⟨ S t a t W t h 1 7 ⟩

6. Folgen von stochastischen Größen

Werner Gurker

Institut für Stochastik und Wirtschaftsmathematik

Technische Universität Wien

Lineare Funktionen

Für sGn $X_1, X_2, \ldots, X_n$ und (reelle) Konstanten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nennt man eine Funktion der Form:

$$T = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

eine lineare Funktion (oder eine Linearkombination) von $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Bsp: Der Stichprobenmittelwert $\overline{X}$ ist eine Linearkombination von $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{n}}_{a_i} X_i$$

Erwartungswert einer Linearkombination

Sei $T = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ eine lineare Funktion von $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Dann gilt: $$\mathbb{E}(T) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mathbb{E}(X_i)$$

Beweis: Folgt aus der Linearität des Erwartungswerts.

Bem: Für die Gültigkeit dieser Aussage ist es nicht erforderlich, dass die sGn $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (stochastisch) unabhängig sind!

Kovarianz zweier Linearkombinationen

Für $T = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ und $W = \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j$ gilt:

$$\mathrm{Cov}(T, W) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i\, b_j\, \mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$$

Beweis: Skriptum S. 227, Buch S. 233

Folgerungen

Folgerung 1: Für $T = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ gilt:

$$\mathrm{Var}(T) = \mathrm{Cov}(T, T) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \, \mathrm{Var}(X_i) + 2 \sum_{i<j} a_i \, a_j \, \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

Folgerung 2: Sind $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängig, so gilt:

$$\mathrm{Var}(T) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \, \mathrm{Var}(X_i)$$

Bem: Für die Gültigkeit von Folgerung 2 genügt die (paarweise) Unkorreliertheit von X_i und X_j für alle $i \neq j$.

Beispiel 1: Stichprobenmittelwert

Ist $X_1, X_2, \ldots, X_n$ eine iid–Folge von sGn (eine „Stichprobe“) mit Mittelwert μ und Varianz σ^2, so nennt man:

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

den Stichprobenmittelwert von $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Erwartungswert: $$\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}(X_i)}_{=\mu} = \frac{n\,\mu}{n} = \mu$$

Varianz: $$\mathrm{Var}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathrm{Var}(X_i)}_{=\sigma^2} = \frac{n\,\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Beispiel 2

Wie oft muss man einen Würfel im Mittel (= Erwartungswert) werfen, bis alle sechs Augenzahlen zumindest einmal vorgekommen sind?

Sei X die dafür nötige Zahl von Würfen.

Um $\mathbb{E}(X)$ zu bestimmen, zerlegen wir X in eine Summe:

$$X = X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$$

wobei die sGn X_i, $i = 0, 1, \ldots, 5$, wie folgt definiert sind:

Wurden bereits i verschiedene Augenzahlen geworfen, ist X_i die notwendige zusätzliche Zahl von Würfen, um eine weitere (verschiedene) Augenzahl zu werfen.

Beispiel 2 (Forts.)

Die sGn X_i, $i = 0, 1, \ldots, 5$, sind geometrisch verteilt, $X_i \sim \mathrm{G}(p_i)$, wobei $p_i = (6-i)/6$:

$$\text{W–Funktion:} \quad P(X_i = k) = \frac{6-i}{6}\left(\frac{i}{6}\right)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{p_i}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1-p_i}{p_i^2}$$

Damit folgt für den Mittelwert von X:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{5} \mathbb{E}(X_i) = 6\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \cdots + 1\right) = 14.7$$

Beispiel 2 (Forts.)

Die sGn X_i, $i = 0, 1, \ldots, 5$ sind unabhängig (Warum?); damit folgt für die Varianz von X:

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=0}^{5} \mathrm{Var}(X_i) = 6\left(\frac{1}{5^2} + \frac{2}{4^2} + \cdots + \frac{5}{1^2}\right) \approx 39$$

Verallgemeinerung: Man betrachte einen (virtuellen) symmetrischen $N-$seitigen Würfel. Die sG X sei die Zahl der Würfe, sodass alle N Augenzahlen zumindest einmal vorgekommen sind. Dann gilt:

$$X = \sum_{i=0}^{N-1} X_i \quad \text{wobei} \quad X_i \sim \mathrm{G}(p_i), \quad p_i = \frac{N-i}{N}$$

Beispiel 2 (Forts.)

