1. Übungsblatt (mit Lösungen)

3.0 VU Formale Modellierung

Gernot Salzer, Marion Scholz

25. Oktober 2017

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Schlussfolgerungen die zugrundeliegende Inferenzregel an und stellen Sie fest, ob diese gültig ist. Wenn ja, geben Sie unter Verwendung von Alltagsbegriffen eine weitere Schlussfolgerung an, die derselben Regel folgt. Wenn nein, modifizieren Sie die Inferenzregel möglichst geringfügig, um eine gültige Regel zu erhalten, und geben Sie dann eine konkrete Schlussfolgerung mit Alltagsbegriffen an, die dieser Regel entspricht.

(a) Siehe Denkblase rechts, wobei die ersten beiden Aussagen die Prämissen und die dritte die Konklusion darstellen.

(b) Steine schmecken nicht gut. Kaugummis schmecken gut. Daher ist kein Kaugummi ein Stein.

(c) Der Kiwi ist ein Vogel. Alle Kiwis fressen Beeren. Daher fressen Vögel Beeren.

Lösung

(a) Alle Hunde haben vier Beine.
Alle Tische haben vier Beine.
———
Alle Hunde sind Tische.

Inferenzregel:
Alle x haben Eigenschaft y.
Alle z haben Eigenschaft y.
———
Alle z sind x.

Diese Inferenzregel ist **nicht gültig**. Vertauscht man die erste Prämisse mit der Konklusion, erhält man eine gültige Inferenzregel:

Alle z sind x.
Alle x haben Eigenschaft y.
———
Alle z haben Eigenschaft y.

Ein Beispiel, dem dieselbe Inferenzregel zugrunde liegt:

Alle Rosen sind Blumen.
Alle Blumen wachsen.

Alle Rosen wachsen.

(b) Steine schmecken nicht gut.
Kaugummis schmecken gut.

Kein Stein ist ein Kaugummi.

I.R.: Alle x haben nicht die Eigenschaft y.
Alle z haben die Eigenschaft y.

Kein x ist ein z.

Diese Inferenzregel ist **gültig**. Andere Schlussfolgerung mit derselben Inferenzregel:

Vögel können nicht lesen.
Menschen können lesen.

Kein Vogel ist ein Mensch.

(c) Der Kiwi ist ein Vogel.
Alle Kiwis fressen Beeren.

Vögel fressen Beeren.

Inferenzregel: Alle x sind y.
Alle x fressen z.

Alle y fressen z.

Diese Inferenzregel ist **nicht gültig**. Vertauscht man die zweite Prämisse mit der Konklusion, erhält man eine gültige Inferenzregel:

Alle x sind y.
y fressen z.

Alle x fressen z.

Ein Beispiel, dem diese Inferenzregel zugrunde liegt:

Der Elefant ist ein Dickhäuter.
Dickhäuter fressen Gras.

Der Elefant frisst Gras.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Analysieren Sie den folgenden Text und identifizieren Sie die logische Struktur sowie die Elementaraussagen. Betrachten Sie dabei jeden Satz für sich, unabhängig von den anderen.
Es waren einmal ein Zwerg und ein Riese. Der Riese war sehr groß. Er konnte nur dann in seine Höhle hinein, wenn er sich duckte. Der Zwerg wollte dem Riesen helfen. Er beschloss, Dynamit zu kaufen, den Eingang mit einem Meißel zu vergrößern oder notfalls sogar beide Maßnahmen zu ergreifen. Aber wenn er Dynamit kaufen wollte, musste er dazu entweder ins Dorf laufen oder zum benachbarten Bauern. Das Dorf war sehr weit weg und der Bauer nicht sehr nett. Also setzte er sich stattdessen auf den Rücken vom Riesen und vergrößerte Stück für Stück das Loch mit einem Meißel, während er gleichzeitig eine Grubenlampe hielt, damit er etwas sehen konnte. Das Loch war nun größer und der Zwerg und der Riese waren glücklich und zufrieden.

Lösung

Wenn Sie die vorgeschlagenen Formalisierungen der Sätze in der klassischen Aussagenlogik unbefriedigend finden, weil viele Aspekte der natürlichsprachlichen Äußerungen unberücksichtigt bleiben, dann hat das seine Berechtigung. Die Aussagenlogik ist stark beschränkt in dem, was sie ausdrücken kann. Etwa ist es nicht möglich, die Gemeinsamkeiten und die Unterschiede von Aussagen wie „ich lese", „ich kann lesen" und „ich will lesen" gleichzeitig zu formalisieren. Wählt man verschiedene Aussagenvariablen dafür, betont man den Unterschied und verliert die Information, dass es in allen drei Aussagen um das Lesen geht. Wählt man hingegen dieselbe Variable für die drei Aussagen, betont man die Gemeinsamkeit des Lesens, verliert aber die Information, dass es einmal um eine Tätigkeit, einmal um eine Möglichkeit und einmal um eine Absicht geht.

(a) Es waren einmal ein Zwerg und ein Riese.
A … Es war einmal ein Zwerg.
B … Es war einmal ein Riese.
Struktur: A und B
Formel: $A \wedge B$

(b) Der Riese war sehr groß.
A … Der Riese war sehr groß.
Struktur: A
Formel: A

(c) Er konnte nur dann in seine Höhle hinein, wenn er sich duckte.
A … Der Riese konnte in seine Höhle.
B … Der Riese duckte sich.
Struktur: A nur dann wenn B
Formel: $A \supset B$

Beachten Sie, dass sich durch das Wort „nur" die Richtung der Implikation umdreht.

