 0$

4)(8 P.) Sei f eine auf dem Intervall $[a, b]$ definierte, reellwertige und beschränkte Funktion.

1) Was ist eine Zerlegung von $[a, b]$ und wie ist die Feinheit einer Zerlegung definiert?

2) Was versteht man unter einer Riemann'schen Zwischensumme von f über $[a, b]$?

3) Wie ist das bestimmte Integral von f über dem Intervall $[a, b]$ definiert?

4) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion f, für die das bestimmte Integral über dem Intervall $[a, b]$ nicht existiert, und begründen Sie mit Hilfe von Riemann'schen Zwischensummen, warum es nicht existiert.

1) Eine Zerlegung von $[a,b]$ ist eine endliche Folge von Punkten $x_0, \dots, x_n$, sodass $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Diese Punkte unterteilen das Intervall $[a,b]$ in kleinere Teil=intervalle $[x_{i-1}, x_i]$.
Die Länge des längsten Teilintervalls einer Zerlegung Z heißt Feinheit $\mathcal{F}(Z)$ der Zerlegung.

2) Eine Riemann'sche Zwischensumme S von f bezüglich einer Zerlegung Z und einer Auswahl von Zwischenpunkten $c_i = [x_{i-1}, x_i]$ ist definiert als

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

3) Sei $I = [a,b]$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$.
Falls jede Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Zwischensummen, deren Zerlegungsfolge $\lim_{n \to \infty} \mathcal{F}(Z_n) = 0$ erfüllt, gegen den selben Grenzwert konvergiert, so nennt man diesen Grenzwert das bestimmte Integral von f auf dem Intervall $[a,b]$ und schreibt $\int_a^b f(x)\,dx$

4) $f: \mathbb{R} \to [0,1]$

$$f = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Jedes Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ einer Zerlegung von $[0,1]$ enthält sowohl rationale als auch irrationale Zahlen, somit lassen sich sämtliche Zwischenstellen ξ_i rational bzw. irrational wählen.

5)(8 P a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Erklären Sie anschaulich, was man unter der Stetigkeit von f auf $[a, b]$ versteht.

b) Formulieren Sie die ε-δ-Definition der Stetigkeit.

c) Wie sehen alle auf dem Intervall $[a, b]$ „stetigen“ Funktionen aus, wenn man in der Definition der Stetigkeit die Reihenfolge der Quantoren (von ε und δ) vertauscht?

a) Eine anschauliche Definition der Stetigkeit wäre:

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ heißt stetig auf $[a,b]$ wenn man den Graphen der Funktion zeichnen kann ohne den Stift abzusetzen, also das die Funktion keine Sprünge, Lücken oder Polstellen hat.

b) $f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig an der Stelle $x_0 \in D$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right).$$

c) $$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right).$$

Wenn man die Quantoren vertauscht werden, ist die Funktion beschränkt durch $f(x_0) - \varepsilon$ und $f(x_0) + \varepsilon$.

4) (8 P.) Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen. Geben Sie exakte Definitionen für die Begriffe Grenzwert und Häufungspunkt an.

Gibt es eine Folge reeller Zahlen, deren Häufungspunkte genau die Elemente von $\mathbb{Z}$ sind? Wenn ja, geben Sie eine solche Folge konkret an. Wenn nein, begründen Sie, warum es so eine Folge nicht geben kann.

Eine reele Zahl a heißt Grenzwert (oder Limes) der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$, falls in jeder ε-Umgebung von a fast alle Folgenglieder a_n liegen, d.h. falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon \text{ gilt.}$$

Wenn in jeder ε-Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder liegen, so ist a ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geq 0}$.

$a_n =$

1	2	3	4	5	6	...
-1	-2	-3	-4	-5	-6	...
1	2	3	4	5	6	...
-1	-2	-3	-4	-5	-6	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Man stelle sich eine Tabelle vor die wie oben aussieht, geht man diese Tabelle nun wie oben gezeichnet durch und schreibt das Element auf welchem man sich gerade befindet auf, so kommt man zu einer Folge deren Häufungspunkte alle Elemente von $\mathbb{Z}$ sind.

4)(8 P.) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Ergänzen Sie die folgende Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ heißt stetig an der Stelle $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ definitionsgemäß genau dann, wenn ...

Zeigen Sie: Für jede $m \times n$-Matrix A ist die Funktion $f(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$ stetig an der Stelle $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Zeigen Sie mit Hilfe des vorigen Resultats, dass $f(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$ an jedem Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ stetig ist.

dann, wenn ...
Zeigen Sie: Für jede $m \times n$-Matrix A ist die Funktion $f(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$ stetig an der Stelle $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Zeigen Sie mit Hilfe des vorigen Resultats, dass $f(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$ an jedem Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ stetig ist.

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$$

$$f(0) = f(0 \cdot x) = 0 \cdot f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \checkmark$$

lin. Abb.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} A \cdot x = 0 = f(0)$$

$$f(x) \text{ linear} \Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y) = A \cdot (x+y) = A \cdot x + A \cdot y$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x + x_0) = \lim_{x \to 0} A \cdot (x + x_0) = \lim_{x \to 0} A \cdot x + A \cdot x_0 = A \cdot x_0 = f(x_0)$$

4)(8 P.) Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen. Geben Sie exakte Definitionen für die Begriffe Grenzwert und Häufungspunkt an.

Gibt es eine Folge reeller Zahlen, deren Häufungspunkte genau die Elemente von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ sind? Wenn ja, geben Sie eine solche Folge konkret an. Wenn nein, begründen Sie, warum es so eine Folge nicht geben kann.

Eine Zahl a heißt Grenzwert (oder Limes) einer Folge $(a_n)_{n\geq 0}$, falls in jeder ε-Umgebung von a fast alle Folgenglieder liegen, d.h. falls:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$$

Wenn in jeder ε-Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder liegen, so ist a ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geq 0}$.

?

5)(8 P.) Was ist eine Potenzreihe?

Was versteht man unter dem Konvergenzradius einer Potenzreihe?

(Bemerkung: Es ist bei dieser Frage nicht die Formel zur Berechnung des Konvergenzradius gefragt!)

Wie kann man den Konvergenzradius einer Potenzreihe berechnen?

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die man um einen Punkt a in eine Potenzreihe entwickeln kann? Wie lautet in diesem Fall die Potenzreihe von $f(x)$?

Unter einer Potenzreihe versteht man Reihen der Form $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$.

Der Konvergenzradius R ist eine Zahl für die gilt $0 \leq R \leq \infty$, so dass die Reihe für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x-x_0| < R$ absolut konvergent ist und für $|x-x_0| > R$ divergent ist.

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Wenn $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion um einen Punkt a in eine Potenzreihe entwickelt werden kann, kann die Funktion als Taylor-Reihe der Funktion dargestellt werden:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

4)(8 P.) Was versteht man unter einer homogenen, linearen Differentialgleichung zweiter (1) Ordnung?

(2) Wie sieht die Lösungsmenge so einer Differentialgleichung aus? Wie kann man infolge dessen die Lösungsmenge am einfachsten beschreiben?

(3) Was versteht man unter dem Superpositionsprinzip für inhomogene, lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung?

(4) Beweisen Sie das Superpositionsprinzip für inhomogene, lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung?

(1) Homogen → keine Störfunktion

$$y'' + a(x) \cdot y' + b(x) y = 0$$

Linear → kein $(y'')^2$

(2) Eine Funktionenschar die von zwei Konstanten variiert werden kann.
Es gibt nicht eine Lösung sondern unendlich viele.

(3) Ist die Störfunktion eine Linearkombination von Funktionen verschiedener Formen (z.B. Polynom- und Exponentialfunk.), kann man zunächst partikuläre Lösungen der einzelnen Komponenten bestimmen, und diese dann zu einer Gesamtlösung zusammen fügen.

(4)

$$y'' + a(x) \cdot y' + b(x) \cdot y = s(x) \qquad s(x) = s_1(x) + s_2(x)$$

$y_h(x)$ erfüllt: $y'' + a(x) \cdot y' + b(x) y = 0$

$y_{P_1}(x)$ erfüllt: $y'' + a(x) \cdot y' + b(x) \cdot y = s_1(x)$

$y_{P_2}(x)$ erfüllt: $y'' + a(x) \cdot y' + b(x) \cdot y = s_2(x)$

$$(y_h(x) + y_{P_1}(x) + y_{P_2}(x))'' + a(x)(y_h(x) + y_{P_1}(x) + y_{P_2}(x))' + b(x)(y_h(x) + y_{P_1}(x) + y_{P_2}(x)) =$$

$$\underbrace{y_h'' + a(x)y_h' + b(x)y_h}_{=0} + \underbrace{y_{p_1}'' + a(x)y_{p_1}' + b(x)y_{p_1}}_{=S_1(x)} + \underbrace{y_{p_2}'' + a(x)y_{p_2}' + b(x)y_{p_2}}_{S_2(x)}$$

$$S_1(x) + S_2(x) = S(x)$$

$$y_h(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) = S_1(x) + S_2(x)$$

$$y_h(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) = S(x)$$

5)(8 P.) Wie ist die Ableitung $f'(x_0)$ einer Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in (a, b)$
1) definiert?

2) Rechnen Sie $(x^2)' = 2x$ mit Hilfe dieser Definition nach!

3) Wie lautet die Kettenregel fürs Differenzieren? Geben Sie eine vollständige Formulierung in Form eines mathematischen Theorems, d.h. gefordert ist eine Formulierung in ganzen Sätzen, die auch alle nötigen Voraussetzungen angibt!

4) Sei $g = f^{-1}$. Weiters gelte, dass f und g differenzierbar sind und dass $f'(x_0) \neq 0$. Zeigen Sie mit Hilfe der Kettenregel, dass dann $g'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

1) $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

2) $$\lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x + x_0)\cancel{(x - x_0)}}{\cancel{x - x_0}} = \lim_{x \to x_0} x + x_0 = \underline{\underline{2x_0}}$$

3) $$f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Die Ableitung der zusammengesetzten Funktion an der Stelle x ist das Produkt der Ableitung von f an der Stelle $g(x)$ und der Ableitung von g an der Stelle x.

4) $$g = f^{-1}$$

$$g'(f(x_0))$$

$$g(f(x)) = x$$

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

$\downarrow$

einsetzen $x = x_0$

$$g'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

4)(8 P.) Gegeben ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

1) Geben Sie eine geometrische (d.h. anschauliche) Definition von totaler Differenzierbarkeit.

2) Wie lässt sich die Richtungsableitung von f in Richtung eines normierten Vektors $\mathbf{v}$ im Punkt (a, b) geometrisch beschreiben?

3) Wie lautet die Richtungsableitung von $f(x, y) = (1 + 2x) \arctan(\ln(2y^2))$ in Richtung des Vektors $(1, 0)$ im Punkt $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$?

1) Eine geometrische Definition von totaler Differenzierbarkeit ist, dass die Funktion $f(x,y)$ im Punkt (x_0,y_0) der Tangentialebene im Punkt (x_0,y_0) ähnelt.
Die partielle Ableitung sind der Anstieg der Tangentialebene in diese Richtung.

2) Die Richtungsableitung gibt an wie stark diese Tangentialebene in die Richtung des Vektors ansteigt.

3)
$$f(x,y) = (1+2x) \cdot \arctan(\ln(2y^2))$$
$$v = (1,0)$$
$$x = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2 \cdot \arctan(\ln(2y^2))$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (1+2x) \cdot \frac{1}{\ln(2y^2)^2+1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}y^{\cancel{2}}} \cdot {}^{2}\cancel{4}\cancel{y} = \frac{2+4x}{y(\ln(2y^2)^2+1)}$$

$$f_x\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 \cdot \arctan\left(\ln\left(2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)\right)$$
$$= 2 \cdot \arctan(\ln(1)) = 2 \cdot \arctan(0) = 0$$

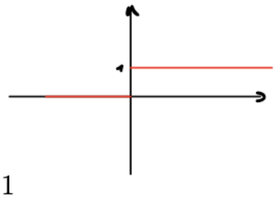
$$f_y\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2+4 \cdot 0}{\frac{1}{\sqrt{2}}(\ln(1)^2+1)} = \frac{\frac{2}{1}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

4)(8 P.) Was versteht man darunter, dass eine reelle Funktion f im Punkt x_0 stetig ist? (exakte ε-δ-Definition und auch anschaulich!)

