Allgemeine Hinweise: Versuchen Sie beim Lösen der Beispiele *keine elektronischen Hilfsmittel* zu verwenden – beim Test werden Sie diese nicht zur Verfügung haben.
Damit ein Beispiel anerkannt wird, muss ein Lösungsweg erkennbar sein und es müssen alle enthaltenen Teilaufgaben gelöst sein. Ein korrektes Endergebnis ist nicht zwingend erforderlich!
Deadline für das Ankreuzen und Hochladen der Lösungen in TUWEL: Montag, 23.03.2015, 13:00 Uhr (Toleranzzeit ohne Gewähr, verspätete Abgaben per Email werden ausnahmslos nicht akzeptiert!)

Aufgabe 1: Binäre Gleitpunkt-Arithmetik – Addition & Subtraktion

Gegeben sind die Zahlen $A = (0.050B98)_{16}$ und $B = (-0.13156)_8$.

Es gilt folgendes Gleitpunktformat:
$\mathbb{F}(2, 11, -14, 15, true)$ mit Formatbreite 16 Bit und *impliziter* Darstellung des ersten Bits. Mit Ausnahme der kleineren Formatbreite ist dieses Gleitpunktformat analog zum IEEE 754 *Single Precision*-Format aufgebaut.

a) Stellen Sie A und B in diesem Gleitpunktformat dar. Verwenden Sie Guard- und Round-Digit sowie das Sticky-Bit zur Vermeidung von numerischen Ungenauigkeiten (vgl. *Informatik Grundlagen*, 5. Auflage, Kapitel 8.6.4). Runden Sie mittels *round to nearest* zusammen mit *round away from zero*.

b) Berechnen Sie anschließend $A + B$ sowie $B - A$ und stellen Sie das Ergebnis wieder als Gleitpunktzahl in dem angegebenen Format dar. Runden Sie die Ergebnisse wieder mittels *round to nearest* in Kombination mit *round away from zero*.

Aufgabe 2: Binäre Gleitpunkt-Arithmetik – Multiplikation & Division

Gegeben sind die folgenden, im 16 Bit-Gleitpunktformat aus Aufgabe 1 codierten Zahlen:

$$\begin{aligned} A &= 1\ 10010\ 0010110111 \\ B &= 1\ 01100\ 0010100100 \\ C &= 0\ 10101\ 0100000000 \end{aligned}$$

Führen Sie die nachfolgenden Berechnungen durch. Verwenden Sie Guard- und Round-Digit sowie das Sticky-Bit zur Vermeidung von numerischen Ungenauigkeiten. Runden Sie mittels *round to nearest* zusammen mit *round to even*.

Hinweis: Beachten Sie bitte das implizite erste Bit!

a) $A * B$

b) $\frac{A}{C}$

Aufgabe 3: Binäre Gleitpunkt-Arithmetik – Sonderfälle

Gegeben sind die folgenden, im 16 Bit-Gleitpunktformat aus Aufgabe 1 codierten Zahlen:

$$\begin{aligned} A &= 0\,00111\,1011010000 \\ B &= 0\,10110\,0000000000 \\ C &= 0\,00000\,1100000000 \\ D &= 1\,00110\,0010010000 \end{aligned}$$

Führen Sie mit den Zahlen folgende Berechnungen durch und codieren Sie das Ergebnis jeweils im angegebenen Gleitpunktformat. Runden Sie mittels *round toward plus infinity* (= gerichtetes Aufrunden)!

a) $A * D$

b) $B + C$

c) B/D

Aufgabe 4: Wahrheitstabellen

Gegeben ist folgende Boolesche Funktion:

$$f(a,b,c) = c \lor \neg a \land b \to b \lor \neg a$$

Hinweis: Beachten Sie die Ordnungsrelation/Operatorrangfolge: $\neg$ vor $\land$ vor $\lor$ vor $\to$!

a) Stellen Sie die Wahrheitstabelle der gegebenen Funktion schrittweise auf!

a	b	c	$\neg a$	$\neg a \land b$	$c \lor \neg a \land b$	$b \lor \neg a$	$f(a,b,c)$
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

b) Geben Sie die Funktion $f(a,b,c)$ in Disjunktiver Normalform (DNF) an!

c) Geben Sie die Funktion $f(a,b,c)$ in Konjunktiver Normalform (KNF) an!

