# 4

# Dynamisches Gleichgewicht

## 4.1 Die Trägheitskraft

**Greift an** einem beweglichen Körper mit der Masse $m$ eine Kraft $\vec{F}$ an, dann **erfährt er** eine Beschleunigung $\vec{a}$, die dieser Kraft proportional ist (Fig. 4.1a):

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

**Das 3.** Newtonsche Axiom besagt nun, daß Kräfte stets paarweise auftreten (*actio* = *reactio*). Wo ist hier die Reaktionskraft? Dies erkennt man, wenn **man die** Versuchsbedingungen der Fig. 4.1b betrachtet: Der Körper mit der **Masse** $m$ ist an einem Faden aufgehängt, der diesen gerade eben zu tragen **vermag.** Die Kraft $F$, mit der der Körper plötzlich beschleunigt werden soll, **wirke jetzt** am Ende des Fadens. Die Folge des plötzlichen Angreifens der **Kraft wird** sein, daß der Faden reißt. Ein Faden kann aber nur zerrissen **werden,** wenn man an beiden Enden zieht.

**Schluß:** Es muß am Körper eine Kraft angreifen, die nach unten gerichtet **ist und** ihre Ursache in der Trägheit des Körpers hat. Die Größe dieser **Trägheitskraft** $\vec{F}_{tr}$ kann man messen, wenn man den Faden durch eine **Federwaage** ersetzt (Fig. 4.1c). Sie muß der angreifenden Kraft entgegengesetzt **gleich groß** sein:

$$\vec{F}_{tr} = -m \cdot \vec{a} \tag{4.1}$$

**Trägheitskräfte** treten überall dort auf, wo Körper beschleunigt werden. Sie **sind der** Beschleunigung stets entgegen gerichtet: Der Körper „wehrt sich" **auf Grund** seiner Trägheit dagegen, seinen gleichförmigen Bewegungszu**stand zu** ändern.

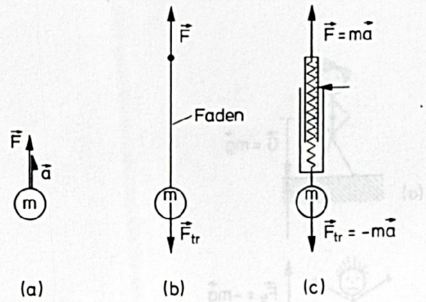


*Fig. 4.1:* Zur Demonstration der Trägheitskraft: Die bei der Beschleunigung eines Körpers auftretende Trägheitskraft $\vec{F}_{tr}$ kann zum Zerreißen des Fadens führen (b) und mit einer Federwaage gemessen werden (c).

## 4.2 Das d'Alembertsche Prinzip[1]

In Abschnitt 3.2 hatten wir die Bedingungen für das statische Gleichgewicht formuliert: Die vektorielle Summe der angreifenden Kräfte und die der wirkenden Drehmomente müssen verschwinden. Wir wollen hier von den Drehmomenten absehen und uns die Körper auf ihren Schwerpunkt konzentriert denken. Es verbleibt dann

$$\vec{F}_{ges} = \sum_i \vec{F}_i = 0.$$

Dies ist in Fig. 4.2a illustriert. Der auf dem Fußboden stehende Mann befindet sich im statischen Gleichgewicht. Die in seinem Schwerpunkt angreifende Gewichtskraft $\vec{G}$ wird durch eine entgegengesetzt gleich große, von der Unterlage aufgebrachten Kraft $\vec{F}$ kompensiert:

$$\vec{F} = -\vec{G}; \qquad \vec{F} + \vec{G} = 0.$$

Entzieht man dem Mann die Unterlage, dann macht er eine beschleunigte Fallbewegung.

Nach wie vor greift in seinem Schwerpunkt die Gewichtskraft an. Dieser wird von der ebenfalls dort angreifenden Trägheitskraft $\vec{F}_{tr}$ das „Gleichgewicht" gehalten:

$$\vec{G} + \vec{F}_{tr} = 0.$$

Der Mann befindet sich im dynamischen Gleichgewicht. Er ist kräftefrei. Fig. 4.2c: In einem mit $g$ nach unten beschleunigten Kasten schwebt der Mann. Das Newtonsche Grundgesetz $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ läßt sich formal wie eine Gleichgewichtsbedingung formulieren:

$$\vec{F} - m \cdot \vec{a} = 0 \quad \text{oder} \quad \vec{F} + \vec{F}_{tr} = 0.$$

Oder wenn mehrere äußere Kräfte wirken:

$$\sum \vec{F}_i + \vec{F}_{tr} = 0. \tag{4.2}$$

*Im dynamischen Gleichgewicht verschwindet die Summe aller am Körper angreifender Kräfte, wenn die Trägheitskräfte miteingeschlossen werden (d'Alembertsches Prinzip).*