(d) Der Zwerg wollte dem Riesen helfen.
A … Der Zwerg wollte dem Riesen helfen.
Struktur: A
Formel: A

(e) Er beschloss, Dynamit zu kaufen, den Eingang mit einem Meißel zu vergrößern oder notfalls sogar beide Maßnahmen zu ergreifen.
A … Er beschloss Dynamit zu kaufen.
B … Er beschloss den Eingang mit einem Meißel zu vergrößern.
Struktur: A oder B
Formel: $A \vee B$

(f) Aber wenn er Dynamit kaufen wollte, musste er dazu entweder ins Dorf laufen oder zum benachbarten Bauern.
A … Er wollte Dynamit kaufen.

B ... Er musste ins Dorf laufen.
C ... Er musste zum benachbarten Bauern laufen.
Struktur: Wenn A dann B oder C
Formel: $A \supset (B \not\equiv C)$

Mit dem exklusiven Oder schließen wir aus, dass er beide Dinge macht.

(g) Das Dorf war sehr weit weg und der Bauer nicht sehr nett.
A ... Das Dorf war weit weg.
B ... Der Bauer war sehr nett.
Struktur: A und nicht B
Formel: $A \wedge \neg B$

(h) Also setzte er sich stattdessen auf den Rücken vom Riesen und vergrößerte Stück für Stück das Loch mit einem Meißel, während er gleichzeitig eine Grubenlampe hielt, damit er etwas sehen konnte.
A ... Er setzte sich auf den Rücken vom Riesen.
B ... Er vergrößerte Stück für Stück das Loch mit einem Meißel.
C ... Er hielt eine Grubenlampe.
D ... Er konnte etwas sehen.
Struktur: A und B und C und D falls C
Formel: $A \wedge B \wedge C \wedge (C \supset D)$ oder $A \wedge B \wedge C \wedge D$

Der mit dem Wort „damit" eingeleitete Teil gibt den Zweck der vorangegangenen Handlung an. Derartige Begründungen lassen sich allenfalls in einer Modallogik ausdrücken, nicht aber in der klassischen Aussagenlogik. Hier kann man nur ausdrücken, dass C zutrifft und dass daraus D folgt, oder man ersetzt die Implikation gleich durch ihr Ergebnis, D. Beides ist logisch gleichwertig, da ja C gilt.

(i) Das Loch war nun größer und der Zwerg und der Riese waren glücklich und zufrieden.
A ... Das Loch war größer.
B ... Der Zwerg war glücklich.
C ... Der Zwerg war zufrieden.
D ... Der Riese war glücklich.
E ... Der Riese war zufrieden.
Struktur: A und B und C und D und E
Formel: $A \wedge B \wedge C \wedge D \wedge E$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Anton, Bea und Carl haben bereits die FMod-Prüfung geschrieben. Wie können die folgenden Sätze formalisiert werden?

(a) Anton besteht als einziger der drei die Prüfung.

(b) Carl besteht als einziger der drei nicht die Prüfung.

(c) Nur einer der drei besteht die Prüfung.

(d) Mindestens zwei der drei bestehen die Prüfung.

(e) Höchtens zwei der drei bestehen die Prüfung.

(f) Anton besteht die Prüfung nur, wenn Carl sie besteht.

(g) Wenn Bea die Prüfung besteht, dann bestehen Anton oder Carl sie auch.

(h) Entweder Bea besteht die Prüfung oder nicht.

(i) Anton und Bea bestehen die Prüfung.

Lösung

Wir verwenden die folgenden Aussagenvariablen.
$A \ldots$ Anton besteht die Prüfung.
$B \ldots$ Bea besteht die Prüfung.
$C \ldots$ Carl besteht die Prüfung.

(a) $A \wedge \neg B \wedge \neg C$

(b) $A \wedge B \wedge \neg C$

(c) $(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$

(d) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

(e) $\neg(A \wedge B \wedge C)$ oder $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$

(f) $A \supset C$

(g) $B \supset (A \vee C)$

(h) $B \not\equiv \neg B$ oder $B \vee \neg B$

(i) $A \wedge B$

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Sei F die Formel $(((\neg A \vee B) \wedge (B \supset (\neg C \wedge \neg A))) \wedge (A \vee C))$.

(a) Zeigen Sie, dass F syntaktisch korrekt ist.

(b) Berechnen Sie schrittweise $\mathsf{val}_I(F)$ für $I(A) = 1$, $I(B) = 0$ und $I(C) = 1$.

(c) Verwenden Sie eine Wahrheitstafel um festzustellen, ob die Formel F gültig, erfüllbar, widerlegbar und/oder unerfüllbar ist.

Lösung

(a) Laut Vorlesung ist die Menge $\mathcal{A}$ der aussagenlogischen Formeln die kleinste Menge, für die gilt:

(a1) $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$

(a2) $\{\top, \bot\} \subseteq \mathcal{A}$

(a3) $\neg F \in \mathcal{A}$, wenn $F \in \mathcal{A}$.

(a4) $(F * G) \in \mathcal{A}$, wenn $F, G \in \mathcal{A}$ und $* \in \{\land, \uparrow, \lor, \downarrow, \equiv, \not\equiv, \supset, \subset\}$.

wobei $\mathcal{V} = \{A, B, C, \dots\}$ die Menge der aussagenlogischen Variablen ist.

Wir zeigen, dass $(((\neg A \lor B) \land (B \supset (\neg C \land \neg A))) \land (A \lor C))$ eine aussagenlogische Formel gemäß dieser Definition ist.

(1) Die Variablen A, B und C sind Formeln (a1).

(2) Da A eine Formel ist (Punkt 1), ist auch $\neg A$ eine Formel (a3).

(3) Da $\neg A$ und B Formeln sind (Punkt 2 bzw. 1), ist auch $(\neg A \lor B)$ eine Formel (a4).

(4) Da C eine Formel ist (Punkt 1), ist auch $\neg C$ eine Formel (a3).

(5) Da $\neg C$ und $\neg A$ Formeln sind (Punkt 4 bzw. 2), ist auch $(\neg C \land \neg A)$ eine Formel (a4).