Der Erwartungswert von X ist gegeben durch:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{p_i} = N\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N-1} + \cdots + 1\right)$$

Bem: Der obige Ausdruck für $\mathbb{E}(X)$ erinnert an den Ausdruck für die mittlere Lebensdauer eines Parallelsystems mit identisch nach $\mathrm{Exp}(\lambda)$ verteilten Lebensdauern der Komponenten. (Vgl. Kap. 5/Folie 53 bzw. Skriptum/Buch S. 211.) Das ist kein Zufall! (Warum?)

Die sGn X_i sind unabhängig; daher gilt für die Varianz von X:

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=0}^{N-1} \mathrm{Var}(X_i) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1-p_i}{p_i^2} = N \sum_{i=0}^{N-1} \frac{i}{(N-i)^2}$$

Beispiel 2 (Forts.)

Der folgende R–Output zeigt $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$ und $\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ für einen (virtuellen) symmetrischen Würfel mit $N = 1, 2, \ldots, 10$ Seiten:

```
     Mittel  Varianz  Streuung
 1    1.000    0.000     0.000
 2    3.000    2.000     1.414  <<-- Münze
 3    5.500    6.750     2.598
 4    8.333   14.444     3.801
 5   11.417   25.174     5.017
 6   14.700   38.990     6.244  <<-- 6-seitiger Würfel
 7   18.150   55.928     7.479
 8   21.743   76.012     8.718
 9   25.461   99.260     9.963
10   29.290  125.687    11.211
```

Beispiel 3: Allgemeiner $N-$seitiger Würfel

Nun betrachten wir einen allgemeinen $N-$seitigen Würfel, der mit der Wahrscheinlichkeit $0 \leq w_i \leq 1$, wobei $\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$, auf die Augenzahl $i = 1, 2, \ldots, N$ fällt. (Bem: Im vorigen Bsp 2 haben wir den Spezialfall $w_i = 1/N$, $i = 1, 2, \ldots, N$, betrachtet.)

Frage: Wie oft muss man den Würfel im Mittel (= Erwartungswert) werfen, sodass jede Augenzahl zumindest einmal vorgekommen ist?

Antwort: Ist X die Zahl von Würfen, sodass jede Augenzahl zumindest einmal vorgekommen ist, so lässt sich der Erwartungswert von X wie folgt darstellen (o. B.):

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \left[1 - \prod_{i=1}^{N} \left(1 - e^{-w_i x}\right) \right] dx$$

Bem: Man vergleiche diesen Ausdruck mit der Formel von UE–Aufgabe 3.15 sowie mit Kap. 5/Folie 53 (bzw. mit Skriptum/Buch S. 211).

Faltung

Möchte man die Verteilung von $X + Y$ aus den Verteilungen von zwei unabhängigen sGn X und Y bestimmen, spricht man von Faltung (engl. *convolution*).

Bem: Der Name bezieht sich auf den geometrischen Aspekt der Art und Weise, wie die Verteilung von $X + Y$ bestimmt wird. (Siehe *Wikipedia* für animierte Grafiken.)

Diskrete Faltung

X und Y seien zwei diskrete, unabhängige sGn mit den W–Funktionen $p_X(x) = P(X = x)$ bzw. $p_Y(y) = P(Y = y)$.

Dann ist die W–Funktion von $X + Y$ gegeben durch:

$$p_{X+Y}(a) = \sum_{x \in M_X} p_X(x)\, p_Y(a - x) = \sum_{y \in M_Y} p_X(a - y)\, p_Y(y)$$

$$\text{für} \quad a \in M_{X+Y}$$

Die obige Darstellung für p_{X+Y} nennt man auch das Faltprodukt von p_X und p_Y und schreibt:

$$p_{X+Y} = p_X * p_Y = p_Y * p_X$$

Beispiel: Faltung zweier ua. Poisson–Verteilungen

$$X \sim p_X(x) = \frac{\lambda_1^x \, e^{-\lambda_1}}{x!}, \; x \in \mathbb{N}_0, \quad Y \sim p_Y(y) = \frac{\lambda_2^y \, e^{-\lambda_2}}{y!}, \; y \in \mathbb{N}_0$$

$$p_{X+Y}(a) = \sum_{x=0}^{a} \frac{\lambda_1^x \, e^{-\lambda_1}}{x!} \, \frac{\lambda_2^{a-x} \, e^{-\lambda_2}}{(a-x)!} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{x=0}^{a} \frac{\lambda_1^x \lambda_2^{a-x}}{x!(a-x)!}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{a!} \underbrace{\sum_{x=0}^{a} \frac{a!}{x!(a-x)!} \, \lambda_1^x \lambda_2^{a-x}}_{=(\lambda_1+\lambda_2)^a} = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^a \, e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{a!}, \; a \in \mathbb{N}_0$$

$$\Longrightarrow \quad X + Y \sim \mathrm{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Stetige Faltung

