

Fragenkatalog zur Vorlesung

Statistik u. Wahrscheinlichkeitstheorie (StatWth17)

Werner Gurker

Der folgende Fragenkatalog dient als Unterstützung bei der Erarbeitung des VO-Stoffes und soll in weiterer Folge auch die Vorbereitung auf die Prüfung erleichtern. Zweckmäßigerweise sollten die Fragen parallel zur VO bearbeitet werden. Die Antworten finden sich auf den Folien, im Skriptum und im Buch. (Bem: Gerne diskutiere ich diese (und andere) Fragen aber auch im persönlichen Gespräch.)

1. Deskriptive und explorative Statistik

1. Was versteht man unter der Grundgesamtheit (Population)? Was sind statistische Einheiten? Was sind Merkmale (Variablen)? Geben Sie Beispiele.
2. Beschreiben Sie die wesentlichen Unterschiede zwischen Experimental- und Beobachtungsstudien. Welche Studien sind zu bevorzugen (und warum?) – und ist das immer möglich? Geben Sie jeweils ein Beispiel.
3. Merkmale können die unterschiedlichsten Messniveaus (Messskalen) aufweisen. Beschreiben Sie die wichtigsten Typen an Hand von Beispielen.
4. Was versteht man allgemein unter einer Stichprobe? Welche Arten des „Ziehens“ von Stichproben gibt es?
5. Wie ist ein Datenframe (eine Datenmatrix) aufgebaut? Wann spricht man von univariaten/multivariaten Daten? Geben Sie Beispiele.
6. Was sind die wichtigsten grafischen Tools zur Darstellung von diskreten Merkmalen? Geben Sie ein Beispiel.
7. Was sind Ordnungsstatistiken? Was ist die Rangtransformation? Was versteht man unter einer Bindung?
8. Ein zentrales Konzept in der Statistik ist die empirische Verteilungsfunktion? Wie ist diese Funktion definiert? Wie wird sie gezeichnet?
9. Unter welchen Umständen ist eine Klassierung eines Datensatzes erforderlich und welche Regeln sind dabei zu beachten?
10. Was ist ein Histogramm? Wie wird es gezeichnet? Was versteht man unter dem Prinzip der Flächentreue?
11. Erklären Sie an Hand von **Abbildung 1.11** (im Skriptum/Buch auf S. 22) das Prinzip der Kerndichteschätzung. Welche Vorteile hat diese Methode der Dichteschätzung gegenüber dem Histogramm? Welche Funktion hat die Bandbreite?

12. Was versteht man allgemein unter einem p -Quantil einer empirisch gegebenen Verteilung? Wie viele verschiedene Typen von Quantilen gibt es? Worin unterscheiden sie sich? Beschreiben Sie zwei Typen genauer (an Hand eines Beispiels aus dem Skriptum/Buch).
13. Was versteht man unter der verallgemeinerten Inversen der (empirischen) Verteilungsfunktion? In welchem Zusammenhang wird sie (in diesem Kapitel) verwendet?
14. Was ist allgemein ein QQ-Plot? Was bedeutet es, wenn die Punkte eines QQ-Plots annähernd auf einer Geraden liegen?
15. Was ist ein Boxplot? Wie wird er (üblicherweise) gezeichnet? Welche Fragen lassen sich mit derartigen Plots beantworten?
16. Nennen Sie die wichtigsten Kennzahlen der Lage und der Streuung.
17. Was sind Ausreißer? Was meint man mit dem Bruchpunkt (eines Schätzers)? Wann sagt man, dass ein Schätzer robust ist? Geben Sie Beispiele für robuste und nichtrobuste Schätzer.
18. Der Stichprobenmittelwert ist der am häufigsten verwendete Lageparameter. Definition? Bruchpunkt? Minimumseigenschaft?
19. Andere Mittelwerte sind das geometrische und das harmonische Mittel. Wie sind diese Größen definiert und in welchen Situationen sind sie als „Durchschnittswert“ besser geeignet als das arithmetische Mittel? Geben Sie jeweils ein Beispiel.
20. In welcher Größenbeziehung stehen arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel? (Vs: Daten positiv.)
21. Ein anderer häufig verwendeter Lageparameter ist der Median. Definition? Bruchpunkt? Minimumseigenschaft? In welchen Situationen ist der Median als Lageparameter dem Stichprobenmittelwert vorzuziehen?
22. Die am häufigsten verwendeten Streuungsparameter sind die Stichprobenvarianz und die Stichprobenstreuung (oder Standardabweichung). Definitionen? Bruchpunkte? Was ist bei der Interpretation dieser Größen zu beachten?
23. Wie lautet der (empirische) Verschiebungssatz für die Varianz?
24. Andere häufig verwendete Streuungsmaße: MAD, Spannweite, Interquartilabstand, Hingeabstand, Variationskoeffizient (UE-Aufgabe 1.14). Definitionen? Welche dieser Größen sind robust?
25. Was versteht man unter der 5- (oder 6-) Zahlen-Zusammenfassung?
26. Wann spricht man von einer bimodalen Verteilung? Allgemeiner von einer Mischverteilung? Geben Sie ein Beispiel (aus dem Skriptum/Buch).
27. Was sind (zentrale) Momente? Welchen Momenten entsprechen der Stichprobenmittelwert und die Stichprobenvarianz?