Erklären Sie anhand der ε-δ-Definition, warum die Funktion

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{f. } x \leq 0 \\ 1 & \text{f. } x > 0 \end{cases}$$



unstetig im Punkt $x_0 = 0$ ist.

Warum ist die Funktion

$$f_2 : (0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin \frac{1}{x}$$

auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig?

Gibt es eine auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetige Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, die auf $(0,1]$ mit f_2 übereinstimmt? (Begründung!)

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right)$$

Wir geben uns eine Toleranz ε vor und erlauben es $f(x)$ sich innerhalb des Intervalls $f(x_0) \pm \varepsilon$ zu bewegen. Genau dann lässt sich immer ein Intervall $I_0 = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ finden sodass die Funktion dieses Intervall nicht verlässt, wenn sie stetig ist.

2) Widerspruchsbeweis

$\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\quad x_0 = 0$

$$\Downarrow$$

$$|x| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x)| < \frac{1}{2}$$

$|x| < \delta(\varepsilon)$ bedeutet das $x \in (-\delta(\varepsilon), +\delta(\varepsilon))$

weil $\delta(\varepsilon) > 0 \Rightarrow \exists x^* \in (-\delta(\varepsilon), \delta(\varepsilon))$ so das $x^* > 0$ ist.

$|x^*| < \delta(\varepsilon)$ aber $|f(x^*)| = 1$ damit ist die Funktion nicht stetig.

3) Wenn $g(x)$ stetig auf einem Intervall I ist und $f(x)$ ist stetig auf $g(I)$ so ist $f(g(x))$ ist stetig auf I.

$\frac{1}{x}$ ist stetig auf $(0,1]$, $\sin(x)$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$, dennoch ist $\sin(\frac{1}{x})$ stetig auf $(0,1]$.

4) Nein, da $\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ nicht existiert kann keine solche Funktion gefunden werden.

4)(8 P.) Definieren Sie die Begriffe partielle Ableitung, Richtungsableitung, Gradient für Funktionen in zwei Variablen und geben Sie jeweils ein Beispiel an.

Partielle Ableitung:

Bei der partiellen Ableitung wird eine Funktion im Bezug auf eine ihrer Variablen abgeleitet, nur diese Variable wird als veränderlich betrachtet und alle anderen als Konstanten.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f: D \to \mathbb{R}$ und $(x_0, y_0) \in D$, so heißt f in (x_0, y_0) partiell nach x differenzierbar, falls der Grenzwert

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \quad \text{existiert.}$$

Bsp.: $f(x,y) = yx^3 + y^3 + 2x \qquad f_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3yx^2 + 2$

Richtungsableitung:

Die Richtungsableitung gibt die Rate an in der sich eine Funktion in einem gegeben Punkt in eine gegebene Richtung ändert.

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + t \cdot v) - f(\mathbf{x})}{t} = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \cdot v$$

Bsp.: $f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad v = (1,1) \qquad x = (1,1)$

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{4}}$$

Gradient:

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f: D \to \mathbb{R}$ eine total differenzierbare Funktion. Dann heißt der Vektor

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix} \quad \text{Gradient von } f.$$

Bsp.: $f(x) = 3x^2 + 4y$

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 6x \\ 4 \end{pmatrix}$$

5)(8 P.) 1) Wie lautet die Taylorreihenentwicklung einer unendlich oft differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (mit Anschlussstelle x_0)?

2) Wie lautet das Taylorsche Näherungspolynom zweiten Grades einer Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (mit Anschlussstelle (x_0, y_0))?

1) $$T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n$$

2) $$T(x,y) = f(x_0,y_0) + \left(f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)\right) + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right) + R_n$$

5)(8 P.) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Was versteht man unter (i) der Beschränktheit von f, (ii) einer Zerlegung Z von $[a, b]$ und der Feinheit von Z, (iii) der Obersumme von f über $[a, b]$? Wie lautet das Riemannsche Integrabilitätskriterium?

(1) Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt beschränkt, wenn es eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle $x \in [a, b]$ gilt, dass $|f(x)| \leq M$.

(2) Eine Zerlegung Z von $[a, b]$ ist eine endliche Folge von Punkten $x_0, \dots, x_n$ sodass $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Diese Punkte unterteilen das Intervall in kleinere Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$.
Die Länge des größten solchen Teilintervalls wird als die Feinheit bezeichnet.

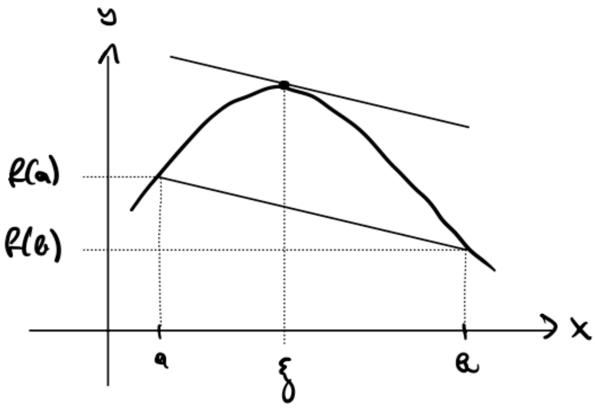
(3) Die Obersumme über einer Funktion f und einer Zerlegung Z ist definiert als die Summe der Produkte aus der Länge jedes Teilintervalles und dem maximalen Funktionswert in diesem Teilintervalle.

Riemannsches Integrabilitätskriterium.

Eine auf dem Intervall $[a, b]$ beschränkte Funktion f ist genau dann intergrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z von $[a, b]$, dass die zugehörige Obersumme $O_Z(f)$ und Untersumme $U_Z(f)$ die Ungleichung

$$O_Z(f) - U_Z(f) < \varepsilon \text{ gilt.}$$

4)(8 P.) Formulieren Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung und illustrieren Sie ihn durch eine Skizze.
(Der Zusammenhang zwischen Skizze und Aussage des Satzes muss genau erklärt werden!)



Sei f auf dem abgeschlossenen Intervall [a, b] stetig und auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar. Dann gibt es einen Punkt $\xi \in (a, b)$, so dass

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Es gibt also mindestens eine Stelle ξ, wo die Tangente parallel zur Geraden ist die (a, f(a)) und (b, f(b)) verbindet.

5)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Definieren Sie die Begriffe "relatives Maximum (Minimum)" und "absolutes Maximum (Minimum)" von f. Geben Sie weiters je eine notwendige und eine hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines relativen Extremums von f an. Prüfen Sie, ob die Funktion $f(x, y) = 3xy + y^3 - 10x - 5y$ im Punkt $(3, 1)$ ein relatives Extremum besitzt.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f\ U \to \mathbb{R}$. Die Funktion f besitzt an der Stelle $x_0 \in D$ ein relatives Maximum (bzw. Minimum), wenn es eine Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ gibt, so dass für alle $x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D$ gilt: $f(x) < f(x_0)$ (bzw. $f(x) > f(x_0)$).

Eine Stelle x_0 heißt absolutes Maximum (bzw. Minimum) von f, falls diese Ungleichung für alle $x \in D$ gilt.

Notwendige Bedingung:

Falls die partiellen Ableitungen erster Ordnung existieren müssen diese beide Null sein.
Also $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Hinreichende Bedingung:

Es handelt sich um ein relatives Extremum falls die Determinante der Hesse-Matrix positiv ist, und abhängig ob die zweiten partiellen Ableitungen negativ oder positiv sind handelt es sich um ein Maximum oder Minimum.

$f(x,y) = 3xy + y^3 - 10x - 5y \qquad P(3,1)$

$f_x = \frac{df}{dx}(x,y) = 3y - 10 \qquad f_x(3,1) = 3 \cdot 1 - 10 = -7$

$f_y = \frac{df}{dy}(x,y) = 3x + 3y^2 - 5 \qquad f_y(3,1) = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 1^2 - 5 = 1$

Da $f_x(3,1)$ und $f_y(3,1)$ nicht beide Null sind kann $P(3,1)$ kein relatives Extremum sein.

4)(8 P.) Wie kann man eine Funktion $f(x)$ mit Hilfe des Satzes von Taylor quadratisch approximieren. Sei $T(x)$ die quadratische Approximation von $f(x)$. Geben Sie einen exakten Ausdruck für den Fehler $f(x)-T(x)$ an. Bestimmen Sie für $x = 1/2$ eine obere Schranke für $|f(x)-T(x)|$ an, falls (a) $f(x) = \ln \frac{1}{1-x}$ bzw. (b) $f(x) = e^x$.

(1) $T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$

(2) $R_2(x) = f(x) - T_2(x)$

$R_2 = \frac{f'''(\xi)}{6}(x-x_0)^3$

(3) $x = \frac{1}{2} \quad x_0 = 0 \qquad \mathring{I} = (0, \frac{1}{2})$

(a) $f(x) = \ln(\frac{1}{1-x})$

$f'(x) = (1-x)(-\frac{1}{(1-x)^2}) = -\frac{1}{1-x}$

$f''(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

$f'''(x) = -\frac{1}{(1-x)^3} \qquad R_2 = -\frac{1}{6\cdot(1-\xi)^3} \cdot \frac{1}{8} = -\frac{1}{48(1-\xi)^3}$

$\xi = \frac{1}{2}$ Fehler : $\left|-\frac{1}{6}\right| = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$

$|f(\frac{1}{2}) - T_2(\frac{1}{2})| \leq \frac{1}{6}$

(b) $f'''(x) = e^x \qquad R_2 = \frac{e^\xi}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{e^\xi}{48}$

$\xi = \frac{1}{2}$ Fehler : $\left|\frac{\sqrt{e}}{48}\right|$

$|f(\frac{1}{2}) - T_2(\frac{1}{2})| \leq \frac{\sqrt{e}}{48}$

4)(8 P.) Was versteht man unter einer stetigen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$? Wie lautet der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen?

Gegeben sei die Erdoberfläche E, und wir nehmen an, dass die Lufttemperatur eine stetige Funktion $T : E \to \mathbb{R}$ des Ortes ist. Für $x \in E$ bezeichnen wir mit $\bar{x}$ den zu x antipodalen Punkt (d.h. auf der Erdoberfläche liegen x und $\bar{x}$ genau gegenüber). Beweisen Sie, dass es mindestens ein Paar antipodaler Punkte mit derselben Lufttemperatur gibt! Hinweis: Betrachten Sie einen Großkreis G von E und die Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto T(x) - T(\bar{x})$. Ist diese Funktion stetig? (Warum?) Benützen dann den Zwischenwertsatz.

Da $T(x)$ stetig und $T(\bar{x})$ stetig ist f auch stetig.

Zu zeigen f besitzt Nullstelle

Man wähle $x_0 \in G$ beliebig, so können 3 Fälle eintreten:

1. $T(x_0) - T(\bar{x_0}) = 0$
2. $f(x_0) = T(x_0) - T(\bar{x_0}) > 0$: Dann folgt $f(\bar{x_0}) < 0$
   Dann folgt durch den Zwischenwertsatz das es im Intervall $[x_0, \bar{x_0}]$ eine Nullstelle geben muss.
3. das gleiche wie 2.

5)(8 P.) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und f eine auf $\mathbb{R}$ definierte, reellwertige Funktion. Was bedeuten die folgenden mathematischen Aussagen?

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1, \qquad \lim_{x\to 2} f(x) = 3, \qquad f(x) \text{ ist stetig an der Stelle } x = 6.$$

Geben Sie eine verbale Beschreibung und eine formal exakte Definition an!

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

Der Grenzwert der Folge für $n \to \infty$ konvergiert gegen 1. Je größer der Wert von n wird, desto näher kommt der Wert der Folge an 1.

Def:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : n > N(\varepsilon) | a_n - a| < \varepsilon$

Die Werte von a_n liegen innerhalb eines beliebig kleinen Abstands ε um 1, wenn n hinreichend groß ist.

b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$

Der Grenzwert der Funktion $f(x)$ strebt gegen 3, wenn sich x der Zahl 2 nähert. Dies impliziert aber nicht das $f(2) = 3$ sein muss, sondern das die Werte von $f(x)$ nahe bei 3 liegen wenn x nahe bei 2 ist

Def.:

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ besitzt an der Stelle x_0 den Grenzwert c $(c \in \mathbb{R})$, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ mit $x_n \neq x_0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ folgt, das $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_0) = c$.