(6) Da B und $(\neg C \land \neg A)$ Formeln sind (Punkt 1 bzw. 5), ist auch $(B \supset (\neg C \land \neg A))$ eine Formel (a4).

(7) Da $(\neg A \lor B)$ und $(B \supset (\neg C \land \neg A))$ Formeln sind (Punkt 3 bzw. 6), ist auch $((\neg A \lor B) \land (B \supset (\neg C \land \neg A)))$ eine Formel (a4).

(8) Da A und C Formeln sind (Punkt 1), ist auch $(A \lor C)$ eine Formel (a4).

(9) Da $((\neg A \lor B) \land (B \supset (\neg C \land \neg A)))$ und $(A \lor C)$ Formeln sind (Punkt 7 bzw. 8), ist auch $(((\neg A \lor B) \land (B \supset (\neg C \land \neg A))) \land (A \lor C))$ eine Formel (a4).

Dieselbe Argumentation in Form eines Baumes: Die horizontalen Linien sind als wenn-dann zu lesen, wobei die Prämissen des Schlusses oberhalb und die Konklusion unterhalb der Linie angegeben werden. Neben dem Strich steht die angewendete Regel.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \in \mathcal{V}}{A \in \mathcal{A}}\,a1}{\neg A \in \mathcal{A}}\,a3 \quad \dfrac{B \in \mathcal{V}}{B \in \mathcal{A}}\,a1}{(\neg A \lor B) \in \mathcal{A}}\,a4 \quad \dfrac{\dfrac{B \in \mathcal{V}}{B \in \mathcal{A}}\,a1 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{C \in \mathcal{V}}{C \in \mathcal{A}}\,a1}{\neg C \in \mathcal{A}}\,a3 \quad \dfrac{\dfrac{A \in \mathcal{V}}{A \in \mathcal{A}}\,a1}{\neg A \in \mathcal{A}}\,a3}{(\neg C \land \neg A) \in \mathcal{A}}\,a4}{(B \supset (\neg C \land \neg A)) \in \mathcal{A}}\,a4}{((\neg A \lor B) \land (B \supset (\neg C \land \neg A)) \in \mathcal{A}}\,a4 \quad \dfrac{\dfrac{A \in \mathcal{V}}{A \in \mathcal{A}}\,a1 \quad \dfrac{C \in \mathcal{V}}{C \in \mathcal{A}}\,a1}{(A \lor C) \in \mathcal{A}}\,a4}{(((\neg A \lor B) \land (B \supset (\neg C \land \neg A))) \land (A \lor C)) \in \mathcal{A}}\,a4$$

(b) $\mathsf{val}_I\left((((\neg A \vee B) \wedge (B \supset (\neg C \wedge \neg A))) \wedge (A \vee C))\right)$

$= \mathsf{val}_I\left(((\neg A \vee B) \wedge (B \supset (\neg C \wedge \neg A)))\right) \text{ and } \mathsf{val}_I\left((A \vee C)\right)$

$= \mathsf{val}_I\left((\neg A \vee B)\right) \text{ and } \mathsf{val}_I\left((B \supset (\neg C \wedge \neg A))\right) \text{ and } (\mathsf{val}_I(A) \text{ or } \mathsf{val}_I(C))$

$= (\mathsf{val}_I(\neg A) \text{ or } \mathsf{val}_I(B)) \text{ and } (\mathsf{val}_I(B) \text{ implies } \mathsf{val}_I((\neg C \wedge \neg A))) \text{ and } (I(A) \text{ or } I(C))$

$= (\text{not } \mathsf{val}_I(A) \text{ or } I(B)) \text{ and } (I(B) \text{ implies } (\mathsf{val}_I(\neg C) \text{ and } \mathsf{val}_I(\neg A)) \text{ and } (1 \text{ or } 1)$

$= (\text{not } I(A) \text{ or } 0) \text{ and } (0 \text{ implies } (\text{not } \mathsf{val}_I(C) \text{ and not } \mathsf{val}_I(A))) \text{ and } 1$

$= (\text{not } 1 \text{ or } 0) \text{ and } (0 \text{ implies } (\text{not } 1 \text{ and not } 1)) \text{ and } 1$

$= (0 \text{ or } 0) \text{ and } (0 \text{ implies } (0 \text{ and } 0)) \text{ and } 1$

$= 0 \text{ and } (0 \text{ implies } 0) \text{ and } 1$

$= 0 \text{ and } 1 \text{ and } 1 = 0$

(c) Wir berechnen den Wert der Formel für alle Interpretationen mittels einer Wahrheitstafel. An dieser lassen sich dann die Eigenschaften der Formel ablesen.

A	B	C	$(((\neg A \vee B) \wedge (B \supset (\neg C \wedge \neg A))) \wedge (A \vee C))$								
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**0**	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	**1**	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	**0**	0
0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	**0**	1
1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	**0**	1
1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	**0**	1
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	**0**	1
1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	**0**	1

Die Formel ist somit erfüllbar und widerlegbar, aber weder gültig noch unerfüllbar.

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die beiden Formeln

$$((\neg B \vee (\neg(A \vee \neg A) \wedge C)) \supset D) \quad \text{und} \quad (D \vee B)$$

äquivalent sind, und zwar

(a) mit Hilfe einer Wahrheitstafel.

(b) durch algebraische Umformungen.