X und Y seien zwei stetige, unabhängige sGn mit den Dichten $f_X(x)$ bzw. $f_Y(y)$.

Dann ist die Dichte von $X + Y$ gegeben durch:

$$f_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(a-x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(a-y)\, f_Y(y)\, dy$$

$$\text{für} \quad a \in M_{X+Y}$$

Die obige Darstellung für f_{X+Y} nennt man auch das Faltprodukt von f_X und f_Y und schreibt:

$$f_{X+Y} = f_X * f_Y = f_Y * f_X$$

Beispiel: Faltung zweier ua. Exp(λ)–Verteilungen

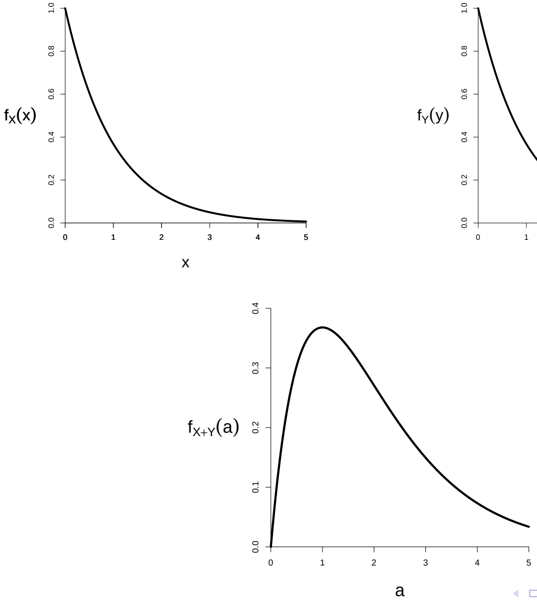
$$X \sim f_X(x) = \lambda\, e^{-\lambda x},\ x > 0, \quad Y \sim f_Y(y) = \lambda\, e^{-\lambda y},\ y > 0$$

$$f_{X+Y}(a) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(a-x)\, dx = \int\limits_0^a \lambda\, e^{-\lambda x}\, \lambda\, e^{-\lambda(a-x)}\, dx$$

$$= \lambda^2\, e^{-\lambda a} \int\limits_0^a dx = \lambda^2\, a\, e^{-\lambda a} = \frac{\lambda^2\, a^{2-1}\, e^{-\lambda a}}{\Gamma(2)},\ a > 0$$

$$\Longrightarrow \quad X + Y \sim \mathrm{Gam}(\alpha = 2, \lambda)$$

Beispiel (Forts.)



Additionstheoreme

Bernoulli–Verteilung:

$$X_i \sim \mathrm{A}(p),\ \ i = 1, 2, \ldots, n,\ \ \text{ua.} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{B}(n, p)$$

Binomialverteilung:

$$X_i \sim \mathrm{B}(n_i, p),\ \ i = 1, 2, \ldots, n,\ \ \text{ua.} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{B}\left(\sum_{i=1}^{n} n_i, p\right)$$

Poisson–Verteilung:

$$X_i \sim \mathrm{P}(\lambda_i),\ \ i = 1, 2, \ldots, n,\ \ \text{ua.} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$

Additionstheoreme (Forts.)

Geometrische Verteilung:

$$X_i \sim \mathrm{G}(p),\ \ i = 1, 2, \ldots, r,\ \ \text{ua.} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{r} X_i \sim \mathrm{NB}(r, p)$$

Exponentialverteilung:

$$X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda),\ \ i = 1, 2, \ldots, n,\ \ \text{ua.} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{Gam}(n, \lambda)$$

Chiquadratverteilung:

$$X_i \sim \chi^2(n_i),\ \ i = 1, 2, \ldots, n,\ \ \text{ua.} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2\left(\sum_{i=1}^{n} n_i\right)$$

Additionstheoreme (Forts.)