Man schreibt dann $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$.

c) $f(x)$ ist stetig an der Stelle $x = 6$

Die Funktion hat an der Stelle $x = 6$ keine Sprünge oder Unterbrechungen

Def.:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) = \delta > 0 : (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$

4)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, deren partielle Ableitungen bis inklusive zweiter Ordnung existieren und stetig sind. Wie kann f mit Hilfe des Satzes von Taylor im Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ linear approximiert werden? Was versteht man unter der Hesse-Matrix $H_f(a, b)$? Wie hängt $H_f(a, b)$ mit f und der linearen Approximation von f im Punkt (a, b) zusammen? Angenommen, $H_f(a, b)$ sei positiv definit, und es gelte $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$. Warum hat dann f an der Stelle (a, b) ein lokales Minimum?

(1) $f(x,y) \approx f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$

Hierbei sind f_x und f_y jeweils die partiellen Ableitungen nach x bzw. y im Punkt (a,b).

(2) Die Hesse-Matrix $H_f(a,b)$ ist die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen:

$$H_f(a,b) = \begin{bmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{bmatrix}$$

(3) Hesse-Matrix gibt die Krümmung im Punkt (a,b) an.

(4) Wenn die Matrix positiv definit ist das Skalarprodukt mit dieser Matrix immer positiv.

Extremwerte (3 Bsp)

2)(8 P.) Bestimmen Sie alle relativen Extrema und alle Sattelpunkte der Funktion

$$f(x,y) = \cos(x^2+2y) + x^2.$$

Bemerkung: Eine symmetrische 2×2-Matrix ist genau dann indefinit, wenn ihre Determinante negativ ist.

0 π

Partielles Differenzieren:

$$f_x(x,y) = -\sin(x^2+2y)\cdot 2x + 2x$$
$$f_y(x,y) = -2\sin(x^2+2y)$$

Ableitungen Null setzen:

$$f_x' = -\sin(x^2+2y)\cdot 2x + 2x = 0$$
$$2x(1-\sin(x^2+2y)) = 0 \implies 2x = 0, \quad x = 0$$

$$f_y = -2\sin(x^2+2y) = 0$$
$$\underline{\underline{\sin(x^2+2y) = 0}}$$

$\Rightarrow$ einsetzen

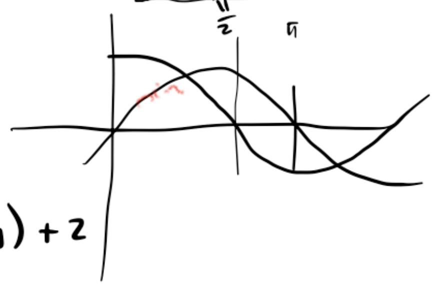
$$\sin(2y) = 0 \implies y = 0, \quad y = \frac{\pi}{2}$$

$\frac{3\pi}{2}$

$\left(0, \frac{n\cdot\pi}{2}\right)$ für $n \in \mathbb{Z}$

$\underline{\underline{(0/0)}}, \underline{\underline{\left(0, \frac{\pi}{2}\right)}}$

$\underline{\underline{\sin(x^2+2y) = 1}}$



Zweite Ableitungen:

$$f_{xx}(x,y) = -2\sin(x^2+2y) - 4x^2\cos(x^2+2y) + 2$$
$$f_{xy}(x,y) = -4x\cos(x^2+2y)$$
$$f_{yy}(x,y) = -4\cos(x^2+2y)$$

Hesse Matrix:

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

für $(0/0)$
$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$
-8
$\Rightarrow$ Sattelpunkt

für $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$
8
$\Rightarrow$ relatives Minimum

2)(8 P.) Bestimmen Sie alle relativen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20.$$

$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$

$f_x(x,y) = 3x^2 - 3$

$f_y(x,y) = 3y^2 - 12$

$f_{xx}(x,y) = 6x$

$f_{yy}(x,y) = 6y$

$f_{xy}(x,y) = 0$

$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$3y^2 - 12 = 0 \Rightarrow y = \pm 2$

$P_1(1|2) \quad P_2(1|-2)$

$P_2(-1|2) \quad P_3(-1|-2)$

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix}$$

P_1: $H_f(P_1) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$ $\det H_f(P_1) = 6 \cdot 12 = 72 \Rightarrow$ relatives Minimum.

P_2: $H_f(P_2) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$ $\det H_f(P_2) = -72 \Rightarrow$ Sattelpunkt

P_3: $H_f(P_3) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$ $\det H_f(P_3) = -72 \Rightarrow$ Sattelpunk

P_4: $H_f(P_4) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$ $\det H_f(P_4) = 72 \Rightarrow$ relatives Maximum

1)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = e^x(x^3 - 5x^2 + 7x + y^2 - 7)$. Bestimmen Sie alle relativen Extrema (Lage und Art des Extremums) von f!

$$f(x,y) = e^x(x^3 - 5x^2 + 7x + y^2 - 7)$$

$$f_x(x,y) = e^x(x^3 - 5x^2 + 7x + y^2 - 7) + e^x(3x^2 - 10x + 7)$$

$$= e^x(x^3 - 2x^2 - 3x + y^2)$$

$$f_y(x,y) = e^x \cdot 2y = 2 \cdot e^x y$$

Null setzen

$$2 \cdot e^x \cdot y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$e^x(x^3 - 2x^2 - 3x + y^2) = 0$$

$$e^x(x^3 - 2x^2 - 3x) = 0 \quad \Rightarrow e^x \text{ kann nicht } 0 \text{ sein}$$

$$x^3 - 2x^2 - 3x = 0$$

$$x(x^2 - 2x - 3) = 0$$

$$x(x+1)(x-3) = 0 \quad \Rightarrow x = 0,\ x = -1,\ x = 3$$

Potentielle Punkte $(0,0), (-1,0), (3,0)$

$$f_{xx}(x,y) = e^x(x^3 + x^2 - 7x + y - 3)$$

$$f_{xy}(x,y) = 2e^x y$$

$$f_{yy}(x,y) = 2 \cdot e^x$$

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

$(0,0)$: $H_f(0,0) = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\det H_f(0,0) = -6 < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

$(-1,0)$: $H_f(-1,0) = \begin{bmatrix} \frac{4}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{bmatrix}$ $\det H_f(-1,0) = \frac{8}{e^2}$, $f_{xx}(-1,0) > 0$ $\Rightarrow$ Minimum

$(3,0)$: $H_f(3,0) = \begin{bmatrix} 12e^3 & 0 \\ 0 & 2 \cdot e^3 \end{bmatrix}$ $\det H_f(3,0) = 24e^6$, $f_{xx}(3,0) > 0$ $\Rightarrow$ Minimum

Funktionen (6 Bsp)

1)(8 P.) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^3 y}{x^6+y^2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

1) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f in Richtung $(1,2)$ im Punkt $(0,0)$.
2) Berechnen Sie $\lim_{t\to 0} f(t,t^3)$.
3) Bestimmen Sie die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f \text{ ist stetig an der Stelle } (x,y)\}$.

$v = (1,2)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t\cdot(1,2)) - f(0,0)}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3\cdot 2t}{t^6+4t^2} - 0}{\frac{t}{1}} = \frac{2t^4}{t^7+4t^3} = \underline{\underline{0}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^3 y)\cdot(x^6+y^2)^{-1} = \frac{3x^2\cdot y}{x^6+y^2} - \frac{x^3\cdot y\cdot 6x^5}{(x^6+y^2)^2} =$$

$u'v+v'u$

$$= \frac{3x^2\cdot y}{x^6+y^2} - \frac{6x^8\cdot y}{(x^6+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x^3 y)\cdot(x^6+y^2)^{-1} = \frac{x^3}{x^6+y^2} - \frac{2x^3y^2}{(x^6+y^2)^2}$$

$u' = x^3$
$v' = -\frac{2y}{(x^6+y^2)^2}$

BS mit $\operatorname{grad} f(x)\cdot v$

2) $$\lim_{t \to 0} f(t, t^3) = \lim_{t \to 0} \frac{t^3 t^3}{t^6 + t^6} = \lim_{t \to 0} \frac{t^6}{2t^6} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

3) Da wir in (2) schon herausgefunden haben das f für $y = t^3$ und $x = t$ nicht stetig am Ursprung ist ergibt sich folgende Menge:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \neq (0,0)\}$$

3)(8 P.) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{falls } x \le 0, \\ x + \frac{2\log(1+x)}{x} & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob f an der Stelle $x = 0$ stetig und differenzierbar ist, und berechnen Sie gegebenenfalls $f'(0)$.

$$\lim_{x \to 0^+} \left(x + \frac{2 \cdot \ln(1+x)}{x} \right) = \lim_{x \to 0^+} \left(\overset{\nearrow 0}{x} \right) + \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{2 \cdot \ln(1+x)}{x} \right) =$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{2 \cdot \ln(1+x)}{x} \right) \to \text{L'Hopital} \to \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\frac{2}{1+x}}{\frac{1}{1}} \right) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{2}{1+x} \right) = \underline{\underline{2}}$$

$\Rightarrow$ stetig

$x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{2 - 2}{x - 2} = \underline{\underline{0}}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\left(x + \frac{2 \cdot \ln(x+1)}{x} \right)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} + \lim_{x \to 0^+} \frac{2 \cdot \ln(x+1)}{x^2}$$

$$\to \text{L'Hopital} \to 1 + 2 \cdot \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{2x} = 1 + \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2x(x+1)} =$$

$1 + \infty \Rightarrow$ nicht differenzierbar

2)(8 P.) Sei $f : [a,b] \to [a,b]$ eine auf dem ganzen Definitionsbereich stetige Funktion. Beweisen Sie, dass dann ein $x \in [a,b]$ existiert, für das $f(x) = x$ gilt.

Definieren wir eine Hilfsfunktion $g(x) = f(x) - x$, da $f(x)$ stetig ist und x stetig ist, muss auch $g(x)$ stetig sein. Nun müssen wir zeigen das $g(x)$ einen Nullpunkt hat, dies würde bedeuten das $f(x) = x$.

Betrachten wir nun $g(a)$ und $g(b)$:

$$g(a) = f(a) - a$$
$$g(b) = f(a) - b$$

Da $f : [a,b] \to [a,b]$ wissen wir das $f(a)$ und $f(b)$ auch in $[a,b]$ liegen. Jetzt haben wir zwei Fälle:

1. $f(a) = a$ oder $f(b) = b$: In diesem Fall haben wir direkt einen Fixpunkt gefunden.

2. $f(a) > a$ und $f(b) < b$: Denn ist $g(a) = f(a) - a > 0$ und $g(b) = f(b) - b < 0$. Da $g(x)$ stetig ist muss es auch ein $g(x) = 0$ geben womit es auch ein $f(x) = x$ geben muss.

3)(8 P.) Bestimmen Sie alle Punkte (x, y) auf dem Graphen der Funktion $f(x) = x^3$, für die die Tangente an den Graphen von f parallel zur Geraden $3x - 5y = 7$ ist, sowie die Gleichungen der Tangenten an diesen Punkten.

Steigung der Geraden bestimmen

$$3x - 5y = 7$$
$$5y = 3x - \frac{7}{5}$$
$$y = \frac{3}{5}x - \frac{7}{25}$$

$$\frac{\frac{7}{5}}{\frac{5}{1}} = \frac{7}{25}$$

$\Rightarrow$ Steigung $= \frac{3}{5}$

Ableitung von $f(x)$:

$$f'(x) = 3x^2$$

Gleichsetzen:

$$3x^2 = \frac{3}{5}$$
$$x = \sqrt{\frac{3}{15}} = \sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$x_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

y-Werte herausfinden

$$f(x_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^3 = \frac{1^3}{(\sqrt{5})^3} = \frac{1}{(5^{\frac{1}{2}})^3} = \frac{1}{5^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5^3}} = \underline{\underline{\frac{1}{5\cdot\sqrt{5}}}}$$
$$f(x_2) = -\frac{1}{5\sqrt{5}}$$

Punkte:

$$P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \,\middle|\, \frac{1}{5\sqrt{5}}\right) \qquad P_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \,\middle|\, -\frac{1}{5\sqrt{5}}\right)$$

Tangenten:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$t_1(x) = \frac{3}{5}x + \frac{22}{25\sqrt{5}} \qquad t_2(x) = \frac{3}{5}x - \frac{22}{25\sqrt{5}}$$

$$y - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{3}{5}\left(x - \frac{1}{5\sqrt{5}}\right)$$
$$y - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{3}{5}x - \frac{3}{25\sqrt{5}}$$
$$y = \frac{3}{5}x - \frac{3}{25\sqrt{5}} + \frac{25}{25\sqrt{5}}$$
$$y = \frac{3}{5}x + \frac{22}{25\sqrt{5}}$$

1)(8 P.) Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine Funktion, die für alle $x,y\in\mathbb{R}$ die Ungleichung $|f(x)-f(y)|\leq |x-y|^2$ erfüllt.

