Runde 4, Beispiel 28

LVA 118.181, Übungsrunde 4, 10.11.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 01.11.2006

1 Angabe

Man bestimme die allgemeine Lösung der Dgl.

$$y^{(4)} + 2y''' + 5y'' + 8y' + 4y = \cos x + 40e^x$$

2 Theoretische Grundlagen: Lineare Differentialgleichungen 4. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(4)}(x) + a \cdot y'''(x) + b \cdot y''(x) + c \cdot y'(x) + d \cdot y(x) = 0 \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}, d \neq 0$$

2.1 Homogene Differentialgleichung

(Basierend auf 'Handbuch der Differentialgleichungen', Polyanin/Zaitsev, 1996, S. 219ff.)
Substitution mit λ ergibt das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^4 + a \cdot \lambda^3 + b \cdot \lambda^2 + c \cdot \lambda + d = 0$$

Die Nullstellen dieses Polynoms errechnet man am besten mit dem Horner-Schema.
Die Gestalt der allgemeinen Lösung hängt nun davon ab, ob die Nullstellen rell oder komplex sind:

1. Nur reelle Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2\lambda_3, \lambda_4$ - folgende Fälle sind möglich:

   a) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4$

   $$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} + C_3e^{\lambda_3 x} + C_4e^{\lambda_1 4x}$$

   b) $\lambda_1 =\neq \lambda_2\ \lambda_3 \neq \lambda_4 \neq \lambda_1$

   $$y = (C_1 + C_2x)e^{\lambda_1 x} + C_3e^{\lambda_3 x} + C_4e^{\lambda_1 4x}$$

   c) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \neq \lambda_4$

   $$y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^{\lambda_1 x} + C_4e^{\lambda_1 4x}$$

   d) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$

   $$y = (C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3)e^{\lambda_1 x}$$

2. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_3, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ (Gleichung $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda^2 + 2b_1\lambda + b_0)$)

   a) $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + e^{-b_1 x}(C_3 \cos(\mu x) + C_4 \sin(\mu x)), \mu = \sqrt{b_0 - b_1^2}$$

   b) $\lambda_1 = \lambda_2$

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda_1 x} + e^{-b_1 x}(C_3 \cos(\mu x) + C_4 \sin(\mu x)), \mu = \sqrt{b_0 - b_1^2}$$

3. Gleichung $P(\lambda) = (\lambda^2 + 2b_1\lambda + b_0)(\lambda^2 + 2\beta_1\lambda + \beta_0)$, $b_1^2 - b_0 < 0$, $\beta_1^2 - \beta_0 < 0$

   a) $(b_1 - \beta_1)^2 + (b_0 - \beta_0)^2 \neq 0$

$$y = e^{-b_1 x}(C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x)) + e^{-\beta_1 x}(C_3 \cos(\upsilon x) + C_4 \sin(\upsilon x))$$
$$\mu = \sqrt{b_0 - b_1^2}, \upsilon = \sqrt{\beta_0 - \beta_1^2}$$

   b) $b_1 = \beta_1, b_0 = \beta_0$

$$y = e^{-b_1 x}((C_1 + C_2 x)\cos(\mu x) + (C_3 + C_4 x)\sin(\mu x)), \qquad \mu = \sqrt{b_0 - b_1^2}$$

2.2 Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

Erfolgt im Normalfall durch Variation der Konstanten (auch Variation der Parameter) genannt. Hat die Störfunktion einen bestimmten Charakter, so kann der unbestimmte Ansatz verwendet weden (siehe hierzu Beispiel 27, theoretische Grundlagen).
Abschließend berechnet man noch die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung durch Addition von allgemeiner Lösung der homogenen Differentialgleichung mit einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

2.3 Wichtige Formel

Laut 'Schaum Überblicke, Aufgaben. Differentialgleichungen',Ayres Jr, F., 1988, S. 88 - wichtige FormelnM

- $e^{ibx} = \cos bx + i \sin bx$
- $e^{-ibx} = \cos bx + i \sin bx$

3 Lösung des Beispiels

$$y^{(4)} + 2y''' + 5y'' + 8y' + 4y = \cos x + 40e^x$$

3.1 Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

Wir benötigen für die Gestaltung der charakteristischen Gleichung (Ansatz $e^{\lambda x}$:

$$y = e^{\lambda x}, \qquad y' = \lambda e^{\lambda x}, \qquad y''' = \lambda^2 e^{\lambda x}, \qquad y = x^3 e^{\lambda x}, \qquad y^{(4)} = \lambda^3 e^{\lambda x}, \qquad y = x^3 e^{\lambda x}$$

woraus sich folgendes charakteristische Polynom ergibt:

$$\lambda^4 e^{\lambda x} + 2\lambda^3 e^{\lambda x} + 5\lambda^2 e^{\lambda x} + 8\lambda e^{\lambda x} + 4e^{\lambda x} = 0$$
$$e^{\lambda x}(\boldsymbol{\lambda^4} + \mathbf{2}\lambda^{\mathbf{3}} + \mathbf{5}\lambda^{\mathbf{2}} + \mathbf{8}\lambda + \mathbf{4}) = 0$$