Normalverteilung:

$$X_i \sim \mathrm{N}(\mu_i, \sigma_i^2), \;\; i = 1, 2, \ldots, n, \;\; \text{ua.} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{N}\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$$

Mit Konstanten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gilt allgemeiner:

$$X_i \sim \mathrm{N}(\mu_i, \sigma_i^2), \;\; i = 1, 2, \ldots, n, \;\; \text{ua.} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim \mathrm{N}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

Konvergenz

Nun erweitern wir den aus der Analysis bekannten Konvergenzbegriff auf Folgen von stochastischen Größen.

Wir formulieren zwei klassische Theoreme der Wahrscheinlichkeitstheorie:

Gesetz der großen Zahlen (GGZ)

Zentraler Grenzverteilungssatz (ZGVS)

Für beide Theoreme gibt es mehrere Versionen mit verschieden starken Voraussetzungen.

Wir betrachten nur die einfachsten Versionen (für iid–Folgen).

Markow'sche Ungleichung

Ist X eine nichtnegative sG (d. h. $X \geq 0$), deren Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ existiert, dann gilt für $a > 0$:

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Beweis: Skriptum S. 236, Buch S. 242

Allgemeinere Form: Ist $u(X)$ eine nichtnegative Funktion der sG X (d. h. $u(X) \geq 0$) und existiert $\mathbb{E}\left[u(X)\right]$, dann gilt für $a > 0$:

$$P\left(u(X) \geq a\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[u(X)\right]}{a}$$

Tschebyschew'sche Ungleichung

Ist X eine sG mit Mittelwert μ und Varianz σ^2, dann gilt für $k > 0$:

$$P(|X - \mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

Beweis: Skriptum S. 237, Buch S. 243

Äquivalente Formen:

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}, \qquad P(|X - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Stochastische Konvergenz

$\{X_n\}$ sei eine Folge von sGn und X sei eine weitere sG.

Man sagt, dass X_n stochastisch – oder in der Wahrscheinlichkeit – gegen X konvergiert, wenn für alle $\epsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| < \epsilon) = 1$$

Man schreibt: $\quad X_n \xrightarrow{P} X$

Ist X eine Konstante, d. h. gilt $P(X = a) = 1$ für einen Punkt a, schreibt man:

$$X_n \xrightarrow{P} a$$

Behauptung

Angenommen, die Folge $\{X_n\}$ konvergiert in der Wahrscheinlichkeit gegen eine Konstante a, d. h. $X_n \xrightarrow{P} a$.

Dann gilt für eine an der Stelle a stetige Funktion g :

$$g(X_n) \xrightarrow{P} g(a)$$

Anwendungen: Aus $X_n \xrightarrow{P} a$ folgt auch:

$$X_n^2 \xrightarrow{P} a^2, \quad 1/X_n \xrightarrow{P} 1/a \quad (\text{falls} \quad a \neq 0), \quad \ldots$$

Schwaches Gesetz der großen Zahlen (schGGZ)

$\{X_n\}$ sei eine iid–Folge mit dem Mittelwert μ und der Varianz $\sigma^2 < \infty$.

Sei $\overline{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$ der Stichprobenmittelwert der ersten n Elemente.

Dann gilt: $\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu$

Beweis: Für den Stichprobenmittelwert gilt:

$$\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \mu \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Nach der Tschebyschew'schen Ungleichung gilt für alle $\epsilon > 0$:

$$P(|\overline{X}_n - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2/n}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\,\epsilon^2} \longrightarrow 0 \qquad \text{für} \quad n \longrightarrow \infty$$

Bemerkungen

(a) Anschaulich besagt das schwache GGZ, dass für großes n der Stichprobenmittelwert $\overline{X}_n$ mit hoher Wahrscheinlichkeit in der Nähe des Erwartungswerts μ liegt.

(b) Man kann im schGGZ auf die Existenz der Varianz verzichten. (Da in diesem Fall die Tschebyschew'sche Ungleichung nicht verwendet werden kann, ist der Beweis schwieriger.)

(c) Es gibt auch ein starkes GGZ: Ist $\{X_n\}$ eine iid–Folge mit dem Mittelwert μ, dann gilt:

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\overline{X}_n = \mu\right) = 1$$

Diese Art der Konvergenz nennt man fast sichere Konvergenz.