Zeigen Sie: a) f ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$. b) f ist eine konstante Funktion.

b)

$$|f(x)-f(y)| \leq |x-y|^2 \qquad / : |x-y|$$

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq |x-y| \qquad / \lim_{x\to y}$$

$$\lim_{x\to y}\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq \lim_{x\to y}|x-y|$$

$$|f'(y)| \leq 0 \longrightarrow \text{aus } |x|\leq 0 \Rightarrow x=0$$

$$f'(y) = 0$$

Da die erste Ableitung überall
für jedes $y\in\mathbb{R}$ $f'(y)=0$, so
muss $f(x)$ konstant sein.

a) Definition der Stetigkeit

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta=\delta(\varepsilon): (|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$$

Wir wählen einen beliebigen Punkt $x_0\in\mathbb{R}$
und $\delta(\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}$

$$|x-x_0| < \sqrt{\varepsilon}$$

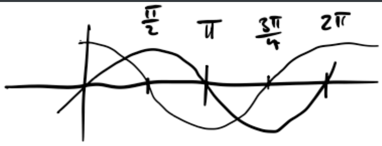
$$\Downarrow$$

$$|x-x_0|^2 < \varepsilon$$

$$\Downarrow \text{ aufgrund der Angabe}$$

$$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$$

Daher ist f stetig für alle $x\in\mathbb{R}$



1)(8 P.) Gegeben sei $f(x,y) = \frac{\ln(1+x^2)}{y} + y\sin(y)$ und der Punkt $P = (0,\pi)$. Weiters bezeichne n jene Niveaulinie von $f(x,y)$, die durch P geht.

a) Berechnen Sie grad$f$ im Punkt P.

b) Bestimmen Sie die Richtung von n im Punkt P, z.B. durch Angabe eines Richtungsvektors oder der Gleichung der Tangente an n durch P.

a) $f(x,y) = \frac{\ln(1+x^2)}{y} + y \cdot \sin(y)$

$$f_x(x,y) = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{(1+x^2)} \cdot 2x = \frac{2x}{y + x^2 y}$$

$$f_y(x,y) = -\frac{\ln(1+x^2)}{y^2} + \sin(y) + y\cos(y)$$

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} \frac{2x}{y+x^2y} \\ -\frac{\ln(1+x^2)}{y^2} + \sin(y) + y \cdot \cos(\pi) \end{pmatrix}$$

$$\text{grad } f(0,\pi) = \begin{pmatrix} \frac{0}{\pi + 0 \cdot \pi} \\ -\frac{0}{\pi^2} + 0 + \pi \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\pi \end{pmatrix}$$

b) Die Tangente an dieser Niveaulinie im Punkt P steht senkrecht zum grad $f(P)$.

Richtungsvektor $\underline{\underline{R = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}}}$.

Grenzwerte (4 Bsp)

3)(8 P.) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\ln x}\right)^{1/\ln x}.$$

Anleitung: Stellen Sie die Funktion mit Hilfe der Identität $f(x) = e^{\ln(f(x))}$ in der Form $e^{a(x)/b(x)}$ dar. Bestimmen Sie dann $c = \lim_{x\to\infty}\frac{a(x)}{b(x)}$. Der gesuchte Grenzwert ist dann e^c. (Warum gilt das?)

$$f(x) = \left(\frac{x}{\ln(x)}\right)^{\frac{1}{\ln(x)}} \qquad f(x) = e^{\ln(f(x))}$$

Exponent:

$$\ln\left(\left(\frac{x}{\ln(x)}\right)^{\frac{1}{\ln(x)}}\right) = \frac{1}{\ln(x)}\cdot\ln\left(\frac{x}{\ln(x)}\right) = \frac{1}{\ln(x)}\left(\ln(x) - \ln(\ln(x))\right)$$

$$= 1 - \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}$$

L'Hospital

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}\right) = 1 - \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}\right) = 1 - \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{x\ln(x)}}{\frac{1}{x}}\right) =$$

$$= 1 - \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\cdot\underbrace{\ln(x)}_{\infty}}\right)^{\nearrow 0} = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

Grenzwert: $e^1 = \underline{\underline{e}}$

2)(8 P.) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 0+} x^x$.

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(x)^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln(x)}$$

Exponent

$$x\cdot\ln(x) = \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \Rightarrow \text{L'Hospital} = \left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right) = -\frac{x^2}{x} = -x$$

$$\lim_{x\to 0+}(-x) = \underline{\underline{0}} \qquad e^0 = \underline{\underline{1}}$$

1)(8 P.) Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe $\sum_{n\geq 0}\frac{n+1}{(n+2)!}$.

$$\sum_{n\geq 0}\frac{n+1}{(n+2)!} = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{n=0}^{n}\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1!}-\cancel{\frac{1}{2!}}+\cancel{\frac{1}{2!}}-\cancel{\frac{1}{3!}}+\cancel{\frac{1}{3!}}-\cancel{\frac{1}{4!}}+\ldots+\cancel{\frac{1}{n!}}-\cancel{\frac{1}{(n+1)!}}+\cancel{\frac{1}{(n+1)!}}-\frac{1}{(n+2)!}\right)$$

$\Rightarrow$ Teleskopsumme

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1!}-\underbrace{\frac{1}{(n+2)!}}_{\to 0}\right) = \underline{\underline{1}}$$

3)(8 P.) Man berechne den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x+2^{-x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

$e^{\ln(f(x))}$

$$L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x+2^{-x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \quad / \ln$$

$$\ln(L) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{2^x+2^{-x}}{2}\right)$$

$$\frac{d}{dx}2^x = \frac{d}{dx}e^{\ln(2)x} = e^{\ln(2)\cdot x}\cdot\ln(2) = 2^x\cdot\ln(2)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2^x+2^{-x}}{2}\right)}{x}$$

$\Rightarrow$ L'Hospital

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{2}}{2^x+2^{-x}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\left(2^x\cdot\ln(2) - 2^{-x}\ln(2)\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2^x\cdot\ln(2) - 2^{-x}\cdot\ln(2)}{(2^x+2^{-x})} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(2)(2^x-2^{-x})}{2^x+2^{-x}} = 0$$

$$\ln(L) = 0$$

$$L = e^0 = \underline{\underline{1}}$$

Folgen und Reihen (10 Bsp)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \overset{\nearrow \infty}{2n} = \frac{2n}{4n^2+4n+1} = \frac{n^2\left(\frac{2}{n}\right)}{n^2\left(4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{0}{4} = \underline{\underline{0}}$$

$$0 < a_n < \frac{2n}{(2n+1)^2}$$

2)(8 P.) Gegeben ist die Folge

$$a_n = \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+4)^2} + \frac{1}{(2n+9)^2} + \frac{1}{(2n+16)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+4n^2)^2}$$

1) Schreiben Sie die Folge kompakter in der Form $a_n = \sum_{?}^{?} ?$ auf, in dem Sie die Fragezeichen durch passende Ausdrücke ersetzen!

2) Beweisen Sie, dass die Folge konvergiert, und bestimmen Sie $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. $= 0$

3) Zeigen Sie weiters, dass $a_n - a = O\left(\frac{1}{n}\right)$. $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$

1) $$a_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{(2n+k^2)^2}$$

$\rightarrow$ Quotienten kriterium

2) Jeder Term der Funktion ist positiv und wird mit wachsendem n kleiner
$\Rightarrow$ deutet auf monoton fallend hin
Sie ist auch nach oben beschränkt da jeder Term kleiner ist als $\frac{1}{(2n)^2}$ und es $2n$ Folgenglieder gibt. $\Rightarrow$ die Summe ist kleiner als $2n \cdot \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{2n}$, was gegen 0 konvergiert wenn $n \to \infty$
$\Rightarrow$ Folge konvergiert.

$$a_k = \frac{1}{(2n+k^2)^2}$$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\frac{1}{(2n+(k+1)^2)^2}}{\frac{1}{(2n+k^2)^2}}\right|$$

3)

$$\left| \frac{\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{(2n+k^2)^2}}{\frac{1}{n}} \right| \leq C$$

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{n}{(2n+k^2)^2} \leq \frac{2n^2}{(2n+1)^2} \leq C$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{(2n+1)^2} = \frac{2n^2}{4n^2+4n+1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \checkmark$$

Da ein $C = \frac{1}{2}$ exisitiert gilt $a_n - a = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

1)(8 P.) Untersuchen Sie mit Hilfe eines geeigneten Konvergenzkriteriums, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe $\sum_{n\geq 0} \frac{3^{3n}x^n}{n^2+1}$ konvergiert. Beachten Sie, dass jene Stellen, wo das von Ihnen gewählte Konvergenzkriterium versagt, gesondert untersucht werden müssen!

$$\sum_{n\geq 0} \frac{3^{3n} x^n}{n^2+1} = \sum_{n\geq 0} \frac{27^n x^n}{n^2+1}$$

$$a_n = \frac{3^{3n} x^n}{n^2+1} > \frac{3^{3n} x^n}{(n+1)(n-1)}$$

$$\left| \frac{\frac{3^{3n+3} \cdot x^{n+1}}{(n+2)\, n}}{\frac{3^{3n} x^n}{(n+1)(n-1)}} \right| = \left| \frac{3^{3n+3} \cdot x^{n+1}\, (n+1)(n-1)}{3^{3n} x^n \, (n+2)\, n} \right| =$$

$$\left| \frac{27^{\cancel{n}+1} \cdot x^{\cancel{n}+1} \cdot (n^2+2n+2)}{\cancel{27^n} \cdot \cancel{x^n} \cdot (n^2+1)} \right| = \left| \frac{27x \cdot (n^2+2n+2)}{n^2+1} \right|$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{27x(n^2+2n+2)}{n^2+1} \right| = \left| \frac{27x(\cancel{n^2}(1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}))}{\cancel{n^2}(1+\frac{1}{n^2})} \right| = \underline{\underline{|27x|}}$$

wenn $-\frac{1}{27} < x < \frac{1}{27}$ dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n\geq 0} \frac{27^n x^n}{n^2+1} = \sum_{n\geq 0} \frac{(27x)^n}{n^2+1}$$

für $x = \frac{1}{27}$:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2+1} \leqslant \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$\Rightarrow$ konvergiert

für $x = -\frac{1}{27}$:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2+1} \cdot (-1)^n$$

Leibniz-Kriterium

$\frac{1}{n^2+1} \Rightarrow$ Monoton fallende Nullfolge

$a_{n+1} < a_n$

$\Rightarrow$ konvergiert

Es konvergiert für $x \in [-\frac{1}{27}; \frac{1}{27}]$.

1)(8 P.) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \qquad a_n = \frac{1}{n!}$$

Für welche komplexen Zahlen x ist diese Reihe konvergent?