Aufgabe 5: Umformen von Gleichungen

Bringen Sie die folgende Funktion durch Umformen in die Konjunktive Normalform (KNF):

$$f(a,b,c,d) = [(a \to \neg b) \lor \neg(c \lor \neg d)] \to b \land \neg c$$

Hinweis: Benutzen Sie die Regel $x = (x \lor y) \land (x \lor \neg y)$ um unvollständige Terme zu erweitern!

Aufgabe 6: Funktionale Vollständigkeit

Unter *funktionaler Vollständigkeit* versteht man die Eigenschaft einer Menge Boolescher Funktionen, alle möglichen Logikoperationen darstellen zu können. So ist beispielsweise die Menge $\{\neg, \rightarrow\}$ funktional vollständig, weil sich durch die Funktionen selbst oder durch Kombination der Funktionen alle denkbaren Logikoperationen darstellen lassen.

Zeigen Sie, ob es sich bei den nachfolgenden Mengen von Booleschen Funktionen um eine funktional vollständige Menge logischer Operationen handelt oder nicht!

Hinweis: Bei $\oplus$ handelt es sich um die Antivalenz (XOR).

a) $\{1, \rightarrow, \oplus\}$

b) $\{1, \wedge\}$

Aufgabe 7: KV-Diagramm – Minimale Disjunktive/Konjunktive Form

Gegeben sind die nachfolgenden KV-Diagramme. Lesen Sie die Funktion jeweils einmal in minimaler disjunktiver Form (mdF) und einmal in minimaler konjunktiver Form (mkF) aus. Gibt es weitere, ebenfalls minimale Lösungen?

a)

	$\neg e_1$	e_1	e_1	$\neg e_1$
e_2	1	X	X	X
$\neg e_2$	X	0	0	1
	e_3	e_3	$\neg e_3$	$\neg e_3$

b)

	$\neg e_4$	e_4	e_4	$\neg e_4$	
$\neg e_3$	X	0	X	0	e_2
e_3	1	X	1	X	e_2
e_3	X	1	1	0	$\neg e_2$
$\neg e_3$	0	0	X	X	$\neg e_2$
	$\neg e_1$	$\neg e_1$	e_1	e_1	

Hinweis: Bei 'X' handelt es sich um das sogenannte *Don't-Care*.

Aufgabe 8: Entwurf einer Booleschen Funktion

Entwerfen Sie eine Boolesche Funktionen $G(a_1, a_0, b_1, b_0)$, die wie folgt definiert ist:

$$G = \begin{cases} 0 & \text{falls } (a_1 a_0)_2 < (b_1 b_0)_2 \\ X & \text{falls } (a_1 a_0)_2 = (b_1 b_0)_2 \\ 1 & \text{falls } (a_1 a_0)_2 > (b_1 b_0)_2 \end{cases}$$

In anderen Worten: Die Funktion interpretiert die Eingangsvariablen als Binärzahlen $(a_1 a_0)_2$ und $(b_1 b_0)_2$ und führt einen Größenvergleich der beiden Zahlen durch. Ist $(a_1 a_0)_2$ größer liefert G den Wert 1, ist $(b_1 b_0)_2$ größer liefert G den Wert 0 und sind beide Binärzahlen gleich groß kann G einen beliebigen Wert annehmen.

Befüllen Sie die Wahrheitstafel und ermitteln Sie unter Verwendung des vorgedruckten KV-Diagramms einen vereinfachten Funktionsausdruck für G in minimaler disjunktiver und einen in minimaler konjunktiver Form!

a_1	a_0	b_1	b_0	$G(a_1, a_0, b_1, b_0)$
0	0	0	0	
0	0	0	1	
0	0	1	0	
0	0	1	1	
0	1	0	0	
0	1	0	1	
0	1	1	0	
0	1	1	1	
1	0	0	0	
1	0	0	1	
1	0	1	0	
1	0	1	1	
1	1	0	0	
1	1	0	1	
1	1	1	0	
1	1	1	1