Lösung

(a) Wahrheitstafel:

A	B	C	D	$((\neg B$	$\vee$	$(\neg(A$	$\vee \neg A)$	$\wedge C))$	$\supset D)$	$=$	$(D \vee B)$
0	0	0	0	1	1	0	1	0	**0**	✓	**0**
0	0	0	1	1	1	0	1	0	**1**	✓	**1**
0	0	1	0	1	1	0	1	0	**0**	✓	**0**
0	0	1	1	1	1	0	1	0	**1**	✓	**1**
0	1	0	0	0	0	0	1	0	**1**	✓	**1**
0	1	0	1	0	0	0	1	0	**1**	✓	**1**
0	1	1	0	0	0	0	1	0	**1**	✓	**1**
0	1	1	1	0	0	0	1	0	**1**	✓	**1**
1	0	0	0	1	1	0	1	0	**0**	✓	**0**
1	0	0	1	1	1	0	1	0	**1**	✓	**1**
1	0	1	0	1	1	0	1	0	**0**	✓	**0**
1	0	1	1	1	1	0	1	0	**1**	✓	**1**
1	1	0	0	0	0	0	1	0	**1**	✓	**1**
1	1	0	1	0	0	0	1	0	**1**	✓	**1**
1	1	1	0	0	0	0	1	0	**1**	✓	**1**
1	1	1	1	0	0	0	1	0	**1**	✓	**1**

Da beide Formeln in sämtlichen Wahrheitsbelegungen denselben Wert liefern, sind sie äquivalent.

Tatsächlich ist es gar nicht notwendig, die Wahrheitstabelle vollständig zu befüllen. Wir wissen zum Beispiel, dass $\wedge$ den Wert 0 liefert, wenn ein Argument den Wert 0 besitzt. Damit ist das Ergebnis von $(\neg(A \vee \neg A) \wedge C)$ bereits mit 0 festgelegt.

A	B	C	D	$((\neg B$	$\vee$	$(\neg(A$	$\vee \neg A)$	$\wedge C))$	$\supset D)$	$=$	$(D \vee B)$
0	0	0	0	1	1			0	**0**	✓	**0**
0	0	0	1	1	1			0	**1**	✓	**1**
0	0	1	0	1	1			0	**0**	✓	**0**
0	0	1	1	1	1			0	**1**	✓	**1**
0	1	0	0	0	0			0	**1**	✓	**1**
0	1	0	1	0	0			0	**1**	✓	**1**
0	1	1	0	0	0			0	**1**	✓	**1**
0	1	1	1	0	0			0	**1**	✓	**1**
1	0	0	0	1	1			0	**0**	✓	**0**
1	0	0	1	1	1			0	**1**	✓	**1**
1	0	1	0	1	1			0	**0**	✓	**0**
1	0	1	1	1	1			0	**1**	✓	**1**
1	1	0	0	0	0			0	**1**	✓	**1**
1	1	0	1	0	0			0	**1**	✓	**1**
1	1	1	0	0	0			0	**1**	✓	**1**
1	1	1	1	0	0			0	**1**	✓	**1**

(b) Wir vereinfachen die erste Formel. Da wir dabei die zweite Formel erhalten, sind die ursprünglichen Formeln äquivalent.

$$
\begin{aligned}
&(\neg B \vee (\neg(A \vee \neg A) \wedge C)) \supset D && F \vee \neg F = \top \\
&= (\neg B \vee (\neg \top \wedge C)) \supset D && \neg \top = \bot \\
&= (\neg B \vee (\bot \wedge C)) \supset D && \bot \wedge F = \bot \\
&= (\neg B \vee \bot) \supset D && F \vee \bot = F \\
&= \neg B \supset D && F \supset G = \neg F \vee G \\
&= \neg\neg B \vee D && \neg\neg F = F \\
&= B \vee D
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Gegeben sei folgender Sachverhalt:
Leonard oder Sheldon ist ein Wissenschafter. Howard ist genau dann Wissenschafter, wenn Sheldon Wissenschafter ist. Entweder Sheldon ist Wissenschafter oder Howard, beide sicherlich nicht.
Kann man aus diesen Argumenten schließen, dass Leonard Wissenschafter ist? Wie sieht die Formel aus, deren Gültigkeit/Nichtgültigkeit zeigen würde, dass die Konsequenzbeziehung gilt/nicht gilt?

Lösung

Formalisierung:
L ... Leonard ist Wissenschafter.
S ... Sheldon ist Wissenschafter.
H ... Howard ist Wissenschafter.

- $L \vee S$ ... Leonard oder Sheldon ist ein Wissenschafter.
- $H \equiv S$ ... Howard ist genau dann Wissenschafter, wenn Sheldon Wissenschafter ist.
- $S \not\equiv H$ ... Entweder Sheldon ist Wissenschafter oder Howard, beide sicherlich nicht.

Wir müssen überprüfen, ob die Konsequenzbeziehung $L \vee S,\ H \equiv S,\ S \not\equiv H \models L$ gilt.

$I(L)$	$I(S)$	$I(H)$	$L \vee S,$	$H \equiv S,$	$S \not\equiv H$	$\models_I$	L
0	0	0	0	1	0	✓	0
0	0	1	0	0	1	✓	0
0	1	0	1	0	1	✓	0
0	1	1	1	1	0	✓	0
1	0	0	1	1	0	✓	1
1	0	1	1	0	1	✓	1
1	1	0	1	0	1	✓	1
1	1	1	1	1	0	✓	1

Ja, man kann aus den gegebenen Argumenten schließen, dass Leonard Wissenschafter ist. Oder anders formuliert: Die Formel L ist eine logische Konsequenz der Prämissen $L \vee S$, $H \equiv S$ und $S \not\equiv H$.
Arbeitsvereinfachung: Ist in einer Interpretation eine der Prämissen falsch oder die Konklusion wahr, müssen die übrigen Formeln nicht mehr ausgewertet werden, da die Beziehung $\models_I$ dann bereits erfüllt ist. Umgekehrt kann man die Erstellung der Tabelle abbrechen, sobald man eine Interpretation I findet, für die $\models_I$ nicht gilt.
Beginnt man in dieser Aufgabe die Auswertung mit der Konklusion, müssen wir den Wert der Prämissen nur für jene Interpretationen bestimmen, bei denen L den Wert 0 besitzt. In den ersten beiden Interpretationen ist bereits die erste Prämisse, $L \vee S$, falsch, somit müssen nur für die dritte und vierte Interpretatation auch die übrigen Prämissen betrachtet werden.