Beispiel zum schGGZ

Die (diskrete) sG X mit Merkmalraum $M_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ habe die W–Funktion:

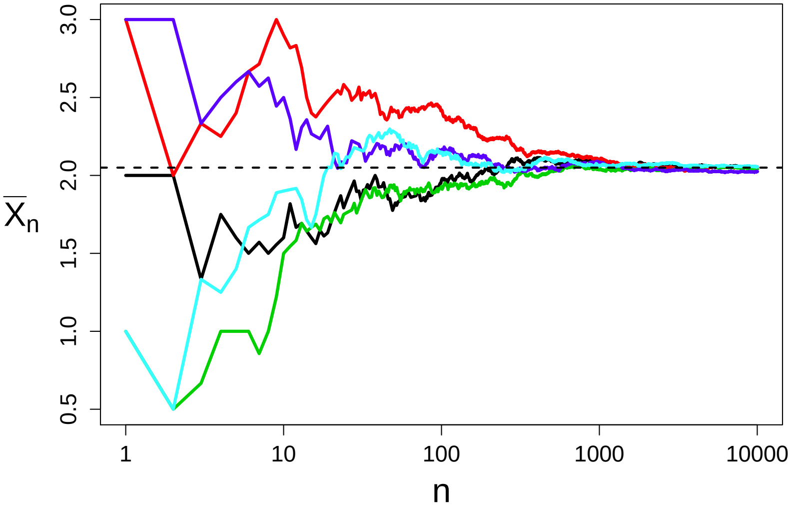
x	0	1	2	3	4
$p(x)$	0.1	0.2	0.3	0.35	0.05

$$\longrightarrow \quad \mathbb{E}(X) = \sum_{x=0}^{4} x\, p(x) = 2.05$$

Da die Varianz von X existiert, besagt das schGGZ:

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \mathbb{E}(X) = 2.05$$

Beispiel zum schGGZ (Forts.)



Konvergenz in der Verteilung

$\{X_n\}$ sei eine Folge von sGn und X sei eine weitere sG.

F_{X_n} und F_X seien die Verteilungsfunktionen von X_n bzw. X.

$C(F_X)$ sei die Menge aller Stetigkeitspunkte von F_X.

X_n konvergiert in der Verteilung gegen X, wenn:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \quad \text{für alle} \quad x \in C(F_X)$$

Man schreibt in diesem Fall:

$$X_n \xrightarrow{D} X$$

Behauptung

Konvergiert X_n in der Wahrscheinlichkeit gegen X, so konvergiert X_n auch in der Verteilung gegen X :

$$X_n \xrightarrow{P} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow{D} X$$

Bem: Diese Behauptung besagt, dass die Konvergenz in der Verteilung schwächer als die Konvergenz in der Wahrscheinlichkeit ist. Aus diesem Grund nennt man die Konvergenz in der Verteilung auch die schwache Konvergenz.

Ist X eine Konstante, gilt auch die Umkehrung:

$$X_n \xrightarrow{D} a \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow{P} a$$

Zentraler Grenzverteilungssatz (ZGVS)

$\{X_n\}$ sei eine iid–Folge mit Mittelwert μ und Varianz $\sigma^2 < \infty$.

$\overline{X}_n$ sei der Stichprobenmittelwert der ersten n Elemente.

Y_n sei der standardisierte Stichprobenmittelwert:

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma}$$

Dann gilt: Die Folge $\{Y_n\}$ konvergiert in der Verteilung gegen eine standardnormalverteilte sG $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$, d. h., für $n \longrightarrow \infty$ gilt:

$$P(Y_n \leq z) \longrightarrow \Phi(z) \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{R}$$

$$\Phi \ \ldots \ \text{VF von N}(0,1)$$

Äquivalente Formulierungen des ZGVS

Für große Stichproben – d. h., für großes n – gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \approx \mathrm{N}\left(n\mu, n\sigma^2\right)$$

M. a. W., durch wiederholte Faltung wird die Ausgangsverteilung quasi „abgestreift".

$$\overline{X}_n \approx \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \quad \overline{X}_n - \mu \approx \mathrm{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu) \approx \mathrm{N}(0, \sigma^2), \quad \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} \approx \mathrm{N}(0, 1)$$

