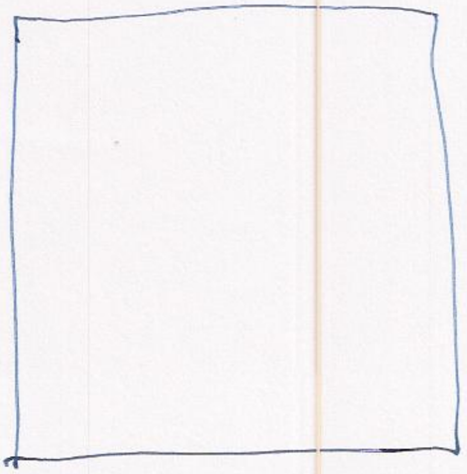


a I b I

$\varphi(x)$ stetig

$\varphi: I \to I$

$\quad\ \ \shortparallel \qquad \shortparallel$

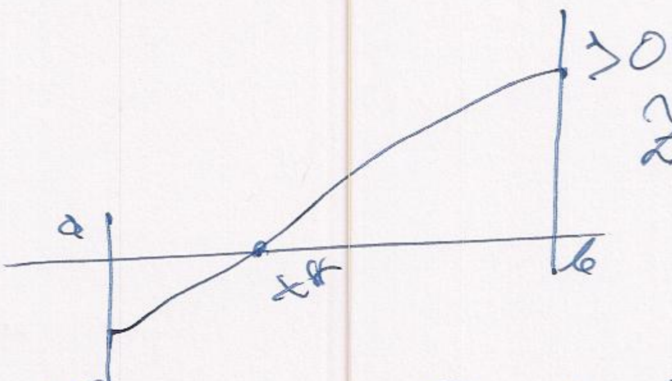
$[a,b] \quad [a,b]$

$f(x) = x - \varphi(x)$

f stetig

$$f(a) = a - \overbrace{\varphi(a)}^{\geq a} \leq 0$$

$$f(b) = b - \underbrace{\varphi(b)}_{\leq b} \geq 0$$



Zwischenwertsatz stet. Fkt

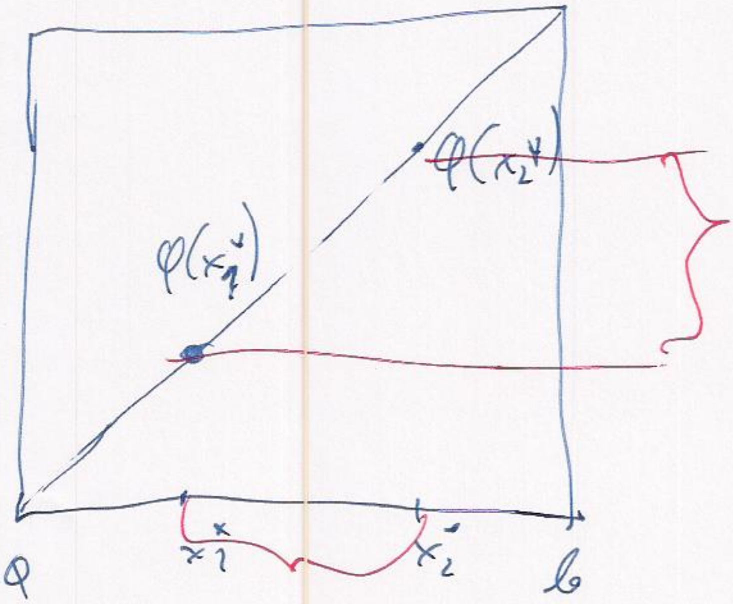
$\Rightarrow \exists x^* \in I: f(x^*) = 0$

$x^* - \varphi(x^*) = 0$

$x^* = \varphi(x^*)$

x^* : $\exists$ Fixpunkt

es gibt
genau ein
Fixpunkt



Ang.: x_1^*, x_2^* FP

$$x_1^* = \varphi(x_1^*) \qquad x_2^* = \varphi(x_2^*)$$

Abst. $|x_1^* - x_2^*|$
$\qquad \|$
$|\varphi(x_1^*) - \varphi(x_2^*)|$ ↳ nur L-Bdg.