Hinweis: Die Stirling'sche Formel lautet $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$, wobei e die Eulersche Zahl $e \approx 2,71828\ldots$ bezeichnet. Außerdem gilt: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}} = \sqrt[n]{\frac{1}{\frac{n^n}{e^n}\cdot\sqrt{2\pi n}}} = \sqrt[n]{\frac{e^n}{n^n\cdot\sqrt{2\pi n}}} =$$

$$\frac{e}{n\cdot\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}}} = \frac{e}{n\cdot\sqrt[2n]{2\pi n}} = \frac{e}{n\cdot\underbrace{\sqrt{\sqrt[n]{n}}}_{\to 1}\cdot\sqrt[2n]{2\pi}} = \frac{e}{\underbrace{n}_{\to\infty}\cdot\underbrace{\sqrt[2n]{2\pi}}_{\to 1}} = \underline{\underline{0}}$$

$$r = \frac{1}{0} = \infty$$

Deswegen konvergiert es für alle $x \in \mathbb{C}$

3)(8 P.) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{2^{2n}x^n}{n^2}$ für $|x| < 1/4$ konvergiert und für $|x| > 1/4$ divergiert! Wie verhält sich die Reihe bei $x = 1/4$ bzw. bei $x = -1/4$?

$$a_n = \frac{2^{2n} x^n}{n^2} = \frac{4^n x^n}{n^2}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\left(\frac{4^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)^2}\right)}{\left(\frac{4^n x^n}{n^2}\right)}\right| = \left|\frac{\cancel{4^{n+1}} \cdot \cancel{x^{n+1}} \cdot n^2}{\cancel{4^n}\cancel{x^n}(n+1)^2}\right| = \left|\frac{4 \cdot x \cdot n^2}{n^2+2n+1}\right|$$

$$\lim_{x\to\infty} \left|\frac{4\cdot x\cdot \cancel{n^2}}{\cancel{n^2}(1+\underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0})}\right| = \underline{\underline{|4x|}}$$

wenn $-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}$ dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n\geq 1} \frac{2^{2n}x^n}{n^2} = \sum_{n\geq 1}\frac{4^n x^n}{n^2} = \sum_{n\geq 1}\frac{(4x)^n}{n^2}$$

für $x = \frac{1}{4}$:

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^2} = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{6}}}$$

Euler

$\Rightarrow$ konvergiert

für $x = -\frac{1}{4}$

$$\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^2}\cdot(-1)^n$$

Leibniz Kriterium?

$$a_{n+1} < a_n$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$$

$$n^2 < (n+1)^2$$

$$n^2 < n^2+2n+1 \quad /-n^2$$

$$-\frac{1}{2} < n \checkmark$$

Alternierende Reihe mit einer $(a_n)_{n\geq 0}$ fallenden Nullfolge

$\Rightarrow$ konvergiert.

3)(8 P.) Gegeben ist die Folge

$$a_n = \frac{1}{(3n+1)^2} + \frac{1}{(3n+3)^2} + \frac{1}{(3n+5)^2} + \cdots + \frac{1}{(3n+2n+1)^2}$$

(1) Schreiben Sie die Folge kompakter in der Form $a_n = \sum_{?}^{?} ?$ auf, in dem Sie die Fragezeichen durch passende Ausdrücke ersetzen!

(2) Beweisen Sie, dass die Folge konvergiert und bestimmen Sie $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

(3) Zeigen Sie weiters, dass $a_n - a = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

(1) $$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(3n+2k+1)^2}$$

(2) Majorantenkriterium:

Die Reihe ist von unten mit 0 beschränkt da alle Terme positiv sind, des weiteren wird jedes Folgenglied kleiner

$$a_n = \frac{1}{(3n+2k+1)^2} \qquad 0 \leq a_n \leq \frac{1}{(3n+1)^2} \cdot n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(3n+1)^2} = \frac{n}{9n^2+6n+1} = \frac{\cancel{n^2}\left(\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n^2}\left(9+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{0}{9} = \underline{\underline{0}}$$

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\underline{0}}$$

(3) $$a_n - a = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\left| \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(3n+1+2k)^2}}{\frac{1}{n}} \right| \leq C \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(3n+1+2k)^2} \leq \frac{n^2}{(3n+1)^2} \leq C$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(3n+1)^2} = \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}\left(9+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \underline{\frac{1}{9}}$$

Da ein $C = \frac{1}{9}$ existiert, gilt $a_n - a = O\left(\frac{1}{n}\right)$

2)(8 P.) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen. Beweisen Sie mit Hilfe eines indirekten Beweises, dass aus $a_n \le b_n$ immer $\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$ folgt. Stimmt diese Behauptung immer noch, wenn die beiden $\le$ durch $<$ ersetzt werden (Beweis oder Gegenbeispiel)?

1) Wenn $a_n \le b_n$ dann folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Indirekter Beweis:

Nehmen wir das Gegenteil der zu beweisenden Aussage $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ dann existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass $a_n > b_n + \varepsilon$ für unendlich viele n.

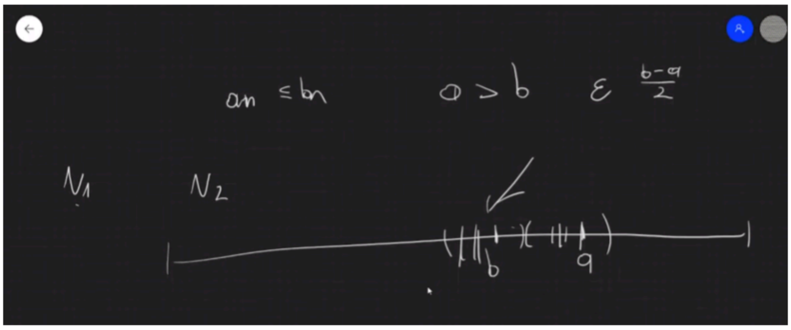
Dies steht jedoch im Widerspruch zu unserer Voraussetzung das $a_n \le b_n$ für alle n. $\Rightarrow$ Annahme ist falsch

Daher muss $\lim\limits_{n\to\infty} \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ sein.

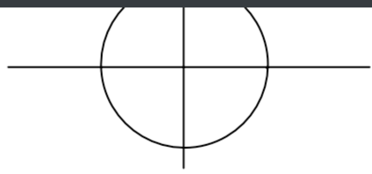
Gegenbeispiel

$$\frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1} \rightarrow \text{jedes Folgenglied ist kleiner}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+2}\right) \not< \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right) \rightarrow \text{beide gehen gegen } \underline{\underline{0}}.$$

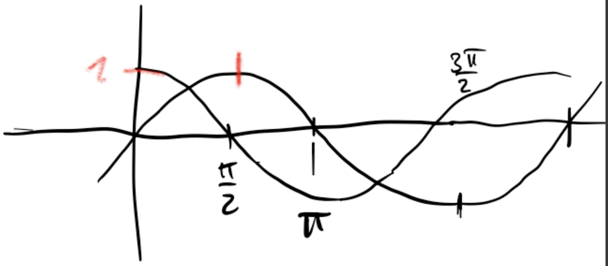


1)(8 P.) Gegeben ist die Folge



$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{\sqrt{n}\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\sqrt{n+\cos(n\pi)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

(a) Bestimmen Sie alle eigentlichen und uneigentlichen Häufungspunkte dieser Folge.
(b) Beweisen Sie auch, dass ausser den in (a) gefundenen Häufungspunkten keine weiteren gibt.



$$a_n = \frac{\sqrt{n}\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\sqrt{n+\cos(n\pi)}}$$

a)

$$a_{4n} = \frac{\sqrt{4n}\cdot\sin(n2\pi)}{\sqrt{4n+\cos(n4\pi)}} = 0$$

$$a_{4n+1} = \frac{\sqrt{4n+1}\cdot\sin(n2\pi+\frac{\pi}{2})}{\sqrt{4n+1+\cos(2n2\pi+\pi)}} = \frac{\sqrt{4n+1}}{\sqrt{4n}}$$

$$a_{4n+2} = \frac{\sqrt{4n+2}\cdot\sin(n2\pi+\pi)}{\sqrt{4n+2+\cos(2n2\pi+2\pi)}} = 0$$

$$a_{4n+3} = \frac{\sqrt{4n+3}\cdot\sin(n2\pi+\frac{3\pi}{2})}{\sqrt{4n+3+\cos(2n2\pi+3\pi)}} = -\frac{\sqrt{4n+3}}{\sqrt{4n+2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_{4n}) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_{4n+1}) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_{4n+2}) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_{4n+3}) = -1$$

(b) Die Teilfolgen decken alles ab $\Rightarrow$ keine anderen Häufungpunkte

2)(8 P.) Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n}, \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}.$$

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2n}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(n+1)^2+1}{2^{n+1}}}{\frac{n^2+1}{2^n}}\right| = \left|\frac{\cancel{2^n}\cdot(n^2+2n+2)}{2^{n+1}(n^2+1)}\right| = \left|\frac{\cancel{n^2}(1+\underbrace{\tfrac{2}{n}}_{\to 0}+\underbrace{\tfrac{2}{n^2}}_{\to 0})}{\cancel{n^2}(2+\underbrace{\tfrac{2}{n^2}}_{\to 0})}\right| = \left|\frac{1}{2}\right|$$

$\Rightarrow$ konvergiert

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$

Leibnitz-Kriterium

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot (-1)^n$ Ist a_n eine monoton fallende Nullfolge, so konvergiert sie. Wenn sie alterniert.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = \frac{\cancel{n^2}(\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\to 0})}{\cancel{n^2}(1+\underbrace{\tfrac{1}{n^2}}_{\to 0})} = \frac{0}{1} = \underline{\underline{0}}$$

Da der Wert im Nenner viel schneller anwächst, ist sie monoton fallend.

$\Rightarrow$ konvergiert.

2)(8 P.) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ für $|x| < 1$ konvergiert und für $|x| > 1$ divergiert! Wie verhält sich die Reihe bei $x = 1$ bzw. bei $x = -1$?

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \qquad a_n = \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\left(\frac{\frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{x^n}{\sqrt{n}}}\right)\right| = \left|\frac{x^{\cancel{n+1}}\cdot\sqrt{n}}{\cancel{x^n}\cdot\sqrt{n+1}}\right| = |x|\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = |x|\cdot\sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} |x|\cdot\sqrt{\frac{n}{n+1}} = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{0}}} = |x|\cdot\lim\sqrt{\frac{1}{1}} = \underline{\underline{|x|}}$$

Potenzreihe konvergiert für $|x| < 1$

Für $x = 1$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

p-Reihen Test:

Für Reihen der Form $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^p}$ mit $p > 0$

konvergiert sie für $p > 1$

divergiert sie für $0 < p < 1$

$\Rightarrow$ divergiert.

Für $x = -1$:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot(-1)^n$$

Leibniz-Kriterium.

Alternierende Reihen $\sum_{n\geq 1} a_n\cdot(-1)^n$ konvergieren, falls

a_n eine positive ✓

monoton fallende ✓

Nullfolge ist ✓

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \underline{\underline{0}}$$

$\Rightarrow$ konvergiert

Konvergenzintervall ist

$-1 \leq x < 1$

Integrieren und Differenzieren (8 Bsp)

2)(8 P.) a) Beweisen Sie mit Hilfe der Differentialrechung, dass für alle $x > 0$ die Ungleichung $\ln(x) < \frac{x}{2}$ gilt.
Hinweis: Wo ist die Differenz der beiden Seiten der beiden Seiten der Ungleichung minimal?

b) Leiten Sie aus a) die folgende Ungleichung her:
Für alle positiven natürlchen Zahlen n gilt $\ln(n) < \sqrt{n}$.

c) Benutzen Sie b), um die Konvergenz der Folge $a_n = \frac{\ln n}{n}$ zu zeigen, indem Sie zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein passendes $N(\varepsilon)$ angeben.

a) $\ln(x) < \frac{x}{2}$

$0 < \frac{x}{2} - \ln(x) \Rightarrow g(x) = \frac{x}{2} - \ln(x)$

$g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x}$ $\qquad g''(x) = \frac{1}{x^2}$

$g'(x) = 0$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{x} = 0$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{x}$

$2 = x$ $\qquad g''(2) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} > 0$

$\Rightarrow$ Minimum

$g(2) = \frac{2}{2} - \ln(2) = 1 - \ln(2) > 0$

$g(x) > 0 \quad \forall x > 0 \Rightarrow \ln(x) > \frac{x}{2}$ ✓

b) $\ln(x) < \frac{x}{2} \qquad \Rightarrow x = \sqrt{n}$

$\ln(\sqrt{n}) < \frac{\sqrt{n}}{2}$

$\ln(n^{\frac{1}{2}}) < \frac{\sqrt{n}}{2}$

$\frac{1}{2} \cdot \ln(n) < \frac{\sqrt{n}}{2} \qquad / \cdot 2$

$\ln(n) < \sqrt{n}$ ✓

c) Konvergenz $a_n = \frac{\ln(n)}{n}$

aus (b) $\ln(n) < \sqrt{n} \quad /:n$

$$\frac{\ln(n)}{n} < \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n} = n^{\frac{1}{2}-1} = n^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{\ln(n)}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Sandwich-Theorem:

$$0 < \frac{\ln(n)}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = \underline{\underline{0}}$$

Um zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ ein passendes $N(\varepsilon)$ zu finden, so dass für alle $n \geq N(\varepsilon)$ gilt, dass $\left|\frac{\ln(n)}{n}\right| < \varepsilon$, können wir folgendes machen:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

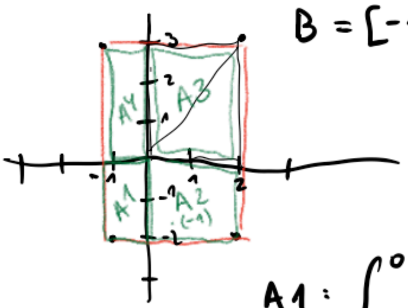
$$1 < \varepsilon \cdot \sqrt{n}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < \sqrt{n} \quad /^2$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{\varepsilon^2} < n}}$$

$$\underline{\underline{N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rceil}}$$

1)(8 P.) Berechnen Sie das Bereichsintegral $\iint_B |xy| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, wobei der Bereich B das Rechteck in der (x, y)-Ebene mit den Eckpunkten $(-1, -2), (-1, 3), (2, 3)$ und $(2, -2)$ bezeichnet.