28. Was versteht man unter der Schiefe / der Kurtosis einer Verteilung? Welche Kennzahlen gibt es dafür? Was versteht man unter dem Exzess einer Verteilung?
29. Beschreiben Sie einige typische Verteilungsformen. Beispiel: Eine platykurtische rechtsschiefe Verteilung schaut etwa wie aus?
30. Was ist ein Scatterplot? Eine Scatterplotmatrix? Was kann man derartigen Plots entnehmen?
31. Was ist die (empirische) Kovarianz? Eigenschaften? Interpretation?
32. Was ist der (empirische) Korrelationskoeffizient? Eigenschaften? Interpretation? (Skriptum/Buch S. 53)
33. Wenn $r_{xy} \approx 0$, heißt das, dass es zwischen x und y keine (oder nur eine ganz schwach ausgeprägte) Beziehung gibt?
34. Wenn zwei Variablen hoch korrelieren, heißt das, dass sie auch in einer kausalen Beziehung zueinander stehen? Diskutieren Sie die Frage an Hand eines Beispiels.
35. Was versteht man unter der Kovarianz- bzw. Korrelationsmatrix?
36. Was ist der Spearman'sche Rangkorrelationskoeffizient? Eigenschaften? Interpretation? Welche Beziehung gibt es zum (Pearson'schen) Korrelationskoeffizienten?
37. Was versteht man unter der Methode der kleinsten Quadrate? Bei welchen Fragestellungen wird sie angewendet?
38. Was sind die Normalgleichungen? (Warum heißen sie so?)
39. Was ist die KQ (oder OLS)–Gerade? Wie wird sie bestimmt? Was sind Residuen? (Welche Eigenschaften haben sie?)
40. Angenommen, für Datenpaare (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, ergibt sich die KQ–Gerade zu $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$. Wie lassen sich $\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$ interpretieren?

2. Wahrscheinlichkeit

1. Was besagt das empirische Gesetz der großen Zahlen? Geben Sie ein Beispiel.
2. Was sind die Unterschiede zwischen dem frequentistischen (oder objektivistischen) und dem subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff? Geben Sie jeweils ein Beispiel. Folgt der subjektive Begriff anderen Regeln als der frequentistische?
3. Definieren Sie die Begriffe Merkmalraum, Ereignis und Ereignissystem. Geben Sie jeweils ein Beispiel.
4. Was versteht man unter einer σ –Algebra? Was bedeutet das Präfix σ ?
5. Was versteht man unter einem Messraum? Wann nennt man eine Menge messbar?

6. Wie modelliert man das „sichere“ bzw. das „unmögliche“ Ereignis?
7. Was besagen die De Morgan'schen Regeln?
8. Welches Ereignissystem (σ -Algebra) verwendet man im Fall eines höchstens abzählbaren Merkmalraums?
9. Wie sind Borelmengen auf \mathbb{R} definiert? Ist jede beliebige Teilmenge von \mathbb{R} eine Borelmenge? Beliebige Intervalle $\langle a, b \rangle$? Einpunktige Mengen $\{x\}$, $x \in \mathbb{R}$?
10. Gibt es „weniger“ oder „mehr“ Borelmengen als Nicht-Borelmengen? (Antwort auf den Folien.)
11. Welches Ereignissystem (σ -Algebra) verwendet man im Fall eines überabzählbaren Merkmalraums?
12. Was versteht man unter einem Wahrscheinlichkeitsmaß (W-Maß) auf einem Messraum (Ω, \mathcal{A}) ? Welche Eigenschaften müssen erfüllt sein?
13. Was versteht man unter σ -Additivität? Was bedeutet das Präfix σ ?
14. Was bedeuten die einzelnen Bestandteile eines W-Raumes (Ω, \mathcal{A}, P) ?
15. Nennen Sie einige einfache Folgerungen aus der Definition des W-Maßes. (Skriptum/Buch S. 73f)
16. Was versteht man unter den Odds (Chancen) für den Eintritt eines Ereignisses A ? Beispiel: Die Odds für den Eintritt von A seien $3:2$; wie groß ist $P(A)$? Beispiel: $P(A)$ sei $1/3$; wie stehen die Odds für den Eintritt von A ?
17. Beantworten Sie die UE-Aufgabe im Skriptum/Buch auf S. 101 unten.
18. Was versteht man unter einem endlichen W-Raum? Geben Sie ein Beispiel.
19. Definieren Sie die Begriffe Laplace-Experiment und Laplace-Raum. Wie werden im Laplace-Raum Wahrscheinlichkeiten definiert? Geben Sie ein Beispiel.
20. Ist jeder Laplace-Raum endlich? Ist jeder endliche W-Raum ein Laplace-Raum?
21. Was versteht man unter der klassischen W-Definition? Unter welchen Umständen kann sie verwendet werden? Geben Sie ein Beispiel.
22. Was versteht man unter der geometrischen W-Definition? Unter welchen Umständen kann sie verwendet werden? Geben Sie ein Beispiel.
23. Formulieren Sie das Additionstheorem (Formel der In- und Exklusion) für zwei, drei, allgemein n Ereignisse.
24. Was besagt die Boole'sche Ungleichung? Beispiel: Wenn $P(A) = P(B) = 1/3$, was lässt sich über $P(A \cup B)$ sagen?
25. Was besagt die Bonferroni'sche Ungleichung? (UE-Aufgabe 2.6) Beispiel: Wenn $P(A) = P(B) = 2/3$, was lässt sich über $P(A \cap B)$ sagen?