$I(L)$	$I(S)$	$I(H)$	$L \vee S,$	$H \equiv S,$	$S \not\equiv H$	$\models_I$	L
0	0	0	0			✓	0
0	0	1	0			✓	0
0	1	0	1	0	1	✓	0
0	1	1	1	1	0	✓	0
1	0	0				✓	1
1	0	1				✓	1
1	1	0				✓	1
1	1	1				✓	1

Formel zur Konsequenzbeziehung: Die Konsequenzbeziehung

$$L \vee S,\ H \equiv S,\ S \not\equiv H \models L$$

(„L folgt logisch aus den Formeln $L \vee S$, $H \equiv S$ und $S \not\equiv H$“) gilt genau dann, wenn die Formel

$$((L \vee S) \wedge (H \equiv S) \wedge (S \not\equiv H)) \supset L$$

gültig ist.
Anmerkung: Diese Aufgabe stellt einen untypischen Randfall dar, da die Prämissen $H \equiv S$ und $S \not\equiv H$ widersprüchlich sind und nie gleichzeitig wahr sein können. Dadurch ist nicht nur L eine logische Konsequenz der Prämissen, sondern paradoxerweise *jede* Formel, insbesondere auch $\neg L$.

Aufgabe 7 (2 Punkte)

Sei f folgende dreistellige Funktion.

x	y	z	$f(x,y,z)$	x	y	z	$f(x,y,z)$
1	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1

Stellen Sie f durch eine Formel in

(a) konjunktiver

(b) disjunktiver

Normalform dar.

Lösung

(a) $(\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3) \wedge (\neg A_1 \vee A_2 \vee \neg A_3) \wedge (A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3) \wedge (A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3)$

(b) $(A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3) \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3) \vee (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \vee (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3)$

Aufgabe 8 (2 Punkte)

Sei F die Formel $((A \supset B) \supset C) \supset (\neg B \supset \neg C)$.

(a) Bestimmen Sie eine zu F äquivalente Formel in konjunktiver Normalform. Verwenden Sie die semantische Methode.

(b) Bestimmen Sie eine zu F äquivalente Formel in disjunktiver Normalform. Verwenden Sie die algebraische Methode.

Lösung

(a) KNF mittels semantischer Methode:

A	B	C	$((A \supset B) \supset C) \supset (\neg B \supset \neg C)$			
0	0	0	1	0	**1**	1
0	0	1	1	1	**0**	0
0	1	0	1	0	**1**	1
0	1	1	1	1	**1**	1
1	0	0	0	1	**1**	1
1	0	1	0	1	**0**	0
1	1	0	1	0	**1**	1
1	1	1	1	1	**1**	1

Aus dieser Tafel lässt sich folgende KNF ablesen:

$$(A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C)$$

(b) DNF mittels algebraischer Methode:

$$
\begin{array}{ll}
((A \supset B) \supset C) \supset (\neg B \supset \neg C) & \scriptstyle F \supset G = \neg F \vee G \\
= ((\neg A \vee B) \supset C) \supset (\neg B \supset \neg C) & \scriptstyle F \supset G = \neg F \vee G \\
= (\neg(\neg A \vee B) \vee C) \supset (\neg B \supset \neg C) & \scriptstyle \neg(F \vee G) = \neg F \wedge \neg G \\
= ((\neg\neg A \wedge \neg B) \vee C) \supset (\neg B \supset \neg C) & \scriptstyle \neg\neg F = F \\
= ((A \wedge \neg B) \vee C) \supset (\neg B \supset \neg C) & \scriptstyle F \supset G = \neg F \vee G \\
= ((A \wedge \neg B) \vee C) \supset (\neg\neg B \vee \neg C) & \scriptstyle \neg\neg F = F \\
= ((A \wedge \neg B) \vee C) \supset (B \vee \neg C) & \scriptstyle F \supset G = \neg F \vee G \\
= \neg((A \wedge \neg B) \vee C) \vee (B \vee \neg C) & \scriptstyle \neg(F \vee G) = \neg F \wedge \neg G \\
= (\neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg C) \vee B \vee \neg C & \scriptstyle \neg(F \wedge G) = \neg F \vee \neg G \\
= (\neg A \vee \neg\neg B) \wedge \neg C) \vee B \vee \neg C & \scriptstyle \neg\neg F = F \\
= (\neg A \vee B) \wedge \neg C) \vee B \vee \neg C & \scriptstyle F \wedge (G \vee H) = (F \wedge G) \vee (F \wedge H) \\
= (\neg A \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg C) \vee B \vee \neg C & \scriptstyle F \vee (F \wedge G) = F \\
= B \vee \neg C &
\end{array}
$$

Aufgabe 9 (6 Punkte)

Aladdin findet in einer Höhle zwei Schatztruhen. Er weiß, dass in jeder Truhe entweder eine tödliche Falle oder ein Schatz ist.

- *Auf Truhe A steht: „Zumindest eine dieser zwei Truhen beinhaltet einen Schatz.“*
- *Auf Truhe B steht: „A beinhaltet eine tödliche Falle.“*

Aladdin weiß, dass entweder beide Inschriften wahr sind oder beide falsch.

Gelingt es Aladdin herauszufinden, ob in einer der Truhen tatsächlich ein Schatz ist? Falls ja, welche Schatztruhe soll er öffnen?

(a) Modellieren Sie das Problem mittels aussagenlogischer Formeln.

(b) Leiten Sie daraus die Antwort mit Hilfe einer Wahrheitstabelle ab.