Folge $(x_n)_n$ konv. gegen den einzigen FP x^* in I?

$$|x_{n+1} - x^*| = |\varphi(x_n) - x^*| =$$

$$= |\varphi(x_n) - \varphi(x^*)| \overset{\text{L-bed}}{\leq} \lambda \cdot |x_n - x^*|$$

$$\leq \overset{\text{iterieren}}{\ldots} \leq \lambda^2 \cdot |x_{n-1} - x^*| \leq$$

$$\ldots \leq \lambda^3 \cdot |x_{n-2} - x^*| \leq \ldots$$

$$\ldots \leq \lambda^{n+1} \cdot \underbrace{|x_0 - x^*|}_{\leq (b-a)}$$

$I = [a, b]$

$$0 < \lambda < 1$$

$$\Rightarrow \lambda^{n+1} \to 0$$

$$\Rightarrow |x_{n+1} - x^*| \to 0, \; n \to \infty, \text{ d.h. } x_n \to x^*$$

in Praxis: Lipschitzkonstante λ mit folgendem Satz häufig einfach zu erhalten.

Satz: Fkt. $\varphi: I \to \mathbb{R}$ erfüllt eine Lipschitzbdg. mit Konstante λ, falls φ stetig differenzierbar ist und auf I gilt:

$$|\varphi'(x)| \leq \lambda.$$

Beweis: Anwendung Mittelwertsatz

Bsp.: $\boxed{x = \varphi(x), \quad \varphi(x) = \frac{2}{x+1}}$

$$x_{n+1} = \frac{2}{x_n + 1}, \quad x_0 \text{ Startwert}$$

FP: $$x = \frac{2}{x+1}$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 + x = 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x+2)\cdot(x-1) = 0$$

FP: $x_1^* = 1$

FP: $x_2^* = -2$

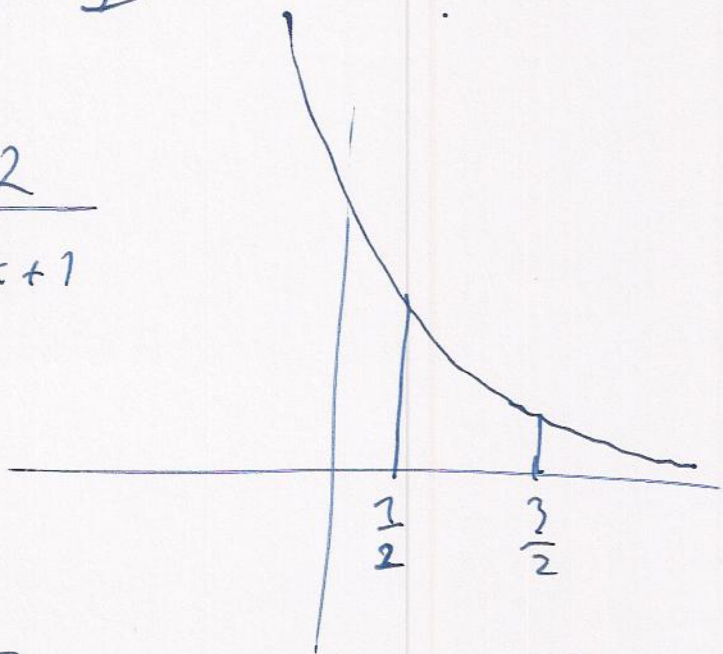
wir interessieren uns für pos. FP 1

wähle Intervall: $I = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

Konv. Iterationsverfahren dieser dein Vor.?

Fixpunktsatz:

• $\varphi(I) \subseteq I$?



$$\varphi(x) = \frac{2}{x+1}$$

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \in I$$

$$\varphi\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{\frac{3}{2}+1} = \frac{2}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5} \in I$$

• L-bdg. :

$$\varphi'(x) = -\frac{2}{(x+1)^2}$$

$x \in I$: $$|\varphi'(x)| = \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$|\varphi'(a)| = \left|\varphi'\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{2}{\left(\frac{1}{2}+1\right)^2} = \frac{2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}$$
$$= \frac{8}{9} = \lambda$$