26. Wie sind bedingte Wahrscheinlichkeiten $P(A|B)$ ($P(B) > 0$) definiert? Hat $P(\cdot|B)$ (Ereignis B fest mit $P(B) > 0$) alle Eigenschaften eines W-Maßes?
27. Formulieren Sie das Multiplikationstheorem (Multiplikationsregel) für zwei, drei, allgemein n Ereignisse.
28. Was besagt der Satz von der vollständigen Wahrscheinlichkeit? Bei welchen Problemstellungen wird er angewendet?
29. Was besagt die Bayes'sche Formel? Bei welchen Problemstellungen wird sie angewendet? Was sind A-priori- und A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten?
30. Was versteht man unter der Odds-Form der Bayes'schen Formel?
31. Bayes'sche Formel: Erläutern Sie die Begriffe Sensitivität und Spezifität an Hand eines Beispiels.
32. Der Satz v. d. vollst. Wahrscheinlichkeit und die Bayes'sche Formel basieren auf einer Partition des Merkmalraums. Was versteht man darunter? Geben Sie ein Beispiel.
33. Definieren Sie stochastische Unabhängigkeit für zwei und drei Ereignisse. (Wie lautet die allgemeine Definition für n Ereignisse?)
34. Folgt aus der paarweisen Unabhängigkeit von Ereignissen auch deren vollständige Unabhängigkeit?
35. Welche Beziehung besteht zwischen der Unabhängigkeit und der Disjunktheit von Ereignissen? Sind disjunkte Ereignisse automatisch auch unabhängig?

3. Stochastische Größen und Verteilungen

1. Was ist eine stochastische Größe (sG)? Was versteht man unter der Realisation einer sG? Geben Sie ein Beispiel.
2. Wann nennt man eine sG diskret, stetig, gemischt? Geben Sie jeweils ein Beispiel.
3. Wie wird die Verteilung einer sG definiert?
4. Wie ist allgemein die Verteilungsfunktion (VF) einer sG definiert? Welche Eigenschaften hat sie?
5. Prinzipielle Form der VF einer diskreten, stetigen, gemischten sG?
6. Die sG X habe die VF F . Drücken Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe von F aus: $P(X \leq a)$, $P(X < a)$, $P(X = a)$, $P(X > a)$, $P(X \geq a)$, $P(a < X \leq b)$, $P(a \leq X \leq b)$.
7. Wie ist allgemein das p -Quantil einer sG X definiert? Geben Sie eine grafische Veranschaulichung für den diskreten, stetigen und gemischten Fall.

8. Eine wichtige Größe ist der Median (= 50%-Quantil). Wie ist er definiert? Geben Sie eine grafische Veranschaulichung.
9. Wie ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion (W-Funktion) einer diskreten sG definiert? Welche Eigenschaften hat sie? Welche Form hat die VF im diskreten Fall?
10. Wie ist die Dichte(funktion) einer stetigen sG definiert? Welche Eigenschaften hat sie? Welche Beziehungen gibt es zwischen Dichte und VF? Ist die VF einer stetigen sG immer stetig? Sind Dichten immer stetige Funktionen?
11. Beschreiben Sie eine praktische Situation, bei der die Verteilung weder stetig noch diskret (also „gemischt“) ist. Warum verwendet man in diesem Fall für die Dichte eine spezielle Bezeichnung (im Skriptum/Buch f^*) ?
12. Worum geht es beim Transformationssatz für Dichten? Was besagt dieser Satz? Unter welchen Umständen lässt er sich anwenden? Was ist die Jacobian?
13. Was versteht man unter der Methode der Verteilungsfunktion? In welchem Zusammenhang wird sie verwendet?
14. Was ist eine affine Transformation? Welche Auswirkungen hat eine derartige Transformation auf die Form der Verteilung?
15. Wie ist der Erwartungswert (Mittelwert) einer diskreten sG definiert? Existiert er immer? Inwiefern lässt er sich physikalisch als Schwerpunkt interpretieren?
16. Wie ist der Erwartungswert (Mittelwert) einer stetigen sG definiert? Existiert er immer? Inwiefern lässt er sich physikalisch als Schwerpunkt interpretieren?
17. Wie ist der Erwartungswert im gemischten Fall definiert?
18. UE-Aufgabe 3.15 (Skriptum/Buch S. 145) beschäftigt sich mit der Bestimmung des Erwartungswerts mit Hilfe der VF. Geben Sie eine geometrische Interpretation.
19. Worum geht es beim *Law of the Unconscious Statistician* (LotUS)? Geben Sie ein Beispiel für die Anwendung dieses Satzes.
20. Was sind die wichtigsten Eigenschaften des Erwartungswerts?
21. Wie sind allgemein Varianz und Streuung (Standardabweichung) einer sG definiert? Existieren diese Größen immer?
22. Was besagt der Verschiebungssatz für die Varianz?
23. Was sind die wichtigsten Eigenschaften der Varianz/Streuung?
24. Kann die Varianz/Streuung auch negativ werden? Unter welchen Umständen ist die Varianz gleich Null?
25. Wie funktioniert (prinzipiell) die Inversionsmethode zur Generierung von Realisationen einer sG? Geben Sie eine grafische Veranschaulichung der Methode für den stetigen und diskreten Fall.