$B = [-1, 2] \times [-2, 3]$

$$\iint_B |xy| \, dx \, dy$$

$$A1: \int_{-2}^{0} \int_{-1}^{0} xy \, dx \, dy = -\frac{1}{2} \int_{-2}^{0} y \, dy = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2) = \underline{\underline{1}}$$

$$A2: -\int_{-2}^{0} \int_{0}^{2} xy \, dx \, dy = -2 \int_{-2}^{0} y \, dy = (-2) \cdot (-2) = \underline{\underline{4}}$$

$$A3: \int_{0}^{3} \int_{0}^{2} xy \, dx \, dy = 2 \int_{0}^{3} y \, dy = 2 \cdot \frac{9}{2} = \underline{\underline{9}}$$

$$A4: -\int_{0}^{3} \int_{-1}^{0} xy \, dx \, dy = \frac{1}{2} \int_{0}^{3} y \, dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} = \underline{\underline{\frac{9}{4}}}$$

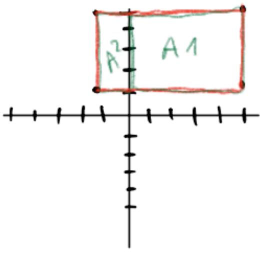
$$\int_{-1}^{0} x \, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^{0} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}} \qquad \int_{-2}^{0} y \, dy = \frac{y^2}{2} \Big|_{-2}^{0} = -2$$

$$\int_{0}^{2} x \, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{0}^{2} = \underline{\underline{2}} \qquad \int_{0}^{3} y \, dy = \frac{y^2}{2} \Big|_{0}^{3} = \frac{9}{2}$$

$$14 + \frac{9}{4} = 16{,}25$$

$$\int_{-2}^{3} \int_{-1}^{2} |x \cdot y| \, dx \, dy = \underline{\underline{16{,}25}}$$

1)(8 P.) $\iint_B(|x|y + x^2 - y^2)\,dx\,dy$, wobei $B \subset \mathbb{R}^2$ der Rechtecksbereich sei, welcher durch die Eckpunkte $(-1,1)$, $(5,1)$, $(5,5)$ und $(-1,5)$ bestimmt ist.



$B = [-1,5] \times [1,5]$

$$\iint_B (|x|y + x^2 - y^2)\,dx\,dy$$

$$\int_1^5\left(\int_{-1}^5 (|x|y + x^2 - y^2)\,dx\right)dy = \underline{\underline{76}}$$

$$A_1: \int_1^5\int_0^5 (xy + x^2 - y^2)\,dx\,dy = \int_1^5 \frac{25y}{2} + \frac{125}{3} - 5y^2\,dy =$$

$$A_2: \int_1^5\left(-\int_{-1}^0 xy\,dx + \int_{-1}^0 x^2 - y^2\,dx\right)dy = \int_1^5 \frac{y}{2} - \frac{1}{3} + y^2\,dy =$$

$$\int_0^5 (xy + x^2 - y^2)\,dx = \left(\frac{x^2y}{2} + \frac{x^3}{3} - xy^2\right)\Big|_0^5 = \frac{25y}{2} + \frac{125}{3} - 5y^2$$

$$-\int_{-1}^0 xy\,dx = -\left(\frac{x^2y}{2}\right)\Big|_{-1}^0 = \frac{y}{2}$$

$$\int_{-1}^0 x^2 - y^2\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - xy^2\right)\Big|_{-1}^0 = -\frac{1}{3} + y^2$$

$$\int_1^5 \frac{25y}{2} + \frac{125}{3} - 5y^2\,dy = \left(\frac{25y^2}{4} + \frac{125}{3}y - \frac{5y^3}{3}\right)\Big|_1^5 =$$

$$= \frac{25\cdot 25}{4} + \frac{125\cdot 5}{3} - \frac{5\cdot 125}{3} - \left(\frac{25}{4} + \frac{125}{3} - \frac{5}{3}\right) =$$

$$= \frac{625}{4} + \cancel{\frac{625}{3}} - \cancel{\frac{625}{3}} - \frac{25}{4} - \frac{125}{3} + \frac{5}{3} = \frac{600}{4} - \frac{120}{3} = 150 - 40 = \underline{\underline{110}}$$

$$\int_1^5 \frac{y}{2} - \frac{1}{3} + y^2\,dy = \left(\frac{y^2}{4} - \frac{1}{3}y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_1^5 =$$

$$= \frac{25}{4} - \frac{5}{3} + \frac{125}{3} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{25}{4} - \frac{120}{3} - \frac{1}{4} = 6 - 40 = \underline{\underline{-34}}$$

$$110 - 34 = \underline{\underline{76}}$$

1)(8 P.) Die Gammafunktion ist definiert durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

Warum ist $\Gamma(x)$ ein uneigentliches Integral? Beweisen Sie, dass $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für $x > 0$ gilt und leiten Sie daraus die Identität $\Gamma(n+1) = n!$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ her.

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u v'$$

$$u' = e^{-t} \qquad v' = x \cdot t^{x-1}$$

$$u = -e^{-t} \qquad v = t^x$$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x \, dt$$

$$= \left(-e^{-t} t^x\right)\Big|_0^\infty + x \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \, dt$$

$$= \underbrace{-\frac{t^x}{e^t}\Big|_0^\infty}_{0} + x\,\Gamma(x) = \underline{\underline{x \cdot \Gamma(x)}}$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{1-1} \, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-t} \, dt$$

$$= \left(-e^{-t}\right)\Big|_0^\infty = -\underbrace{\frac{1}{e^\infty}}_{0} + \frac{1}{e^0} = \underline{\underline{1}}$$

3)(8 P.) Durch $z = \frac{xy}{x+y}$ ist eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ gegeben. Die Beschränkung von x und y auf die Werte $x = e^t$ und $y = e^{-t}$ $(t \in \mathbb{R})$ definiert eine Kurve auf dieser Fläche. Bestimmen Sie $\frac{dz}{dt}$ mit Hilfe der Kettenregel. Machen Sie anschließend die Probe, indem Sie zuerst x und y in z einsetzen und dann nach dem Parameter t differenzieren. Wo verläuft diese Kurve auf der Fläche horizontal?

$$\frac{dz}{dt}(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$= \left(\frac{y}{x+y} - \frac{xy}{(x+y)^2}\right) \cdot e^t - \left(\frac{x}{x+y} - \frac{xy}{(x+y)^2}\right) \cdot e^{-t}$$

$$= \left(\frac{e^{-t}}{e^t+e^{-t}} - \frac{1}{(e^t+e^{-t})^2}\right) \cdot e^t - \left(\frac{e^t}{e^t+e^{-t}} - \frac{1}{(e^t+e^{-t})^2}\right) \cdot e^{-t}$$

$$= \cancel{\frac{1}{e^t+e^{-t}}} - \frac{e^t}{(e^t+e^{-t})^2} - \cancel{\frac{1}{e^t+e^{-t}}} + \frac{e^{-t}}{(e^t+e^{-t})^2}$$

$$= \frac{e^{-t}-e^t}{(e^t+e^{-t})^2}$$

Probe:

$$\frac{e^t \cdot e^{-t}}{e^t+e^{-t}} = \frac{1}{e^t+e^{-t}}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{e^t+e^{-t}} = -\frac{1}{(e^t+e^{-t})^2} \cdot \left(e^t - e^{-t}\right) = \frac{e^{-t}-e^t}{(e^t+e^{-t})^2}$$

$$(e^t+e^{-t})^{-1}$$

$$\frac{e^{-t}-e^t}{(e^t+e^{-t})^2} = 0$$

$$e^{-t} = e^t \quad | \ln$$

$$-t = t$$

$$2t = 0$$

$$\underline{\underline{t = 0}}$$

Dies passiert bei $t = 0$ bzw im Punkt $(1|1)$.

2)(8 P.) Man beweise mit Hilfe des Integralkriteriums, dass die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)e^{-n}$$

konvergent ist.

$$\int u'v = uv - \int uv'$$

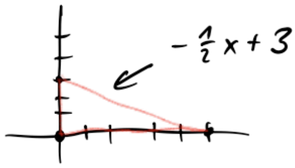
$$u' = e^{-x} \quad v = 1$$
$$u = -e^{-x} \quad V = x+1$$

$$\int_1^\infty (x+1)\,e^{-x}\,dx =$$

$$\left(-\frac{x+1}{e^x}\right)\Big|_1^\infty + \int_1^\infty e^{-x}\,dx =$$

$$\frac{2}{e} + \left(-\frac{1}{e^x}\right)\Big|_1^\infty = \frac{2}{e} + \frac{1}{e} = \underline{\underline{\frac{3}{e}}}$$

3)(8 P.) Berechnen Sie das Bereichsintegral $\iint_B(-1+2xy)\,dx\,dy$, wobei der Bereich B das Dreieck in der (x,y)-Ebene mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(6,0)$ und $(0,3)$ bezeichnet.



$$\int_0^6 \int_0^{-\frac{1}{2}x+3} (-1+2xy)\,dy\,dx = \underline{\underline{18}}$$

$$\int_0^{-\frac{1}{2}x+3} (-1+2xy)\,dy = \left(-y + xy^2\right)\Big|_0^{-\frac{1}{2}x+3}$$

$$-\left(-\tfrac{1}{2}x+3\right) + x\left(-\tfrac{1}{2}x+3\right)^2 = \tfrac{1}{2}x - 3 + x\left(\tfrac{x^2}{4} - 3x + 9\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}x - 3 + \tfrac{x^3}{4} - 3x^2 + 9x$$

$$= \tfrac{x^3}{4} - 3x^2 + \tfrac{19}{2}x - 3$$

$$\int_0^6 \frac{x^3}{4} - 3x^2 + \frac{19}{2}x - 3 =$$

$$\left(\frac{x^4}{16} - x^3 + \frac{19x}{4} - 3x\right)\Big|_0^6 =$$

$$81 - 216 + 171 - 18 = \underline{\underline{18}}$$

Taylor (3 Bsp)

3)(8 P.) a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiter Ordnung der Funktion $\ln(x)$ an der Anschlussstelle $x_0 = 1$.

b) Bestimmen Sie das Restglied zu a).

c) Untersuchen Sie mit Hilfe der Ergebnisse von a) und b), ob die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x-1} & \text{für } x \neq 1, \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = 1$ stetig ist.

a) $f(x) = \ln(x)$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$f''(x) = \frac{df}{dx}\frac{1}{x} = \frac{df}{dx} x^{-1} = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n$$

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$P_2(x) = 0 + \frac{1}{1}(x-1) - \frac{\frac{1}{1}}{2!}(x-1)^2$$

$$= \underline{\underline{(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2}} + R_n$$

b) $f'''(x) = \frac{df}{dx}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{df}{dx} x^{-2} = (-1)\cdot(-2)\cdot x^{-3} = \frac{2}{x^3}$

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$

$$R_n = \frac{\frac{2}{\xi^3}}{\frac{6}{1}}(x-1)^3 = \frac{\cancel{2}1}{\cancel{6}_3\xi^3}(x-1)^3 = \underline{\underline{\frac{1}{3\xi^3}(x-1)^3}}$$

mit $0 < \xi < x$

c)

Um die Stetigkeit der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x_0=1$ zu untersuchen müssen wir den Grenzwert von $f(x)$ für x gegen 1 untersuchen und schauen ob dieser Wert mit $f(x_0)$ übereinstimmt.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{unbestimmt} \Rightarrow \text{L'Hospital}$$

L'Hospital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{d}{dx}\ln(x)}{\frac{d}{dx}(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{1}} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

Der Grenzwert von $f(x)$ für x gegen 1 ist also 1 und entspricht also $f(x_0) \Rightarrow$ Funktion ist an der Stelle $x_0=1$ stetig.