Wir testen zunächst $\lambda_1 = -1$ - dieser Test ergibt die erste Nullstelle. Zur Reduktion der Ordnung des Polynoms wenden wir das Horner-Schema an:

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 5 & 8 & 4 \\ \lambda_1 = -1 & & -1 & -1 & -4 & -4 \\ & 1 & 1 & 4 & 4 & 0 \end{array}$$

Dies ergibt das Polynom

$$\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0,$$

bei diesem ein Test $\lambda_2 = -1$ wiederum eine Nullstelle ergibt. Wiederum wenden wir das Horner-Schema an:

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 1 & 4 & 4 \\ \lambda_2 = -1 & & -1 & 0 & -4 \\ & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}$$

Dies ergibt das Polynom

$$\lambda^2 + 4 = 0,$$

welches die Lösungen $\lambda_{3,4} = \sqrt{-4} = \pm 2i$ hat.
Diese Lösungen wurden mit MATLAB (7.1.) wie folgt verfiziert:

Listing 1: Nullstellen eines Polynoms in MATLAB errechnen

```
>> p=[1 2 5 8 4];
>> roots(p)

ans =

   0.0000 + 2.0000i
   0.0000 - 2.0000i
  -1.0000 + 0.0000i
  -1.0000 - 0.0000i
```

Dies ist der Fall 2.b., der in den theoretischen Grundlagen angegeben ist, $\mu = 2$, und da $b_1 = 0$ ist, ist die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung:

$$y_{(h)} = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + \underbrace{e^{-0x}}_{=1}(C_3 \cos(2x) + C_4 \sin(2x))$$

3.2 Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

Wir betrachten, ausgehend von der gegebenen Differentialgleichung

$$y^{(4)} + 2y''' + 5y'' + 8y' + 4y = \cos x + 40e^x$$

die zwei Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} y^{(4)} + 2y''' + 5y'' + 8y' + 4y &= \cos x \\ y^{(4)} + 2y''' + 5y'' + 8y' + 4y &= \qquad 40e^x \end{aligned}$$

Da die Addition eine Linearkombination darstellt, dürfen wir diese Umformung vornehmen, so dass die Addition der Lösungen dieser beiden Differentialgleichungen die Lösung unserer inhomogenen Differentialgleichung ist.

3.2.1 Lösung von $\mathbf{y^{(4)} + 2y''' + 5y'' + 8y' + 4y} = \cos \mathbf{x}$

Für die Störfunktion $s(x) = \cos x$ schreiben wir allgemein $s(x) = \cos(1 \cdot x)$ - der Multiplikand 1 ist keine Lösung des charakteristischen Polynoms, so dass der Ansatz $y_p = A \cdot \sin(x) + B \cdot \cos(x)$ verwendet werden kann.
Wir benötigen die Ableitungen des Ansatzes

$$\begin{gathered} S = A\sin x + B\cos x \\ S' = A\cos x - B\sin x \\ S'' = -A\sin x - B\cos x \\ S''' = -A\cos x + B\sin x \\ S^{(4)} = A\sin x + B\cos x \end{gathered}$$

,

die wir in die Differentialgleichung einsetzen:

$$\begin{gathered} A\sin x + B\cos x - 2A\cos x + 2B\sin x - 5A\sin x - 5B\cos x + \\ +8A\cos x - 8B\sin x + 4A\sin x + 4B\sin x = \cos x \\ 6A\cos x - cosx = 4B\sin x \\ \cos x(6A - 1) = 4B\sin x \\ 6A - 1 = 4B\tan x \qquad x = 06A = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}, \mathbf{B} = \mathbf{0} \end{gathered}$$

3.2.2 Lösung von $\mathbf{y^{(4)} + 2y''' + 5y'' + 8y' + 4y = 40e^x}$

Für die Störfunktion $s(x) = 40e^x$ schreiben wir allgemein $s(x) = 40 \cdot e^{1 \cdot x})$ - der Multiplikand 1 ist keine Lösung des charakteristischen Polynoms, so dass der Ansatz $y_p = Ke^x$ verwendet werden kann.
Wir benötigen die Ableitungen des Ansatzes

$$T = K40e^x, \qquad T' = K40e^x, \qquad T'' = K40e^x, \qquad ,T''' = K40e^x, \qquad T^{(4)} = K40e^x,$$

die wir in die Differentialgleichung einsetzen:

$$Ke^x + 2Ke^x + 5Ke^x + 8Ke^x + 4Ke^x = 40e^x$$
$$20Ke^x = 40e^x K = 2$$

3.2.3 Zusammenführung und allgemeine Lösung

$$\mathbf{y_{(h)+(p)}} = (\mathbf{C_1} + \mathbf{C_2 x})\mathbf{e^{-x}} + \underbrace{e^{-0x}}_{\mathbf{=1}}(\mathbf{C_3}\cos(\mathbf{2x}) + \mathbf{C_4}\sin(\mathbf{2x})) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\sin\mathbf{x} + \mathbf{2e^x}$$