4. Spezielle Verteilungen

1. Was versteht man unter der diskreten uniformen Verteilung auf einer Menge $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$? Erwartungswert? Varianz?
2. Wie lautet die W-Funktion der Bernoulli-Verteilung $A(p)$? Träger? Bedeutung von p ? Erwartungswert? Varianz? Beispiel?
3. Wie lautet die W-Funktion der Binomialverteilung $B(n, p)$? Träger? Bedeutung von n und p ? Erwartungswert? Varianz? Bei welchen Fragestellungen wird sie verwendet? Geben Sie ein Beispiel.
4. Bei welchen Fragestellungen kommt die Negative Binomialverteilung $NB(r, p)$ zur Anwendung? Wie nennt man den Spezialfall $r = 1$?
5. Wie lautet die W-Funktion der Geometrischen Verteilung $G(p)$? Bedeutung von p ? Träger? Erwartungswert? Beispiel?
6. Die sog. *Memoryless Property* charakterisiert die $G(p)$ -Verteilung. Was bedeutet diese Eigenschaft? Geben Sie ein Beispiel.
7. Wie lautet die W-Funktion der Hypergeometrischen Verteilung $H(N, A, n)$? Bedeutung von N, A, n ? Bei welchen Fragestellungen wird sie verwendet? Geben Sie ein Beispiel.
8. Viele praktische Situationen lassen sich als Ziehungen mit bzw. ohne Zurücklegen modellieren. Was ist darunter zu verstehen? Geben Sie Beispiele.
9. Wie lautet die W-Funktion der Poisson-Verteilung $P(\lambda)$? Bedeutung des Parameters λ ? Träger? Erwartungswert? Beispiel?
10. Formulieren Sie die drei Bedingungen für das Vorliegen eines Poisson-Prozesses (Skriptum/Buch S. 160) in Worten. Beschreiben Sie eine Situation, bei der diese Bedingungen näherungsweise erfüllt sind (und eine, bei der das nicht der Fall ist).
11. Zwischen der Hypergeometrischen, der Binomial- und der Poisson-Verteilung gibt es approximative Beziehungen. Geben Sie einen kurzen Überblick.
12. Wie lautet die Dichte der stetigen uniformen Verteilung $U(a, b)$ auf dem Intervall (a, b) ? Erwartungswert? Varianz? Bei welcher Fragestellung benötigt man als ersten Schritt nach $U(0, 1)$ verteilte Zufallszahlen?
13. Wie lautet die Dichte der Exponentialverteilung $\text{Exp}(\tau)$ (oder $\text{Exp}(\lambda)$)? Welche Bedeutung hat der Parameter τ (bzw. λ)? Träger? Erwartungswert? Varianz? Beispiel?
14. Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion und (darunter) die Dichte einer Exponentialverteilung mit beispielsweise Mittelwert 2.
15. Die *Memoryless Property* (siehe auch Frage 6.) charakterisiert die Exp -Verteilung. Was bedeutet diese Eigenschaft? Geben Sie ein Beispiel.

16. Eine Verallgemeinerung der Exp-Verteilung ist die Gammaverteilung $\text{Gam}(\alpha, \lambda)$ (oder $\text{Gam}(\alpha, \beta)$). Dichte? Träger? Welche Bedeutung haben die Parameter α , λ (bzw. β)?
17. Ein Spezialfall (Welcher?) der Gammaverteilung ist die Chiquadratverteilung $\chi^2(r)$. Wie nennt man in diesem Fall den Parameter r ? Erwartungswert? Varianz? Skizzieren Sie beispielsweise die Dichte einer $\chi^2(2)$ -Verteilung.
18. Wie lautet die Dichte der allgemeinen Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$? Bedeutung der Parameter μ und σ ? Träger? Erwartungswert? Varianz? Dichte der Standardnormalverteilung?
19. Für die VF der Normalverteilung gibt es keinen expliziten Ausdruck. Wie bestimmt man mit Hilfe einer Tabelle (Welcher?) beispielsweise für $X \sim N(10, 100)$ den Wert von $F_X(20)$ oder $F_X(0)$?
20. Drücken Sie allgemein für $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ die Wahrscheinlichkeit von $a < X \leq b$ (für $a < b$ zwei reelle Zahlen) mit Hilfe der VF Φ der Standardnormalverteilung aus. Bestimmen Sie konkret für die N-Verteilung aus der vorhergehenden Frage die Wahrscheinlichkeit von $0 < X \leq 20$.
21. Die Antwort auf die beiden vorhergehenden Fragen basiert auf der Standardisierung von X . Dieser Vorgang ist auch außerhalb der Normalverteilung von Bedeutung. Was ist allgemein damit gemeint, wenn man eine sG mit Mittelwert μ und Varianz σ^2 standardisiert? (Antwort und Beispiele auf den Folien.)
22. In welcher Beziehung stehen Normal- und Chiquadratverteilung?
23. Die $t(n)$ -Verteilung (n = Freiheitsgrade) ist von großer Bedeutung in der inferentiellen Statistik. Die Form der Dichte erinnert an die Dichte der $N(0, 1)$ -Verteilung, hat aber (insbesondere für kleine Werte von n) „schwerere“ Ausläufer. Was genau ist damit gemeint? (Vgl. die Abbildung auf S. 177 im Skriptum/Buch.)
24. In vielen Anwendungen ist die Log-Normalverteilung $L(\mu, \sigma^2)$ (vgl. UE-Aufgabe 4.22) als Modell geeigneter als die Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$. Geben Sie ein Beispiel (> Internet/Wikipedia). In welcher Beziehung stehen diese beiden Verteilungen?
25. Bestimmen Sie jeweils das 5%- und das 95%-Quantil der folgenden Verteilungen: $N(10, 100)$, $t(18)$, $\chi^2(8)$, $F(3, 4)$. (Nehmen Sie dazu die Tabellen aus dem Skriptum/Buch; kontrollieren Sie die Ergebnisse mittels R.)

5. Multivariate Verteilungen

1. Wie ist für einen bivariaten stochastischen Vektor (sV) allgemein die Verteilungsfunktion (VF) definiert?
2. Diskreter Fall: Was ist und welche Eigenschaften hat eine bivariate W-Funktion?