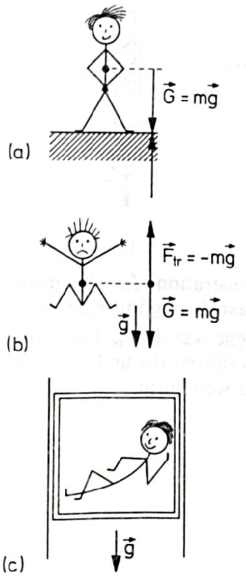


*Fig. 4.2:* (a): Die Versuchsperson befindet sich im statischen Gleichgewicht;
(b) und (c): Die Versuchsperson befindet sich im dynamischen Gleichgewicht.

Fig. 4.2 macht deutlich, daß der Übergang von $\vec{F} = m\vec{a}$ zu $\vec{F} - m\vec{a} = 0$ gleichbedeutend ist mit dem Übergang vom Bezugssystem eines äußeren Beobachters in das Bezugssystem eines mitbeschleunigten Beobachters (= Bezugssystem des Kastens in Fig. 4.2c).

[1] Jean-Baptiste Le Rond d'Alembert 1717–1783

## 4.3 Beispiele

**(1) Translationsbewegung**

Als Beispiel betrachten wir die etwas kompliziertere „Fallbewegung“, die zwei durch ein masseloses Seil miteinander verbundene Körper ausführen (Fig. 4.3). Die Körper sollen unterschiedliche Massen besitzen, z. B. $m_2 > m_1$. Das Seil ist über eine ebenfalls masselose Rolle geführt. Nach dem Loslassen führen beide Körper eine beschleunigte Bewegung aus. Wie groß ist diese Beschleunigung $\vec{a}$ ? Die Bedingung für das dynamische Gleichgewicht lautet:

$$\vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{tr}^{(1)} + \vec{F}_{tr}^{(2)} = 0. \tag{4.3}$$

Im gestrichelt eingezeichneten Koordinatensystem (Wegkoordinate $s$, Beschleunigung $\vec{a}$ in Richtung $\hat{s}$) kann man zu den Komponenten dieser Kräfte übergehen:

$$-m_1 g + m_2 g - m_1 a - m_2 a = 0.$$

Die gesuchte Beschleunigung ergibt sich demnach zu:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \cdot g. \tag{4.4}$$

Im speziellen Fall $m_1 = m_2$ ist $a = 0$; das System befindet sich dann im statischen Gleichgewicht.

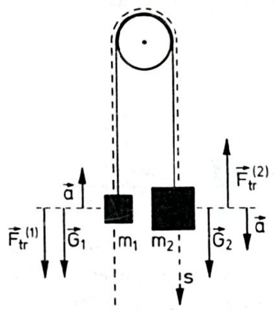


*Fig. 4.3:* Zwei Körper mit den Massen $m_1$ und $m_2$ sind mit einem Seil verbunden, das über eine Rolle läuft. Wenn $m_1 \neq m_2$ ist, führen sie eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung aus.

**(2) Rotationsbewegung**

Ein mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega$ um einen Punkt O rotierender Körper mit der Masse $m$ erfährt dauernd eine zum Zentrum hin gerichtete Radialbeschleunigung

$$\vec{a} = -\omega^2 \cdot \vec{r}.$$

Er kann nur dann auf der Kreisbahn gehalten werden, wenn – z. B. über ein Seil – ständig eine Zentripetalkraft $\vec{F}_{ZP}$ wirkt, die ebenfalls aufs Zentrum hin gerichtet ist. Das Newtonsche Grundgesetz fordert

$$\vec{F}_{ZP} = m \cdot \vec{a}_r = -m\omega^2 \cdot \vec{r}. \tag{4.5}$$

In der Formulierung des dynamischen Gleichgewichts ergibt sich damit:

$$\vec{F}_{ZP} + \vec{F}_{tr} = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{F}_{ZP} + m\omega^2 \cdot \vec{r} = 0.$$

Der Körper „spürt“ demnach ständig die Trägheitskraft

$$\vec{F}_{tr} = -\vec{F}_{ZP} = +m\omega^2 \vec{r},$$

die vom Zentrum weg gerichtet ist und deswegen *Zentrifugalkraft* genannt und mit $\vec{F}_{ZF}$ bezeichnet wird.

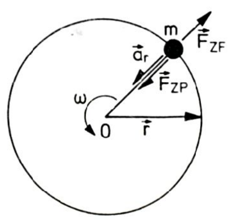


*Fig. 4.4:* Ein Körper bewegt sich auf einer Kreisbahn. Eingezeichnet ist die Zentripetalkraft, die für die Radialbeschleunigung verantwortlich ist, und die Zentrifugalkraft, die der Körper spürt.