(c) Formen Sie die Konjunktion der Formeln in eine disjunktive Normalform um. Wie lässt sich daraus die Antwort ablesen?

Lösung

(a) Wir führen folgende Aussagenvariablen ein:

A … Schatztruhe A beinhaltet einen Schatz.
B … Schatztruhe B beinhaltet einen Schatz.

Wegen der Feststellung *„Er weiß, dass in jeder Truhe entweder eine tödliche Falle oder ein Schatz ist.“* ist die Negation der Variablen, $\neg A$ bzw. $\neg B$, gleichbedeutend mit „Schatztruhe A bzw. B beinhaltet eine tödliche Falle“.

Nun formalisieren wir die vorhandenen Informationen:

$A \vee B$	Zumindest eine dieser zwei Truhen beinhaltet einen Schatz.
$\neg A$	A beinhaltet eine tödliche Falle.
$(A \vee B) \equiv \neg A$	Entweder sind beide Inschriften wahr oder beide sind falsch.

(b) Wir suchen alle Wahrheitsbelegungen für die Variablen A und B, sodass die Formel $(A \vee B) \equiv \neg A$ wahr wird.

A	B	$(A \vee B)$	$\equiv$	$\neg A$	
0	0	0	0	1	
0	1	1	1	1	✓
1	0	1	0	0	
1	1	1	0	0	

Aladdin kann Schatztruhe B öffnen, denn in dieser befindet sich ein Schatz.

(c)
$$\begin{aligned}
(A \vee B) \equiv \neg A &= ((A \vee B) \wedge \neg A) \vee (\neg(A \vee B) \wedge \neg\neg A) \\
&= ((A \vee B) \wedge \neg A) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge A) \\
&= ((A \vee B) \wedge \neg A) \vee (\perp \wedge \neg B) \\
&= ((A \vee B) \wedge \neg A) \vee \perp \\
&= (A \vee B) \wedge \neg A \\
&= (A \wedge \neg A) \vee (B \wedge \neg A) \\
&= \perp \vee (B \wedge \neg A) \\
&= B \wedge \neg A
\end{aligned}$$

Die ursprüngliche Formel ist also äquivalent zur disjunktiven Normalform $B \wedge \neg A$, die nur aus einem Disjunkt besteht. Jedes Disjunkt der Normalform beschreibt eine oder mehrere Interpretationen, in denen die Normalform wahr ist. Das Disjunkt $B \wedge \neg A$ entspricht der Interpretation mit $I(A) = 0$ und $I(B) = 1$, es befindet sich somit in Truhe B ein Schatz, nicht aber in Truhe A.

Aufgabe 10 **(7 Punkte)**

In der Klasse 7C soll ein Geografietest stattfinden. Doch als der Lehrer die Klasse betreten will, kann er die Tür nicht öffnen: sie wurde von innen mit Sesseln verbarrikadiert. Ein paar Tage später befragt die Direktorin die üblichen Verdächtigen um herauszufinden, wer bei diesem Streich beteiligt war. Anschließend hält sie folgende Eindrücke fest:

- Wenn Franz beteiligt war, dann sicher auch Karl und Sarah.
- Wenn Sarah beteiligt war, dann war Elias sicher nicht dabei.

- Franz oder Elias waren sicher mit von der Partie, vielleicht sogar beide.
- Elias und Karl mögen einander gar nicht, die beiden waren sicher nicht gemeinsam beteiligt.
- Franz war nur dann beteiligt, wenn Elias beteiligt war.

Welche Personen verdächtigt die Direktorin, am Streich beteiligt gewesen zu sein? Beantworten Sie die Frage mit Hilfe der Aussagenlogik.

(a) Formalisieren Sie die beschriebene Situation inklusive aller Anhaltspunkte mittels aussagenlogischer Formeln. Geben Sie die Bedeutung der von Ihnen verwendeten Aussagenvariablen an.

(b) Verwenden Sie eine Wahrheitstafel, um aus den Formeln die Antwort abzuleiten.

(c) Bilden Sie aus den Formeln eine Konjunktion, formen Sie sie in eine möglichst einfache disjunktive Normalform um und lesen Sie daraus die Antwort ab.

(d) Wie lässt sich die Antwort mit Hilfe eines Sat-Solvers aus den Formeln berechnen?

Lösung

(a) Aussagenvariablen und ihre Bedeutung:

E ... Elias war beteiligt.
F ... Franz war beteiligt.
K ... Karl war beteiligt.
S ... Sarah war beteiligt.

Aussagenlogische Formeln:

$F_1 := F \supset (K \wedge S)$	wenn F dann K und S
$F_2 := S \supset \neg E$	wenn S dann nicht E
$F_3 := F \vee E$	F oder E
$F_4 := \neg(E \wedge K)$	E und K nicht gemeinsam
$F_5 := F \supset E$	wenn F dann E

(b) Wir suchen alle Wahrheitsbelegungen für die Variablen E, F, K, und S, sodass die

Formeln $F_1, \dots, F_5$ wahr werden.

E	F	K	S	$F \supset (K \wedge S)$	$S \supset \neg E$	$F \vee E$	$\neg(E \wedge K)$	$F \supset E$	
0	0	0	0	1	1	0	1	1	
0	0	0	1	1	1	0	1	1	
0	0	1	0	1	1	0	1	1	
0	0	1	1	1	1	0	1	1	
0	1	0	0	0	1	1	1	0	
0	1	0	1	0	1	1	1	0	
0	1	1	0	0	1	1	1	0	
0	1	1	1	1	1	1	1	0	
1	0	0	0	1	1	1	1	1	✓
1	0	0	1	1	0	1	1	1	
1	0	1	0	1	1	1	0	1	
1	0	1	1	1	0	1	0	1	
1	1	0	0	0	1	1	1	1	
1	1	0	1	0	0	1	1	1	
1	1	1	0	0	1	1	0	1	
1	1	1	1	1	0	1	0	1	

Die Direktorin verdächtigt Elias.