3. Diskreter Fall: Was versteht man unter den Randverteilungen eines bivariaten stochastischen Vektors (X_1, X_2) ? Lässt sich aus den Randverteilungen stets die gemeinsame W-Funktion rekonstruieren?
4. Stetiger Fall: Was ist und welche Eigenschaften hat eine bivariate Dichte? Welche Beziehungen gibt es zwischen Verteilungsfunktion und Dichte?
5. Stetiger Fall: Was versteht man unter den Randdichten eines bivariaten stochastischen Vektors (X_1, X_2) ? Wie werden sie berechnet?
6. Diskreter Fall: Wie ist für einen sV (X_1, X_2) und eine Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ der Erwartungswert von $Y = g(X_1, X_2)$ definiert? (Welcher Satz wird dabei implizit verwendet?)
7. Stetiger Fall: Wie ist für einen sV (X_1, X_2) und eine Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ der Erwartungswert von $Y = g(X_1, X_2)$ definiert? (Welcher Satz wird dabei implizit verwendet?)
8. Diskreter Fall: Wie sind für eine bivariate W-Funktion $p(x_1, x_2)$ die bedingten W-Funktionen $p(x_2|x_1)$ und $p(x_1|x_2)$ definiert? Interpretation?
9. Diskreter Fall: Wie werden der bedingte Erwartungswert $\mathbb{E}(X_2|x_1)$ und die bedingte Varianz $\text{Var}(X_2|x_1)$ berechnet?
10. Stetiger Fall: Wie sind für eine bivariate Dichte $f(x_1, x_2)$ die bedingten Dichten $f(x_2|x_1)$ und $f(x_1|x_2)$ definiert? Interpretation?
11. Stetiger Fall: Wie werden der bedingte Erwartungswert $\mathbb{E}(X_2|x_1)$ und die bedingte Varianz $\text{Var}(X_2|x_1)$ berechnet?
12. Wie ist die Kovarianz $\text{Cov}(X, Y)$ zweier sGn X und Y definiert? Wie lautet der Verschiebungssatz für die Kovarianz? Ist der Verschiebungssatz für die Varianz ein Spezialfall des letzteren Satzes?
13. Wie ist der Korrelationskoeffizient zweier sGn X und Y definiert? Eigenschaften? Interpretation?
14. Wann sind zwei sGn X_1 und X_2 (stochastisch) unabhängig? Welche Konsequenzen hat das für die Berechnung des Erwartungswerts von $Y = u(X_1)v(X_2)$ (u, v zwei Funktionen)?
15. Welche Beziehung besteht zwischen Unabhängigkeit und Unkorreliertheit?
16. Im Abschnitt 5.4 (Skriptum/Buch S. 203f) werden die für den 2-dimensionalen Fall entwickelten Konzepte auf allgemeine sVn $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ erweitert. Geben Sie einen kurzen Überblick. Insbesondere: Wann sind X_1, X_2, \dots, X_n unabhängig? Was ist die (Varianz-) Kovarianzmatrix von \mathbf{X} ?
17. Für $X_i \sim F_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, ua.: Wie lautet der allgemeine Ausdruck für die VF von $Y_1 = \min_i \{X_i\}$ ($\hat{=}$ Seriensystem)? Speziell: $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$?

18. Für $X_i \sim F_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, ua.: Wie lautet der allgemeine Ausdruck für die VF von $Y_n = \max_i\{X_i\}$ ($\hat{=}$ Parallelsystem)? Speziell: $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$?
19. Was versteht man unter einem k -aus- n -System? Speziell: Was ist ein 1-aus- n -, ein n -aus- n -System?
20. Was versteht man unter der Multinomialverteilung? Beschreiben Sie eine Situation, bei der diese Verteilung verwendet wird. Spezialfälle? Eigenschaften? Randverteilungen?
21. Was versteht man unter der Polylhypergeometrischen Verteilung? Beschreiben Sie eine Situation, bei der diese Verteilung verwendet wird. Spezialfälle? Eigenschaften? Randverteilungen?
22. Multivariate (speziell: bivariate) Normalverteilung $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$: Geben Sie einen Überblick über die wichtigsten Eigenschaften dieser Verteilung. Was geschieht bei affinen Transformationen $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}$? Randverteilungen? Bedingte Verteilungen? (Nicht jedes Detail, ein paar grundsätzliche Eigenschaften.)
23. Bekanntlich gilt: Aus der Unabhängigkeit folgt die (paarweise) Unkorreliertheit, nicht aber in der umgekehrten Richtung. Gibt es eine Ausnahme? Wenn ja, welche? (Buch/Skriptum S. 220)
24. Was ist in Abbildung 5.8 (Skriptum/Buch S. 221) dargestellt? Was wird mit diesen Abbildungen demonstriert?
25. Die bedingten Erwartungswerte $\mathbb{E}(Y|X = x)$ bzw. $\mathbb{E}(X|Y = y)$ nennt man auch die Regressionsfunktionen (von Y auf X bzw. von X auf Y). Im Falle einer bivariaten Normalverteilung sind diese Funktionen von welcher Form? Was ist die Regressions-schere? (Wann klappt sie zusammen? Wann ist sie maximal geöffnet?)

6. Folgen von stochastischen Größen

1. Was versteht man unter einer linearen Funktion (oder Linearkombination) der sGn X_1, X_2, \dots, X_n ?
2. Ist der Erwartungswert einer linearen Funktion von X_1, X_2, \dots, X_n stets gleich der linearen Funktion der Erwartungswerte von X_i ? (Vs.: Die Erwartungswerte existieren.)
3. Vorausgesetzt die Erwartungswerte existieren, gilt stets $\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)$?
4. Wie oft muss man im Mittel eine Münze werfen, bis jede Seite zumindest einmal vorgekommen ist? Streuung? (Antwort auf den Folien.)
5. Wie lautet ein Ausdruck für die Varianz einer linearen Funktion $T = \sum_{i=1}^n a_i X_i$? (Vs.: Die Varianzen der X_i existieren.) Speziell: Geben Sie einen Ausdruck für $\text{Var}(X + Y)$ und $\text{Var}(X - Y)$.