3)(8 P.) a) Beweisen Sie, dass das Restglied zum Taylor-Polynom nullter Ordnung einer Funktion $f(x)$ an der Anschlussstelle a auch durch

$$\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

darstellbar ist.

b) Beweisen Sie, dass das Restglied zum Taylor-Polynom erster Ordnung einer Funktion $f(x)$ an der Anschlussstelle a auch durch

$$\int_a^x (x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t$$

darstellbar ist.

a) $f(x) = f(a) + R_0 \leftarrow$ Taylor-Pol. 0-Ordnung

$R_0 = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt$

b) $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + R_1$

$R_1 = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$

$\int_a^x (x-t) f''(t)\,dt =$

$\int u'v = uv - \int uv'$

$u' = f''(t) \quad v' = -1$

$u = f'(t) \quad v = x-t$

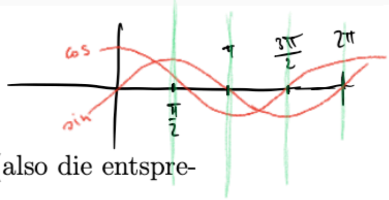
$f'(t)(x-t)\Big|_a^x + \int_a^x f'(x) =$

$-f'(a)(x-a) + f(x) - f(a) =$

$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = \underline{\underline{R_1}}$

$T_1 = -1 - x + 2 - y\,1$

$T_1 = -x - y$



3)(8 P.) Man bestimme die lineare und die quadratische Approximation (also die entsprechenden Taylorpolynome) der Funktion

$$f(x, y) = e^{x+y-3} \cos\left(\frac{\pi x y}{2}\right)$$

für den Entwicklungspunkt $(x, y) = (2, 1)$.

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \left(f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2 f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right) + R_n$$

$$f(x,y) = e^{x+y-3}\cos\left(\frac{\pi x y}{2}\right)$$

$$f_x(x,y) = e^{x+y-3}\cos\left(\frac{\pi x y}{2}\right) - \frac{\pi y}{2}\cdot \sin\left(\frac{\pi x y}{2}\right)\cdot e^{x+y-3}$$

$\sin \to \cos \to -\sin \to -\cos \to \sin$

$$f_y(x,y) = e^{x+y-3}\cos\left(\frac{\pi x y}{2}\right) - \frac{\pi x}{2}\cdot \sin\left(\frac{\pi x y}{2}\right)\cdot e^{x+y-3}$$

$$f_{xx}(x,y) = e^{x+y-3}\cos\left(\frac{\pi x y}{2}\right) - \frac{\pi y}{2}\cdot \sin\left(\frac{\pi x y}{2}\right)\cdot e^{x+y-3}$$
$$- \frac{\pi y}{2}\left(\frac{\pi y}{2}\cos\left(\frac{\pi x y}{2}\right)\cdot e^{x+y-3} + \sin\left(\frac{\pi x y}{2}\right)\cdot e^{x+y-3}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi x y}{2}\right)e^{x+y-3} - \frac{\pi y}{2}\sin\left(\frac{\pi x y}{2}\right)\cdot e^{x+y-3}$$
$$- \frac{\pi^2 y^2}{4}\cos\left(\frac{\pi x y}{2}\right)\cdot e^{x+y-3} - \frac{\pi y}{2}\sin\left(\frac{\pi x y}{2}\right)\cdot e^{x+y-3}$$
$$= \cos\left(\frac{\pi x y}{2}\right)e^{x+y-3} - \pi y \sin\left(\frac{\pi x y}{2}\right)\cdot e^{x+y-3} - \frac{\pi^2 y^2}{4}\cos\left(\frac{\pi x y}{2}\right)\cdot e^{x+y-3}$$
$$= e^{x+y-3}\left(\cos\left(\frac{\pi x y}{2}\right) - \pi y \sin\left(\frac{\pi x y}{2}\right) - \frac{\pi^2 y^2}{4}\cos\left(\frac{\pi x y}{2}\right)\right)$$

$$f_{yy}(x,y) = e^{x+y-3}\left(\cos\left(\frac{\pi x y}{2}\right) - \pi x \sin\left(\frac{\pi x y}{2}\right) - \frac{\pi^2 x^2}{4}\cos\left(\frac{\pi x y}{2}\right)\right)$$

$$f_{xy}(x,y) = e^{x+y-3}\left(\cos\left(\frac{\pi x y}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\left(x\sin\left(\frac{\pi x y}{2}\right) + y\sin\left(\frac{\pi x y}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi x y}{2}\right) + \frac{\pi}{2}xy\cos\left(\frac{\pi x y}{2}\right)\right)\right)$$

?

Differentialgleichungen (7 Bsp)

2)(8 P.) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' - y = e^x - 1.$$

Homogene Lösung:

$$y' - y = 0$$

$$y' = y$$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{1}{y} dy = dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 1 \, dx$$

$$\ln|y| = x + C$$

$$y = C_1 \cdot e^x$$

Variation der Konstanten:

$$y' - y = e^x - 1$$

$$y_p(x) = C(x) \cdot e^x$$

$$(C(x) \cdot e^x)' - C(x) \cdot e^x = e^x - 1$$

$$C'(x) \cdot e^x \cancel{+ C(x) \cdot e^x} \cancel{- C(x) \cdot e^x} = e^x - 1$$

$$C'(x) \cdot e^x = e^x - 1$$

$$C'(x) = 1 - \frac{1}{e^x} = 1 - e^{-x}$$

$$C(x) = \int 1 - e^{-x}$$

$$= x + e^{-x}$$

$$y_p(x) = x \cdot e^x + 1$$

$$y(x) = C_1 \cdot e^x + x \cdot e^x + 1$$

$$= e^x (C_1 + x) + 1$$

2)(8 P.) Beweisen Sie, dass die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$x^2y'' - 6y = 12\ln x$$

durch

$$y(x) = C_1x^3 + \frac{C_2}{x^2} - 2\ln x + \frac{1}{3}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

gegeben ist.
Wie lautet die partikuläre Lössung zu den Anfangsbedingungen $y(1) = 2/3$, $y'(1) = -1$?

Homogene Lösung:

$$x^2y'' - 6y = 12\ln(x)$$

$$x^2y'' - 6y = 0$$

$$x^2y'' = 6y$$

$x = e^t \quad y(x) = z(t)$

$t = \ln(x) \quad y(x) = z(\ln(x))$

$$x^2 = e^{2t}$$
$$y' = \frac{d}{dx}z(\ln(x)) = \frac{z'(\ln(x))}{x} = \frac{z'(t)}{e^t}$$
$$y'' = \frac{d}{dx}\frac{z'(\ln(x))}{x} = \frac{z''(\ln(x)) - z'(\ln(x))}{x^2} = \frac{z''(t) - z'(t)}{e^{2t}}$$

$y''x^2 - 6y = 0$

$z''(t) - z'(t) - 6 \cdot z(t) = 0$

$z'' - z' - 6z = 0$

$\lambda^2 \cdot \cancel{e^{\lambda t}} - \lambda \cdot \cancel{e^{\lambda t}} - 6 \cdot \cancel{e^{\lambda t}} = 0$

$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$

$(\lambda - 3) \cdot (\lambda + 2) = 0$

$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = -2$

$z(t) = C_1 \cdot e^{3t} + C_2 \cdot e^{-2t}$

$\hookrightarrow y_h(x) = C_1 \cdot x^3 + C_2 \cdot x^{-2}$

$z'' - z' - 6z = 12 \cdot t \qquad z_p(t) = A \cdot t + B$

$0 - A - 6 \cdot (A \cdot t + B) = 12 \cdot t$

$-A - 6A \cdot t - 6B = 12 \cdot t \qquad z_p(t) = -2t + \frac{1}{3}$

$-6A = 12 \qquad -A - 6B = 0 \qquad = -2\ln(x) + \frac{1}{3}$

$A = -2 \qquad 2 - 6B = 0$

$B = \frac{1}{3}$

$y_h(x) = C_1x^3 + C_2x^{-2} \qquad y_p(x) = -2\ln(x) + \frac{1}{3}$

$y(x) = C_1x^3 + C_2 \cdot x^{-2} - 2\ln(x) + \frac{1}{3}$

$y'(x) = 3C_1x^2 - 2C_2x^{-3} - \frac{2}{x}$

$y(1) = \frac{2}{3}$

$y'(1) = -1$

$\frac{2}{3} = C_1 + C_2 - 2\ln(1) + \frac{1}{3} = \underline{C_1 + C_2 + \frac{1}{3}}$

$\underline{-1 = 3C_1 - 2C_2 - 2}$

$\frac{1}{3} = C_1 + C_2$

$1 = 3C_1 - 2C_2$

$\frac{5}{3} = 5C_1 \qquad /:5$

$\underline{\underline{C_1 = \frac{1}{3}}} \qquad \underline{\underline{C_2 = 0}}$

1)(8 P.) Skizzieren Sie mit Hilfe der Isoklinen das Richtungsfeld der Differentialgleichung

$$y' = -\frac{xy}{x^2+1}$$

und finden Sie die allgemeine Lösung.

$$\frac{y'}{y} = -\frac{x}{x^2+1}$$

$$\frac{1}{y}\,dy = -\frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$u = x^2+1$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{du}{2x} = dx$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int \frac{\cancel{x}}{u}\,\frac{du}{2\cancel{x}}$$

$$\ln(y) = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c}$$

$$y = (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{c}$$

$$y = \frac{c}{\sqrt{x^2+1}}$$

2)(8 P.) Gegeben ist die Differentialgleichung $x^2y'' - 6y = 12\ln x$.

1) Beschreiben Sie den Typ dieser Differentialgleichung (linear/nichtlinear, homogen/inhomogen, Ordnung, etc.)!

2) Beweisen Sie, dass für alle $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ die Funktion $C_1x^3 + \frac{C_2}{x^2} - 2\ln x + \frac{1}{3}$ eine Lösung der Differentialgleichung ist!

3) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung!

4) Bestimmen Sie die partikuläre Lösung zu den Anfangsbedingungen $y(1) = \frac{2}{3}$, $y'(1) = -1$.

1) lineare, inhomogene, 2. Ordnung mit nicht konstante Koefizienten.