**(3) Harmonische periodische Bewegung**

Ein Körper mit der Masse $m$ ist elastisch durch lineare Federn an eine Ruhelage O gebunden, die zum Ursprung eines Koordinatensystems gemacht werden soll. Er kann sich reibungsfrei auf seiner Unterlage bewegen und

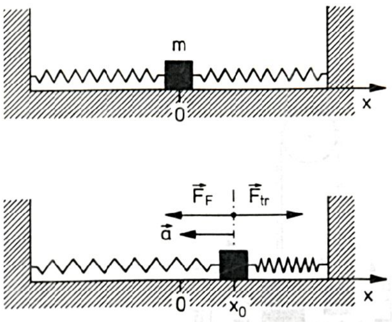


*Fig. 4.5:* Linearer harmonischer Oszillator. Im unteren Teilbild ist die wirkende Federkraft $\vec{F}_F$ und die Trägheitskraft $\vec{F}_{tr}$ eingezeichnet.

werde zum Zeitpunkt $t = 0$ um die Strecke $x_0$ aus seiner Ruhelage ausgelenkt. Die Wirkung der beiden Federn zusammen sei durch eine Federkonstante $D$ charakterisiert. Gesucht ist das Weg-Zeit-Gesetz und die zu jedem Zeitpunkt wirksame Beschleunigung!

Nach dem Loslassen bei $x = x_0$ hat die Federkraft $\vec{F}_F = -D\vec{x}$ eine Beschleunigung $\vec{a}$ zur Folge; der Körper wehrt sich dagegen mit einer Trägheitskraft $\vec{F}_{tr} = -m\vec{a}$, die der Beschleunigung entgegengerichtet ist. Die dynamische Gleichgewichtsbedingung fordert

$$\vec{F}_F + \vec{F}_{tr} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad -D\vec{x} - m\vec{a} = 0.$$

Nachdem die Richtung aller Vektoren klar erkannt ist, kann man die Vektorpfeile weglassen und zur Komponentenschreibweise übergehen:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{D}{m} \cdot x. \tag{4.6}$$

Die Beschleunigung wächst also linear mit der $x$-Koordinate und ist dieser stets entgegengerichtet. Die Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{D}{m} \cdot x = 0 \tag{4.7}$$

nennt man die *Bewegungsgleichung* des Systems. Es ist eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung (linear: $x(t)$ und seine Ableitungen treten nur linear auf, 2. Ordnung: als höchste Ableitung tritt die 2. Ableitung auf). Ihre Lösung ergibt das Weg-Zeit-Gesetz der Bewegung.

Eine intensivere Behandlung der mit der Schwingungsdifferentialgleichung zusammenhängenden Probleme erfolgt später bei der Behandlung der „Schwingungen und Wellen". Hier löst man diese Gleichung am besten intuitiv „durch scharfes Hinsehen". Die umgeschriebene Differentialgleichung

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{D}{m} \cdot x(t)$$

heißt in Worte übersetzt: Gesucht ist eine Funktion $x(t)$, deren zweite Ableitung bis auf die Konstante $-D/m$ die Funktion selbst wieder ergibt. Die Funktion

$$x(t) = x_0 \cdot \cos \omega t \tag{4.8}$$

erfüllt diese Bedingung, was man leicht durch Einsetzen nachprüft, wenn für die Kreisfrequenz der Schwingung

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \tag{4.9}$$

gesetzt wird. Durch Differentiation ergibt sich das Geschwindigkeits- und das Beschleunigungs-Zeit-Gesetz:

$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega x_0 \sin \omega t, \tag{4.10}$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x_0 \cos \omega t = -\omega^2 \cdot x(t). \tag{4.11}$$

Das angegebene Weg-Zeit-Gesetz erfüllt auch die *Anfangsbedingung*: Auslenkung $x = x_0$ zum Anfangszeitpunkt $t = 0$. Auch die Funktion $x(t) = x_0 \sin \omega t$ ist eine Lösung der Differentialgleichung. (Jede Differentialgleichung 2. Ordnung besitzt zwei Lösungen). Sie erfüllt jedoch nicht die Anfangsbedingung, denn bei ihr ist für $t = 0$ auch $x = 0$. Sie wäre die richtige Lösung gewesen, wenn die Schwingungsbewegung durch Anstoßen des Körpers in der Ruhelage $x = 0$ in Gang gesetzt worden wäre. In beiden Fällen ergibt sich die