6. Unter welchen Umständen gilt $\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var}(X_i)$?
7. X_1, X_2, \dots, X_n sei eine iid-Folge. (Vs.: μ und σ^2 existieren.) Wie lauten Erwartungswert und Varianz von $\sum_{i=1}^n X_i$ und von \bar{X}_n ?
8. Was versteht man allgemein unter Faltung? Geben Sie ein Beispiel. Häufig liest man, dass Faltung „glättet“. Was ist damit gemeint?
9. Diskrete Faltung: Wie bestimmt man allgemein das Faltprodukt für zwei W-Funktionen p_X und p_Y ? Beispiel: Was ergibt sich bei der Faltung von zwei unabhängigen Poisson-Verteilungen $P(\lambda_1)$ und $P(\lambda_2)$? (Verallgemeinerung?)
10. Stetige Faltung: Wie bestimmt man allgemein das Faltprodukt für zwei Dichten f_X und f_Y ? Beispiel: Was ergibt sich bei der Faltung von zwei unabhängigen uniformen Verteilungen $X \sim U(0, 1)$ und $Y \sim U(0, 1)$?
11. Was versteht man unter einem Additionstheorem? Formulieren Sie speziell das Additionstheorem für iid Bernoulli- und iid Exponentialgrößen X_1, X_2, \dots, X_n .
12. Formulieren Sie allgemein das Additionstheorem für Normalverteilungen. Beispiel: Wenn $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, ua., wie ist $X + Y$ und $X - Y$ verteilt?
13. Was besagt die Markow'sche Ungleichung? Beispiel: Für eine exponentialverteilte sG $X \sim \text{Exp}(\tau)$ ist $P(X \geq 2\tau) \leq ?$ (Wie groß ist die exakte Wahrscheinlichkeit?)
14. Was besagt die Tschebyschew'sche Ungleichung? (Es gibt mehrere äquivalente Formulierungen.) Beispiel: Für eine sG mit Mittelwert μ und Varianz σ^2 ist $P(|X - \mu| \geq 2\sigma) \leq ?$
15. Wie ist die stochastische Konvergenz (oder Konvergenz in der Wahrscheinlichkeit) definiert? Folgt (z. B.) aus $X_n \xrightarrow{P} a$ auch $X_n^2 \xrightarrow{P} a^2$?
16. Wie lautet das (schwache) Gesetz der großen Zahlen? Beispiel: Wie lautet es für eine iid-Folge X_1, X_2, \dots von nach $\text{Exp}(\tau)$ verteilten sGn?
17. Wie lautet das *starke* Gesetz der großen Zahlen? Beispiel: Wie lautet es für eine iid-Folge X_1, X_2, \dots von nach $\text{Exp}(\tau)$ verteilten sGn?
18. Inwiefern ist das in Kapitel 2 behandelte empirische GGZ ein Spezialfall des hier behandelten schwachen GGZ?
19. Wie ist die Konvergenz in der Verteilung definiert? Welche Beziehungen gibt es zur Konvergenz in der Wahrscheinlichkeit? Warum nennt man die Verteilungskonvergenz auch die „schwache“ Konvergenz?
20. Was besagt der Zentrale Grenzwertungssatz (ZGVS)? Beispiel: Wie lautet der Satz für den Fall einer iid-Folge X_1, X_2, \dots von nach $\text{Exp}(\tau)$ verteilten sGn? (Es gibt mehrere äquivalente Formulierungen.)

21. Inwiefern ist der ZGVS eine Aussage über die wiederholte Faltung einer Verteilung mit sich selbst?
22. X_1, X_2, \dots, X_n sei eine iid-Folge. (Vs.: μ und σ^2 existieren.) Wenn n groß ist, wie sind $\sum_{i=1}^n X_i$ und \bar{X}_n approximativ verteilt? (Vgl. dazu auch Frage 7.)
23. Vielfach verwendet man bei approximativen Rechnungen die „Stetigkeitskorrektur“. Was ist damit gemeint? Unter welchen Umständen kann diese Korrektur verwendet werden? Geben Sie ein Beispiel.
24. Wie lautet die Normalapproximation der Binomialverteilung? Unter welchen Umständen ist sie zulässig? Beispiel: $B(100, 0.1) \approx N(\quad, \quad)$?
25. Wie lautet die Normalapproximation der Poisson-Verteilung? Unter welchen Umständen ist sie zulässig? Beispiel: $P(10) \approx N(\quad, \quad)$?

7. Schließende Statistik

1. Was sind die Hauptaufgaben der schließenden (oder inferentiellen) Statistik?
2. Worin unterscheiden sich parametrische von nichtparametrischen Modellen? Geben Sie jeweils ein Beispiel.
3. Was ist eine Stichprobe? Was bedeutet die Abkürzung uiv oder iid? Was versteht man unter der Realisation einer Stichprobe?
4. Die gemeinsame Dichte (bzw. W-Funktion) einer Stichprobe lässt sich als Produkt der einzelnen Dichten (bzw. W-Funktionen) darstellen. Warum?
5. Ein zentraler Begriff ist der einer Statistik? Was ist damit gemeint? Nennen Sie mehrere Beispiele.
6. Was ist allgemein ein Schätzer (oder eine Schätzfunktion)? Geben Sie Beispiele.
7. Was ist der Unterschied zwischen einem Schätzer und einem Schätzwert? (Oder gibt es keinen Unterschied?)
8. Die drei am häufigsten verwendeten (Punkt-) Schätzer sind der Stichprobenmittelwert, die Stichprobenvarianz und die Stichprobenstreuung. Wie sind diese Größen definiert und für welche (theoretischen) Parameter der Grundgesamtheit sind sie die bevorzugten Schätzer?
9. Eine wichtige Schätzfunktion ist die empirische Verteilungsfunktion. Wie ist sie definiert? Wie wird sie gezeichnet (auf Basis einer Stichprobe x_1, x_2, \dots, x_n)? Wofür ist sie ein Schätzer? Eigenschaften?
10. Was besagt der Satz von Glivenko-Cantelli? Warum nennt man ihn auch den Fundamentalsatz der Statistik? Erläutern Sie die Bedeutung des Satzes an Hand der Abbildungen 7.1 und 7.2.