Glg. $\boxed{f(x) = 0}$ lösen

$\Updownarrow$

$$\underbrace{x - f(x)}_{} = x$$

Glg. $\varphi(x) = x$ lösen

$\Leftrightarrow$ Fixpunkte von $\varphi(x)$ suchen

---

allgemeiner:

$$\boxed{\underbrace{x - f(x) \cdot g(x)}_{\varphi(x)} = x}$$ lösen,

mit $g(x) \neq 0$

NST $f(x)$ $\hat{=}$ Fixpunkt von $\varphi(x)$

g so wählen, dass φ Bdg. vom Fixpunktsatz erfüllt spezielle Lösungsverfahren

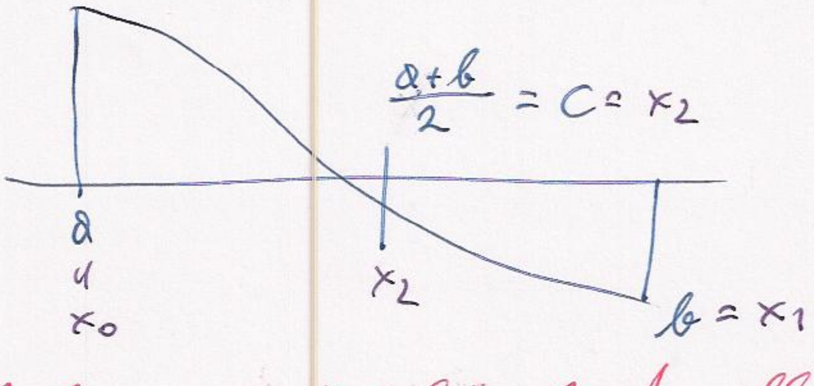
zum Lösen von $f(x) = 0$.

- Bisektion

  Vor.: • $f: \overset{[a,b]}{\underset{\shortparallel}{I}} \to \mathbb{R}$ stetige Fkt

  • $f(a) > 0,\ f(b) < 0$

  oder $f(a) < 0,\ f(b) > 0$



Idee: wiederholte <u>Intervallhalbierung</u>

$x_0 = a,$
$x_1 = b,$

$$x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2}$$

$$x_3 = \begin{cases} \dfrac{x_1 + x_2}{2}, & \text{falls } \overbrace{f(x_2) \cdot f(x_1)}^{\text{Funktionswerte entgegen gesetztes VZ}} \leq 0 \\ \dfrac{x_0 + x_2}{2}, & \text{falls } f(x_2) \cdot f(x_0) \leq 0 \end{cases}$$

$\vdots$

$$X_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{X_n + X_{n-1}}{2}, & \text{falls } f(x_n)\cdot f(x_{n-1}) \leq 0 \\ \dfrac{x_n + x_{n-2}}{2}, & \text{falls } f(x_n)\cdot f(x_{n-2}) \leq 0 \end{cases}$$

$\vdots$

Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ konvergiert gegen eine Nullstelle x^* von $f(x)$