(c)

$$
\begin{aligned}
&(F \supset (K \wedge S)) \wedge (S \supset \neg E) \wedge (F \vee E) \wedge \neg(E \wedge K) \wedge (F \supset E) && (1)\\
&= (\neg F \vee (K \wedge S)) \wedge (\neg S \vee \neg E) \wedge (F \vee E) \wedge (\neg E \vee \neg K) \wedge (\neg F \vee E) && (2)\\
&= (\neg F \vee (K \wedge S)) \wedge (\neg S \vee \neg E) \wedge (F \vee E) \wedge (\neg E \vee \neg K) \wedge (\neg F \vee E) \wedge E && (3)\\
&= (\neg F \vee (K \wedge S)) \wedge (\neg S \vee \neg E) \wedge (\neg E \vee \neg K) \wedge E && (4)\\
&= (\neg F \vee (K \wedge S)) \wedge (\neg S \vee \neg E) \wedge (\neg E \vee \neg K) \wedge E \wedge \neg S && (5)\\
&= (\neg F \vee (K \wedge S)) \wedge (\neg E \vee \neg K) \wedge E \wedge \neg S && (6)\\
&= (\neg F \vee (K \wedge S)) \wedge (\neg E \vee \neg K) \wedge E \wedge \neg S \wedge \neg K && (7)\\
&= (\neg F \vee (K \wedge S)) \wedge E \wedge \neg S \wedge \neg K && (8)\\
&= (\neg F \wedge E \wedge \neg S \wedge \neg K) \vee (K \wedge S \wedge E \wedge \neg S \wedge \neg K) && (9)\\
&= (\neg F \wedge E \wedge \neg S \wedge \neg K) \vee \bot && (10)\\
&= (\neg F \wedge E \wedge \neg S \wedge \neg K) && (11)
\end{aligned}
$$

Die ursprüngliche Modellierung ist also equivalent zur Formel $\neg F \wedge E \wedge \neg S \wedge \neg K$, die nur in der Interpretation mit $I(E) = 1$ und $I(F) = I(S) = I(K) = 0$ wahr ist. Der Verdächtige ist somit Elias.

Zu den Umformungen: In Zeile 2 wurde die Implikation ersetzt. In den Zeilen 3, 5 und 7 wurde die aussagenlogische Resolutionsregel angewendet, die zunächst die Formel verlängert:

$$(F \vee G) \wedge (\neg F \vee H) = (F \vee G) \wedge (\neg F \vee H) \wedge (G \vee H)$$

Da hier $G = H$ bzw. $H = \top$ gilt, lässt sich anschließend das Absorptionsgesetz anwenden und die Formel vereinfachen.

$$(F \vee G) \wedge (\neg F \vee G) = (F \vee G) \wedge (\neg F \vee G) \wedge G = G$$

beziehungsweise

$$(F \vee G) \wedge \neg F = (F \vee G) \wedge \neg F \wedge G = \neg F \wedge G$$

Eine andere Rechtfertigung für diese Umformungen ist das lokale Anwenden des Distributivgesetzes mit anschließender Vereinfachung, wie z.B. von Zeile 2 auf Zeile 4:

$$(F \vee E) \wedge (\neg F \vee E) = (F \wedge \neg F) \vee E = \bot \vee E = E$$

Oder von Zeile 4 auf Zeile 6:

$$(\neg S \vee \neg E) \wedge E = (\neg S \wedge E) \vee (\neg E \wedge E) = (\neg S \wedge E) \vee \bot = \neg S \wedge E$$

Oder von Zeile 6 auf Zeile 8

$$(\neg E \vee \neg K) \wedge E = (\neg E \wedge E) \vee (\neg K \wedge E) = \bot \vee (\neg K \wedge E) = \neg K \wedge E$$

(d) SAT-Solver können von Formeln in konjunktiver Normalform feststellen, ob sie erfüllbar sind, und liefern gegebenenfalls eine erfüllende Belegung. In diesem Beispiel muss man also zuerst die Konjunktion der Formeln in konjunktive Normalform bringen.

$$\begin{aligned}
&(F \supset (K \wedge S)) \wedge (S \supset \neg E) \wedge (F \vee E) \wedge \neg(E \wedge K) \wedge (F \supset E) \\
&= (\neg F \vee (K \wedge S)) \wedge (\neg S \vee \neg E) \wedge (F \vee E) \wedge (\neg E \vee \neg K) \wedge (\neg F \vee E) \\
&= (\neg F \vee K) \wedge (\neg F \vee S) \wedge (\neg S \vee \neg E) \wedge (F \vee E) \wedge (\neg E \vee \neg K) \wedge (\neg F \vee E) \qquad (12)
\end{aligned}$$

Die Umwandlung in konjunktive Normalform ist nicht sehr aufwändig, da die ursprüngliche Formel bereits eine Konjunktion von Formeln ist und nur lokal umgeformt werden muss. Ruft man einen SAT-Solver mit Formel 12 auf, liefert dieser die Antwort „erfüllbar“ sowie die erfüllende Belegung I mit $I(E) = 1$ und $I(F) = I(S) = I(K) = 0$. Will man den SAT-Solver nach weiteren Belegungen suchen lassen, muss man die bereits gefundene Lösung ausschließen, indem man als weitere Formel

$$\neg(E \wedge \neg F \wedge \neg S \wedge \neg K) = \neg E \vee F \vee S \vee K$$

hinzufügt und erneut den SAT-Solver aufruft. Dieser liefert nun die Antwort „unerfüllbar“, somit ist I die einzige Lösung.