11. Was ist die Grundidee hinter der Momentenschätzmethode? Wie lauten die Momentenschätzer für den Mittelwert, die Varianz und die Streuung einer Verteilung?
12. Was ist die Likelihood(funktion)? Wie lässt sich diese Funktion interpretieren? (Gibt es einen Unterschied zwischen dem diskreten und dem stetigen Fall?) Beispiel: Auf Basis der Stichprobe 2, 1, 3, 1, 1, 2, 2, 2, 5, 4 von $X \sim P(\lambda)$ (Poisson), wie lautet die Likelihoodfunktion für λ ? (Vereinfachen Sie so weit wie möglich.)
13. Was ist die Grundidee hinter der M(aximum)L(ikelihood)–Methode zur Schätzung von Verteilungsparametern? Erläutern Sie die praktische Vorgangsweise für die Bestimmung von ML–Schätzern. Beispiel: Führen Sie das Bsp der vorherigen Frage weiter aus und bestimmen Sie den ML–Schätzer von λ . (Kennen Sie dafür eine R–Funktion?)
14. Die ML–Methode hat eine wichtige Eigenschaft, die Invarianz. Was ist damit gemeint? Geben Sie ein Beispiel.
15. Erläutern Sie die praktische Vorgangsweise für die Bestimmung des ML–Schätzers bei einem mehrdimensionalen Parameter $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)'$.
16. Wie lauten auf Basis einer Stichprobe X_1, X_2, \dots, X_n von $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ die ML–Schätzer für μ (= Mittelwert), σ^2 (= Varianz) und σ (= Streuung)?
17. Was bedeutet es (theoretisch und praktisch), wenn ein Schätzer (asymptotisch) erwartungstreu (oder unverzerrt) ist? Was versteht man unter dem Bias eines Schätzers?
18. Sind der Stichprobenmittelwert \bar{X}_n und die Stichprobenvarianz S_n^2 erwartungstreue Schätzer für den Mittelwert μ und die Varianz σ^2 einer Verteilung? Ist die Stichprobenstreuung S_n erwartungstreu für die Streuung σ ?
19. Was bedeutet es, wenn ein Schätzer effizienter als ein anderer ist? Beispiel: Ist X_1, X_2, \dots, X_n eine Stichprobe aus $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, könnte man neben \bar{X} auch den Median \tilde{X} als (erwartungstreuen) Schätzer für μ nehmen. (Warum?) Intuitiv: Welcher Schätzer ist effizienter?
20. Was versteht man unter einem linear effizienten Schätzer? Beispiel: Für eine Stichprobe X_1, X_2, \dots, X_n aus $X \sim \text{Exp}(\tau)$, wie lautet der linear effiziente Schätzer von τ (= Mittelwert von X)?
21. Was bedeutet es (theoretisch und praktisch), wenn ein Schätzer konsistent ist? Gibt es ein Kriterium mit dem man feststellen kann, ob ein Schätzer konsistent ist?
22. Sind der Stichprobenmittelwert \bar{X}_n , die Stichprobenvarianz S_n^2 und die Stichprobenstreuung S_n konsistente Schätzer für den Mittelwert μ , die Varianz σ^2 und die Streuung σ einer Verteilung?
23. Der Stichprobenmittelwert \bar{X}_n ist ein konsistenter Schätzer für den Mittelwert μ einer Verteilung. In diesem Fall handelt es sich nur um eine andere Formulierung für welches grundlegende Gesetz der Wahrscheinlichkeitstheorie?