$$\text{Maximalgeschwindigkeit} \qquad v_{max} = \omega \cdot x_0 \tag{4.12}$$

und die

$$\text{Maximalbeschleunigung} \qquad a_{max} = \omega^2 \cdot x_0. \tag{4.13}$$

**(4) Angenähert harmonische Bewegung (das mathematische Pendel)**

Ein Körper mit der Masse $m$ hängt an einem Faden mit der Länge $l$ und wird um einen Winkel $\varphi$ aus der Ruhelage ausgelenkt. Auf ihn wirkt die Gewichtskraft $\vec{G}$, die vektoriell in die Kräfte $\vec{G}_\perp$ und $\vec{G}_\parallel$ zerlegt werden kann. $\vec{G}_\parallel$ spannt nur den Faden und ist nicht weiter von Interesse. $\vec{G}_\perp$ entspricht hier der rücktreibenden „Federkraft“. Das dem Problem angepaßte Koordinatensystem ($s$) ist krummlinig: Der Körper bewegt sich auf einem Kreis (i. allg. auf einer Kugelfläche, doch soll hier nur das lineare Problem betrachtet werden). Wieder wird die Bedingung des dynamischen Gleichgewichts aufgeschrieben:

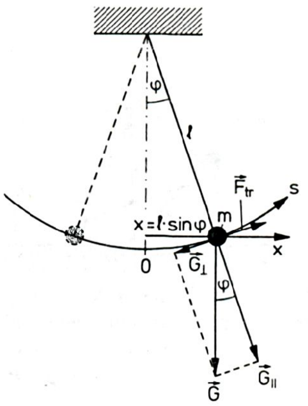


*Fig. 4.6:* Das mathematische Pendel als Beispiel für eine näherungsweise harmonische Bewegung.

$$\vec{G}_\perp + \vec{F}_{tr} = 0$$

$$-mg \sin \varphi \cdot \hat{s} - m\ddot{\vec{s}} = 0. \tag{4.14}$$

Nach Weglassen der Vektorpfeile kann man entweder mit der Koordinaten $s$ oder mit der Winkelkoordinaten $\varphi$ weiterrechnen. Mit

$$s = l \cdot \varphi \qquad \text{und} \qquad \ddot{s} = l \cdot \ddot{\varphi}$$

ergibt sich

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \sin \varphi = 0 \qquad \text{oder} \qquad \ddot{s} + g \cdot \sin\left(\frac{s}{l}\right) = 0. \tag{4.15}$$

Beide Gleichungen lassen sich nicht mehr exakt lösen. Eine Lösung gelingt nur, wenn man sich auf kleine Winkel beschränkt. Dann gilt nämlich

$$\sin \varphi \approx \varphi \qquad \text{und} \qquad s = l \cdot \varphi \approx x. \tag{4.16}$$

Die Differentialgleichungen (4.15) gehen damit über in

$$\ddot{x}(t) + \frac{g}{l} \cdot x(t) = 0. \tag{4.17}$$

Diese Bewegungsgleichung entspricht genau der der echten harmonischen Bewegung, wenn die Federkonstante $D$ durch

$$D' = m\frac{g}{l}$$

ersetzt wird. Die Lösung ist bei entsprechenden Anfangsbedingungen die gleiche wie die dort angegebene: $x = x_0 \cos \omega t$ oder $\varphi = \varphi_0 \cos \omega t$. Insbesondere gelten auch die Beziehungen für die maximale Geschwindigkeit und Beschleunigung. Die Kreisfrequenz des mathematischen Pendels ist

$$\omega = \sqrt{\frac{D'}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{4.18}$$

Sie ist von der Masse des Pendelkörpers unabhängig. Diese Beziehung gibt unmittelbar die Möglichkeit an die Hand, die Erdbeschleunigung $g$ durch Messung einer Länge ($l$) und einer Frequenz ($\omega = 2\pi\nu$) experimentell zu bestimmen.

## 4.4 Zusammenfassung

| | | |
|---|---|---|
| Dynamisches Kräftegleichgewicht | $\vec{F} + \vec{F}_{tr} = 0$ | $\vec{F}_{tr} = -m \cdot \vec{a}$ Trägheitskraft |

| **Beispiele für Trägheitskräfte** | | |
|---|---|---|
| Translation | $\vec{F}_{tr} = -m \cdot \vec{a}$ | $\vec{a}$: Beschleunigung |
| Rotation | $\vec{F}_{ZF} = m\omega^2 \cdot \vec{r}$ | Zentrifugalkraft |

| **Anwendung des dynamischen Gleichgewichts** | | |
|---|---|---|
| | Bewegungsgleichung | Weg-Zeit-Funktion |
| harmonischer Oszillator | $m\ddot{x} + Dx = 0$ | $x = x_0 \cos \omega t$,<br>$x = x_0 \sin \omega t$,<br>$\omega = \sqrt{D/m}$. |
| Mathematisches Pendel | $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$ | $x \approx x_0 \cos \omega t$,<br>$x \approx x_0 \sin \omega t$,<br>$\omega = \sqrt{g/l}$. |