2) $x^2y'' - 6y = 12\ln(x)$

$x = e^t \qquad y(x) = z(t)$

$t = \ln(x) \qquad y(x) = z(\ln(x))$

$y' = \frac{d}{dx} z(\ln(x)) = \frac{z'(\ln(x))}{x} = \frac{z'(t)}{e^t}$

$y'' = \frac{d}{dx} \frac{z'(\ln(x))}{x} = \frac{z''(\ln(x)) - z'(\ln(x))}{x^2} = \frac{z''(t) - z'(t)}{e^{2t}}$

$x^2y'' - 6y = 0$

$z''(t) - z'(t) - 6z(t) = 0$

$z'' - z' - 6z = 0$

$\lambda^2 \cdot \cancel{e^{\lambda t}} - \lambda \cancel{e^{\lambda t}} - 6\cancel{e^{\lambda t}} = 0$

$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$

$(\lambda+3)(\lambda-2) = 0$

$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = -2$

$z(t) = C_1 \cdot e^{3t} + C_2 \cdot e^{-2t}$

$y_h(x) = C_1 \cdot x^3 + \frac{C_2}{x^2}$

$z'' - z - 6z = 12t \qquad z_p(t) = At + B$

$0 - A - 6(At + B) = 12t$

$-A - 6At - 6B = 12t$

$-6A = 12 \qquad -A - 6B = 0$

$A = -2 \qquad 2 = 6B$

$B = \frac{1}{3}$

$z_p(t) = -2t + \frac{1}{3}$

$y_p(t) = -2 \cdot \ln(x) + \frac{1}{3}$

$y(x) = C_1 \cdot x^3 + \frac{C_2}{x^2} - 2\ln(x) + \frac{1}{3}$

4) $y'(x) = 3C_1x^2 - \frac{2C_2}{x^3} - \frac{2}{x}$

$y(1) = \frac{2}{3}$

$y'(1) = -1$

$\frac{2}{3} = C_1 + C_2 + \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} = C_1 + C_2 \Rightarrow \frac{1}{3} - C_2 = C_1$

$-1 = 3C_1 - 2C_2 - 2$

$1 = 3C_1 - 2C_2$

$1 = 1 - 3C_2 - 2C_2 \Rightarrow C_2 = 0$

$C_1 = \frac{1}{3}$

$y(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2\ln(x) + \frac{1}{3}$

3)(8 P.) Bestimmen Sie jene Lösung der linearen Differentialgleichung $2y'' + 3y' - 5y = 0$, die den Anfangsbedingungen $y(0) = 3/2$, $y'(0) = -5$ genügt.

$$2y'' + 3y' - 5y = 0$$

$$2\lambda^2 + 3\lambda - 5 = 0$$

$\sqrt{49} = 7$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2}$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4}$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-3 \pm 7}{4} \qquad \lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$$

$$\underline{\underline{y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-\frac{5x}{2}}}}$$

$$y' = C_1 \cdot e^x - \frac{5}{2} \cdot C_2 e^{-\frac{5}{2}x}$$

$$\frac{3}{2} = C_1 + C_2 \quad \Rightarrow C_2 = \frac{3}{2} - C_1$$

$$-5 = C_1 - \frac{5}{2} C_2$$

$$-5 = C_1 - \frac{5}{2}\left(\frac{3}{2} - C_1\right)$$

$$-5 = C_1 - \frac{15}{4} + \frac{5}{2} C_1$$

$$-\frac{5}{4} = \frac{7}{2} C_1$$

$$-\frac{5}{14} = C_1 \quad \Rightarrow C_2 = \frac{3}{2} - \left(-\frac{5}{14}\right) = \frac{26}{14} = \frac{13}{7}$$

$$\underline{\underline{y(x) = -\frac{5}{14} \cdot e^x + \frac{13}{7} \cdot e^{-\frac{5}{2}x}}}$$

2)(8 P.) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 8y' + 7y = e^x - 1.$$

$$y'' - 8y' + 7y = e^x - 1$$

Homogene Lösung:

$$y'' - 8y' + 7y = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 7}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} =$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2}$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 7$$

$$y_h(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{7x}$$

Partikuläre Lösung:

$$y_{p_1}(x) = y'' - 8y' + 7y = -1$$

$$+7A = -1$$

$$A = -\frac{1}{7}$$

$$y_{p_1}(x) = -\frac{1}{7}$$

$$A \cdot x \cdot e^x$$

$$A \cdot e^x + A \cdot x \cdot e^x$$

$$A e^x + A e^x + A x e^x$$
$$= 2A e^x + A x e^x$$

$$y_{p_2}(x) = y'' - 8y' + 7y = e^x$$

$$2Ae^x + \cancel{Axe^x} - 8Ae^x - \cancel{8Axe^x} + \cancel{7Axe^x} = e^x$$

$$-6Ae^x = e^x$$

$$A = -\frac{1}{6}$$

$$y_{p_2}(x) = -\frac{x \cdot e^x}{6}$$

$$y(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{7x} - \frac{x \cdot e^x}{6} - \frac{1}{7}$$

1)(8 P.) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 8y' - 20y = e^{10x} + 1.$$

$$y'' - 8y - 20y = e^{10x} + 1$$

Homogene:

$$y'' - 8y' - 20y = 0$$
$$\lambda^2 - 8\lambda - 20 = 0$$
$$\lambda_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{(-8^2) - 4\cdot(-20)}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{64+80}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{8 \pm 12}{2}$$
$$\lambda_1 = 10 \qquad \lambda_2 = -2$$
$$y_h(x) = C_1 \cdot e^{10x} + C_2 \cdot e^{-2x}$$

Partikuläre Lösungen:

$$y_{p_1}(x) = y'' - 8y - 20y = 1$$
$$-20A = 1$$
$$A = -\frac{1}{20}$$
$$y_{p_1}(x) = -\frac{1}{20}$$

$A \cdot x \cdot e^{10x}$

$A \cdot e^{10x} + 10Axe^{10x}$

$10Ae^{10x} + 10Ae^{10x} + 100Axe^{10x}$

$$y_{p_2}(x) = y'' - 8y' - 20y = e^{10x}$$
$$20Ae^{10x} + \cancel{100Axe^{10x}} - 8(Ae^{10x} + \cancel{10Axe^{10x}}) \cancel{-20Axe^{10x}} = e^{10x}$$
$$12Ae^{10x} = e^{10x}$$
$$A = \frac{1}{12}$$
$$y_{p_2}(x) = \frac{x \cdot e^{10x}}{12}$$

$$y(x) = C_1 \cdot e^{10x} + C_2 \cdot e^{-2x} + \frac{x \cdot e^{10x}}{12} - \frac{1}{20}$$

Random (3 Bsp)

3)(8 P.) Gegeben ist die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sqrt{j}-2\sqrt{j+1}+\sqrt{j+2}\right)$.

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass die n-te Partialsumme s_n dieser Reihe durch $s_n=-1-\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}$ gegeben ist.

Untersuchen Sie, ob die Reihe konvergiert und bestimmen Sie gegebenfalls den Grenzwert.

Hinweis: Manchmal hilft es, $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ um $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ zu erweitern.

IA: Die 0-te Partialsumme s_0 ist:

$$s_0=\sqrt{0}-2\cdot\sqrt{0+1}+\sqrt{0+2}=-2\cdot\sqrt{1}+\sqrt{2}=-2+\sqrt{2}$$

Die Formel gilt für $n=0$:

$$s_0=-1-\sqrt{0+1}+\sqrt{0+2}=-1-\sqrt{1}+\sqrt{2}=-1-1+\sqrt{2}=-2+\sqrt{2} \checkmark$$

IB: Wir nehmen an das die Behauptung für ein beliebiges n wahr ist. Das bedeutet:

$$s_n=-1-\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}$$

IS: Zeigen das dies auch für $n+1$ gilt:

$$s_{n+1}=s_n+\left(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}\right)$$

$$\begin{aligned}s_{n+1}&=\left(-1-\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)+\left(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}\right)\\&=-1-\cancel{\sqrt{n+1}}+\cancel{\sqrt{n+2}}+\cancel{\sqrt{n+1}}-\cancel{2}\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}\\&=-1-\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3} \checkmark\end{aligned}$$

Dies ist genau die Formel die wir beweisen wollten.

Grenzwert:

$$s_n=-1-\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(-1-\underbrace{\cancel{\sqrt{n+1}}}_{\cancel{-\infty}}+\underbrace{\cancel{\sqrt{n+2}}}_{\cancel{+\infty}}\right)=\underline{\underline{-1}}$$

1)(8 P.) Beweisen Sie die folgende Formel (mit $n \in \mathbb{N}$) mit vollständiger Induktion:

$$\int x^n (\log x)^n \, dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!(n+1)^{k+1}} x^{n+1} (\log x)^{n-k}$$

Spezialfall wenn m=n:

$$\int x^n \cdot ln(x)^n dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{(n-k)! \cdot (n+1)^{k+1}} x^{n+1} ln(x)^{n-k}$$

Allgemein:

$$\int x^m \cdot ln(x)^n dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (n)!}{(n-k)! \cdot (m+1)^{k+1}} x^{m+1} ln(x)^{n-k}$$

Induktionsanfang für n = 0:

$$\int x^m dx = \sum_{k=0}^{0} \frac{(-1)^k (n)!}{(n-k)! \cdot (m+1)^{k+1}} x^{m+1} ln(x)^{n-k}$$

$$\frac{x^{m+1}}{m+1} = \frac{1}{(m+1)} x^{m+1}$$

Induktionsbehauptung:

$$\int x^m \cdot ln(x)^{n+1} dx = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k (n+1)!}{(n-k+1)! \cdot (m+1)^{k+1}} x^{m+1} ln(x)^{n-k+1}$$

$$\frac{x^{m+1} \cdot ln(x)^{n+1}}{m+1} - \frac{n+1}{m+1} \cdot \int x^m \cdot ln(x)^n dx = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k (n+1)!}{(n-k+1)! \cdot (m+1)^{k+1}} x^{m+1} ln(x)^{n-k+1}$$

Induktionsschritt:

$$\frac{x^{m+1} \cdot ln(x)^{n+1}}{m+1} - \frac{n+1}{m+1} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (n)!}{(n-k)! \cdot (m+1)^{k+1}} x^{m+1} ln(x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k (n+1)!}{(n-k+1)! \cdot (m+1)^{k+1}} x^{m+1} ln(x)^{n-k+1}$$

$$\frac{x^{m+1} \cdot ln(x)^{n+1}}{m+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (n+1)!}{(n-k)! \cdot (m+1)^{k+2}} x^{m+1} ln(x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k (n+1)!}{(n-k+1)! \cdot (m+1)^{k+1}} x^{m+1} ln(x)^{n-k+1}$$

$$\frac{x^{m+1} \cdot ln(x)^{n+1}}{m+1} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1} (n+1)!}{(n-k+1)! \cdot (m+1)^{k+1}} x^{m+1} ln(x)^{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k (n+1)!}{(n-k+1)! \cdot (m+1)^{k+1}} x^{m+1} ln(x)^{n-k+1}$$

$$\frac{x^{m+1} \cdot ln(x)^{n+1}}{m+1} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1} (n+1)!}{(n-k+1)! \cdot (m+1)^{k+1}} x^{m+1} ln(x)^{n-k+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)! \cdot (m+1)} \cdot x^{m+1} ln(x)^{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k (n+1)!}{(n-k+1)! \cdot (m+1)^{k+1}} x^{m+1} ln(x)^{n-k+1}$$

$$\frac{x^{m+1} \cdot ln(x)^{n+1}}{m+1} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1} (n+1)!}{(n-k+1)! \cdot (m+1)^{k+1}} x^{m+1} ln(x)^{n-k+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)! \cdot (m+1)} \cdot x^{m+1} ln(x)^{n+1} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1} (n+1)!}{(n-k+1)! \cdot (m+1)^{k+1}} x^{m+1} ln(x)^{n-k+1}$$

$$\frac{x^{m+1} \cdot ln(x)^{n+1}}{m+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)! \cdot (m+1)} \cdot x^{m+1} ln(x)^{n+1}$$

$$\frac{x^{m+1} \cdot ln(x)^{n+1}}{m+1} = \frac{x^{m+1} ln(x)^{n+1}}{m+1}.$$

Womit $\int x^m \cdot ln(x)^n dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (n)!}{(n-k)! \cdot (m+1)^{k+1}} x^{m+1} ln(x)^{n-k}$ gezeigt ist

$\int x^n \cdot ln(x)^n dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{(n-k)! \cdot (n+1)^{k+1}} x^{n+1} ln(x)^{n-k}$ folgt direkt daraus, da dies dem Fall m=n entspricht

2)(8 P.) Gegeben sind zwei differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Beweisen Sie die folgende Formel mittels vollständiger Induktion!

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f(x)\right) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}} g(x)\right)$$

IS:

Beweisen Sie die folgende Formel mittels vollständiger Induktion!

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f(x)\right) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}} g(x)\right)$$

IA: $n=0$ $\quad f(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x)$ ✓

IB: $$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left(f(x) g(x)\right) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left(\frac{d^k}{dx^k} f(x)\right) \left(\frac{d^{n-k+1}}{dx^{n-k+1}} g(x)\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^n}{dx^n}\left(f(x)g(x)\right)\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x)\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d}{dx} f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k+1)}(x)\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k+1)}(x)\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k+1)}(x)$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k+1)}(x) + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k+1)}(x)$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) \cdot f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k+1)}(x)$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \qquad \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k+1)}(x)$$