Aufgabe 11 (3 Punkte)

Sei $\mathcal{M}$ die kleinste Menge mit folgenden Eigenschaften:

(m1) $\{\texttt{0}, \texttt{X}\} \subseteq \mathcal{M}$

(m2) Wenn $x \in \mathcal{M}$, dann auch $\texttt{-}xx \in \mathcal{M}$.

(m3) Wenn $x, y \in \mathcal{M}$, dann auch $x\texttt{+}y \in \mathcal{M}$.

(a) Geben Sie die Mengen $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ der stufenweise Konstruktion von $\mathcal{M}$ an. Da $\mathcal{M}_2$ schon ziemlich groß ist, genügt es, 10 typische Elemente dieser Menge anzugeben.

(b) Zeigen Sie, dass die Zeichenkette `-X+-00X+-00` in der Menge $\mathcal{M}$ liegt.

(c) Erklären Sie, warum die Zeichenkette `--0+0-0+0` nicht in der Menge $\mathcal{M}$ liegen kann.

Lösung

(a) $\mathcal{M}_0 = \{\texttt{0}, \texttt{X}\}$,
$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_0 \cup \{\texttt{-00}, \texttt{-XX}, \texttt{0+0}, \texttt{0+X}, \texttt{X+0}, \texttt{X+X}\}$,
$\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1 \cup \{$`-00-00`, `-XX-XX`, `-0+00+0`, `-0+X0+X`, `-X+0X+0`, `-X+XX+X`,
`0+-00`, `0+-XX`, `0+0+0`, `0+0+X`, `0+X+0`, `0+X+X`,
`X+-00`, `X+-XX`, `X+0+0`, `X+0+X`, `X+X+0`, `X+X+X`,
`-00+0`, `-00+X`, `-00+-00`, `-00+-XX`, `-00+0+0`, `-00+0+X`, `-00+X+0`, `-00+X+X`,
`-XX+0`, `-XX+X`, `-XX+-00`, `-XX+-XX`, `-XX+0+0`, `-XX+0+X`, `-XX+X+0`, `-XX+X+X`,
`0+0+-00`, `0+0+-XX`, `0+0+0+0`, `0+0+0+X`, `0+0+X+0`, `0+0+X+X`,
`0+X+-00`, `0+X+-XX`, `0+X+0+0`, `0+X+0+X`, `0+X+X+0`, `0+X+X+X`,
`X+0+-00`, `X+0+-XX`, `X+0+0+0`, `X+0+0+X`, `X+0+X+0`, `X+0+X+X`,
`X+X+-00`, `X+X+-XX`, `X+X+0+0`, `X+X+0+X`, `X+X+X+0`, `X+X+X+X`$\}$

(b)

i. $\texttt{0} \in \mathcal{M}$	Eigenschaft m1
ii. Wegen $\texttt{0} \in \mathcal{M}$ (i) gilt $\texttt{-00} \in \mathcal{M}$.	Eigenschaft m2
iii. $\texttt{X} \in \mathcal{M}$	Eigenschaft m1
iv. Wegen $\texttt{X} \in \mathcal{M}$ (iii) und $\texttt{-00} \in \mathcal{M}$ (ii) gilt $\texttt{X+-00} \in \mathcal{M}$.	Eigenschaft m3
v. Wegen $\texttt{X+-00} \in \mathcal{M}$ (iv) gilt $\texttt{-X+-00X+-00} \in \mathcal{M}$.	Eigenschaft m2

(c) Um zu zeigen, dass ein bestimmtes Wort nicht in der definierten Menge liegt, muss man eine Eigenschaft finden, die alle Wörter in der Menge besitzen, nicht aber das bestimmte Wort. Für die Wahl dieser Eigenschaft gibt es verschiedene Möglichkeiten; hier zwei davon.

Argumentation über die Länge der Wörter. Bei der stufenweisen Konstruktion der gegebenen Menge $\mathcal{M}$ besitzen jene Wörter in $\mathcal{M}_i$, die neu hinzukommen (die also noch nicht in $\mathcal{M}_{i-1}$ vorhanden sind), mindestens die Länge $2i + 1$; das lässt sich mit einem kurzen Induktionsbeweis zeigen. Da das Wort `-0+0-0+0` die Länge 9 besitzt, müsste es spätestens ab $i = 4$ in den stufenweise konstruierten Mengen $\mathcal{M}_i$

liegen. Wenn man also $\mathcal{M}_4$ konstruiert und feststellt, dass das gesuchte Wort nicht vorkommt, liegt es nicht in $\mathcal{M}$.

Diese Art von Argumentation lässt sich immer dann verwenden, wenn alle Abschlusseigenschaften der induktiven Definition zu längeren Wörtern führen. Allerdings kann es aufwändig sein, alle Worte bis zur benötigten Länge tatsächlich zu generieren. Etwa besitzt $\mathcal{M}_4$ in diesem Beispiel bereits 9 541 122 Elemente.

Argumentation über die besondere Form der `+`-Wörter. Wir betrachten das Ende `-0+0` des zu untersuchenden Wortes `-0+0-0+0`. Das Zeichen `-` kann nur durch die Eigenschaft m2 in ein Wort gelangen. Dann müssen diesem Symbol aber zwei Kopien eines Wortes u folgen. Für u kommt hier nur `0` in Frage, da $u =$ `0+` nach Verdopplung bereits länger als die drei vorhandenen Zeichen wäre. Somit müssen gemäß Eigenschaft m2 auf `-` zwei `0`er folgen, was offenbar nicht der Fall ist. Somit kann `-0+0-0+0` (und jedes andere Wort, das mit `-0+0` endet) nicht in $\mathcal{M}$ liegen.

Diese Argumentation ist kurz, allerdings benützt sie eine spezielle Eigenschaft der vorliegenden Menge $\mathcal{M}$ und ist nicht auf andere Fälle übertragbar; dort muss eine andere spezifische Eigenschaft gefunden werden.