Nachteil: relativ langsame Konvergenz

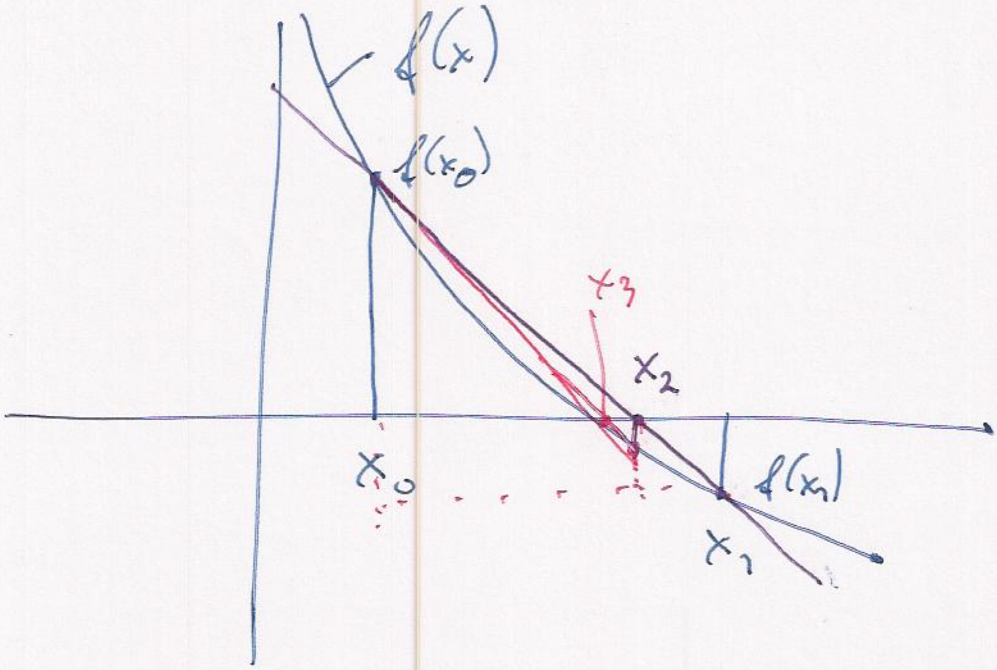
- Regula falsi

Vor.: • $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Fkt.

• $f(a) > 0,\ f(b) < 0$

oder $f(a) < 0,\ f(b) > 0$

Idee: betrachte Schnittpunkt der Sekante mit x-Achse:



$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{x_1 - x_2}{f(x_1)} \Rightarrow \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \cdot f(x_1) = x_1 - x_2$$

$\Rightarrow$

d) $$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \cdot f(x_1)$$

Vorteil Primitivform: Verfahren konvergiert immer!

Vorteil Standardform: Verfahren „schneller".

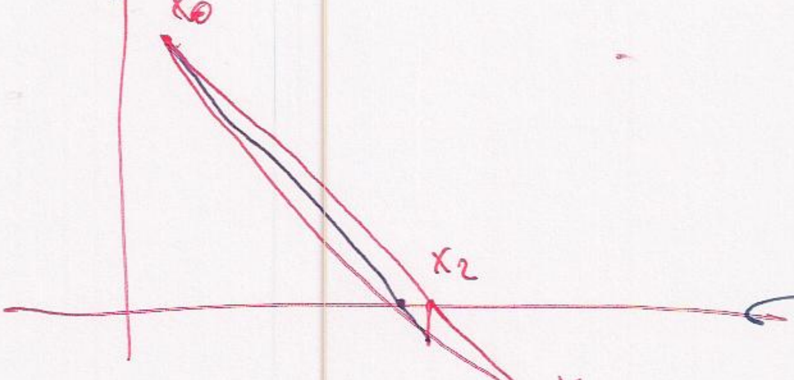
$\Rightarrow$ Iterationsfolge der sogenannten Standardform:

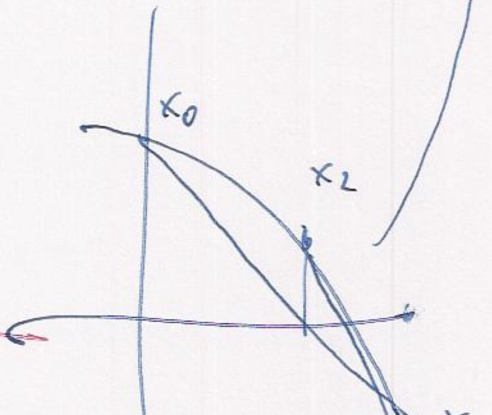
$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots}$$

Primitivform der regula falsi:

Prinzip wie Standardform, allerdings achtet man, dass Vorzeichen verschieden sind:

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n - \dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n), & \text{falls } f(x_n) \cdot f(x_{n-1}) \leq 0 \\[2em] x_n - \dfrac{x_n - x_{n-2}}{f(x_n) - f(x_{n-2})} \cdot f(x_n), & \text{falls } f(x_n) \cdot f(x_{n-2}) \leq 0 \end{cases}$$





Konvergenzordnung einer Iteration $(x_n)_n$ mit

$$(x_n)_n \to x^* :$$

Zahl $p \geq 1$:

$$\boxed{|x_{n+1} - x^*| \leq M \cdot |x_n - x^*|^p ,}$$

für fast alle n und $0 < M < \infty$.

- $p = 1$: lineare Konvergenz
- $p = 2$: quadratische Konvergenz

---

regula falsi:

- $p = \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{5}) \approx 1.62$ für Standardform (einfache NST)

- $p = 1$ für Primitivform (u. Mehrfach NST)