24. Häufig findet man die Feststellung, dass ML-Schätzer – zumindest für große Stichproben – „optimale“ Schätzer sind. Was ist damit gemeint? (M. a. W., welche Eigenschaften haben diese Schätzer?)
25. Was ist ein Konfidenzintervall (KI) für einen Parameter θ mit Konfidenzkoeffizient $1 - \alpha$? Was versteht man unter der Überdeckungswahrscheinlichkeit (ÜW)?
26. Was versteht man unter einem Equal-Tails-Konfidenzintervall mit ÜW $1 - \alpha$?
27. Was ist eine Pivotgröße (oder ein Pivot)? Was ist deren hauptsächliche Verwendung in der Statistik? Was versteht man unter einem approximativen Pivot?
28. Wie funktioniert (in groben Zügen) die Pivotmethode zur Konstruktion von KIn?
29. Wie lautet – bei nicht zu kleinen Stichproben – ein approximatives KI (mit ÜW $1 - \alpha$) für den Mittelwert μ einer Verteilung?
30. Was ist die grundsätzliche Idee hinter der sog. Monte-Carlo-Integration? (Skriptum S. 273, Buch S. 279)
31. Worum geht es beim Hauptsatz der (mathematischen) Statistik (auch genannt Satz von Student)? (Skriptum S. 274, Buch S. 280)
32. Wie lautet für eine Stichprobe X_1, X_2, \dots, X_n aus $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ das KI (mit ÜW $1 - \alpha$) für μ ? (Kennen Sie dafür eine R-Funktion?)
33. Wann spricht man von verbundenen (oder gepaarten) Stichproben? Was ist die korrekte Vorgangsweise bei der statistischen Analyse derartiger Daten? Geben Sie ein Beispiel.
34. Wie lautet für eine Stichprobe X_1, X_2, \dots, X_n aus $X \sim A(p)$ (Bernoulli) das sog. Standard- (oder Wald-) Intervall für p ? Was ist in Abbildung 7.7 (Skriptum S. 282, Buch S. 288) dargestellt? Was kann man dieser Abbildung entnehmen?
35. Was ist die grundsätzliche Idee hinter der Bootstrappmethode zur Konstruktion von KIn? Erläutern Sie die Vorgangsweise an Hand eines Beispiels (z. B. an Hand von UE-Aufgabe 7.17).
36. Was versteht man unter einem (statistischen) Test? Erläutern Sie die grundlegenden Begriffe: Null-/Gegenhypothese, ein-/zweiseitige Tests, Testentscheidung, kritischer Bereich.
37. Warum ist es nicht gleichgültig, welche Behauptung als Null- und welche als Gegenhypothese gewählt wird? Geben Sie ein Beispiel.
38. Wann macht man beim Testen einen Typ I Fehler (Fehler 1. Art, α -Fehler), wann einen Typ II Fehler (Fehler 2. Art, β -Fehler)? Ist der eine das Komplement des anderen (d. h., gilt $\beta = 1 - \alpha$)?
39. Was versteht man unter dem (Signifikanz) Niveau eines Tests?

40. Wann spricht man beim Testen von einer starken, wann von einer schwachen Schlussfolgerung? Warum ist die eine stark und die andere schwach?
41. Worin besteht das eigentliche „Ziel“ des (Parameter) Testens? In der Verwerfung oder in der Akzeptanz der Nullhypothese? (Begründung?)
42. Was versteht man unter der Power(funktion) (oder Schärfe(funktion)) eines Tests?
43. Eine wichtige Größe bei statistischen Tests ist der p -Wert. Wie ist er definiert? (Es gibt zwei - äquivalente - Definitionen.) Wie ist er zu interpretieren?
44. Häufig liest man, dass ein (Test) Ergebnis „signifikant“ ist. Was genau ist damit gemeint? Was ist bei dieser Sprechweise zu beachten? Was ist der Unterschied zwischen praktischer und statistischer (d. h., formaler) Signifikanz?
45. Erläutern Sie an Hand eines Beispiels die Beziehung zwischen (zweiseitigen) Tests und (zweiseitigen) Konfidenzintervallen.
46. Erläutern Sie die Vorgangsweise beim Testen von Hypothesen betreffend den Mittelwert μ für eine Stichprobe X_1, X_2, \dots, X_n aus einer $N(\mu, \sigma_0^2)$ -Verteilung, wenn die Varianz σ_0^2 bekannt ist. Unter welchen Umständen kann der Test auch dann verwendet werden, wenn die Stichprobe nicht aus einer Normalverteilung stammt?
47. Erläutern Sie die Vorgangsweise beim Testen von Hypothesen betreffend den Mittelwert μ für eine Stichprobe X_1, X_2, \dots, X_n aus einer $N(\mu, \sigma^2)$ -Verteilung, wenn die Varianz σ^2 unbekannt ist.
48. Betrachten Sie die folgende Situation: Ein neues Medikament wird 30 Patienten verabreicht. Bei 25 Patienten zeigt sich ein Heilerfolg, bei 5 Patienten nicht. Man möchte das Medikament aber nur dann einsetzen, wenn die Wahrscheinlichkeit für eine Heilung größer als 75% ist. Wie lautet in diesem Fall die Null- und die Gegenhypothese? Wie groß ist der p -Wert? Wenn $\alpha = 5\%$, reicht die Zahl der Heilerfolge für den Einsatz des Medikaments? (Nehmen Sie zur Beantwortung passende R-Funktionen.)
49. Was ist der gepoolte Varianzschätzer S_p^2 und bei welchen Tests (und Konfidenzintervallen) wird er verwendet?
50. Für eine Stichprobe des Umfangs $n = 20$ aus einer bivariaten Normalverteilung $(X, Y) \sim N_2$ ergibt sich eine Stichprobenkorrelation von $R = 0.5$. Testen Sie mit $\alpha = 5\%$, ob X und Y unabhängig sind (vgl. Skriptum S. 309, Buch S. 315).
51. QQ-Plots dienen zum grafischen Testen von Verteilungshypothesen. Was genau ist damit gemeint? Beschreiben Sie insbesondere, wie auf Basis einer Stichprobe x_1, x_2, \dots, x_n der Normal-QQ-Plot gezeichnet wird. Wie wird er interpretiert?
52. Eine klassische Methode zum Testen von Verteilungshypothesen ist der Chiquadrat-Anpassungstest. Wie lautet das Grundprinzip bei dieser Klasse von Tests?
53. In welchen Situationen wird der einfache Chiquadrat-Anpassungstest angewendet? Beschreiben Sie an Hand eines Beispiels die praktische Durchführung dieses Tests.

54. In welchen Situationen wird der zusammengesetzte Chiquadrat-Anpassungstest angewendet? Beschreiben Sie an Hand eines Beispiels die praktische Durchführung dieses Tests.
55. Eine Münze wird 10 Mal geworfen, wobei 8 Mal H(ead) und 2 Mal T(ail) kommt. Ist die Münze symmetrisch? Nehmen Sie den Chiquadrat-Anpassungstest mit $\alpha = 5\%$. Wie groß ist der p -Wert?

-- [w i r d f o r t g e s e t z t] --