Simulation zum ZGVS

Man betrachte eine Folge von unabhängigen und identisch nach Exp(1) verteilten sGn:

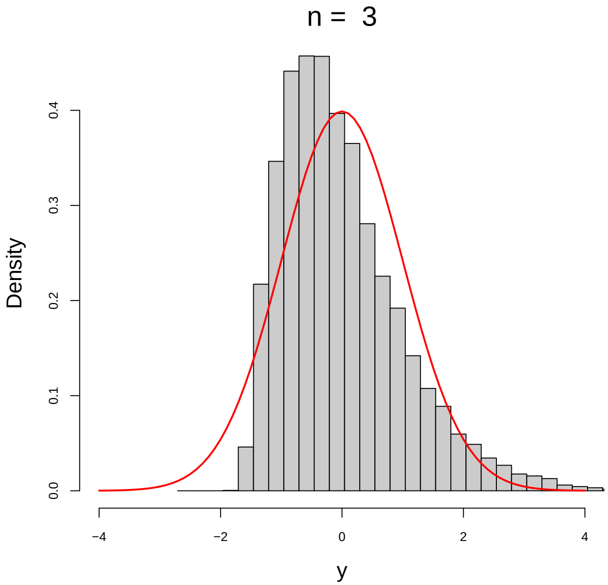
$$X_1, X_2, \ldots \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Exp}(1): \; f(x) = e^{-x}, \; x > 0$$

Die standardisierten Summen Y_n sind gegeben durch:

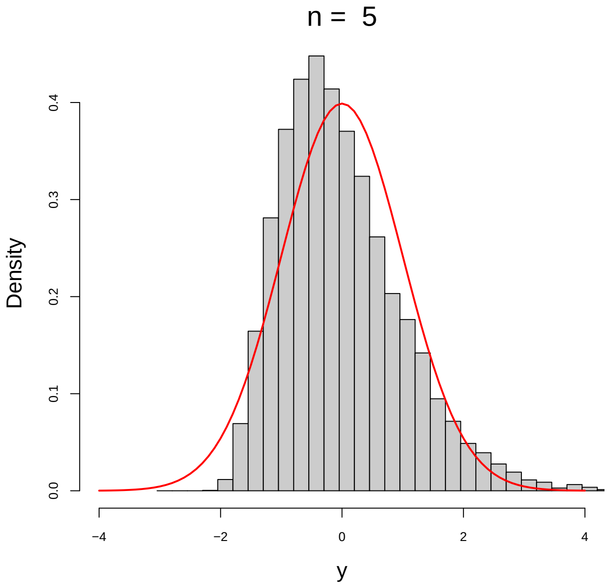
$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}(\overline{X}_n - 1)$$

Die folgenden Abbildungen zeigen das Ergebnis für $n = 3, 5, 10, 50$ auf Basis von jeweils $N = 10000$ simulierten Werten für Y_n. Die darüber gezeichneten Kurven entsprechen der Dichte $\varphi(x)$ der N(0, 1)–Verteilung. Da hier die Ausgangsverteilung sehr schief ist, braucht es vergleichsweise große n–Werte, um ihren Einfluss auf die Faltung „abzustreifen".

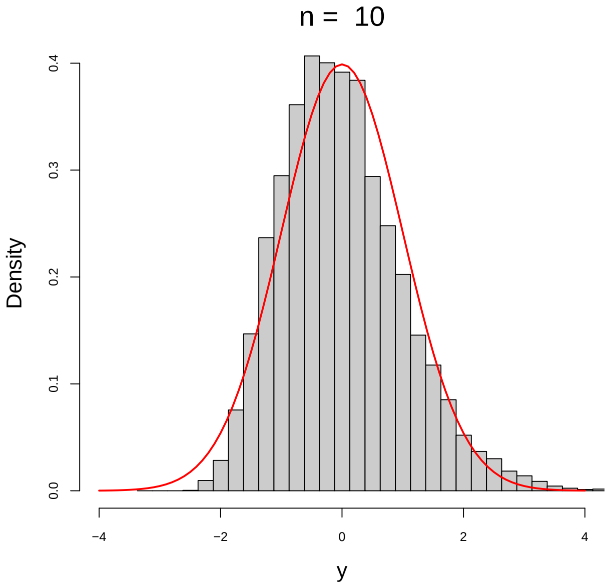
Simulation zum ZGVS (Forts.)



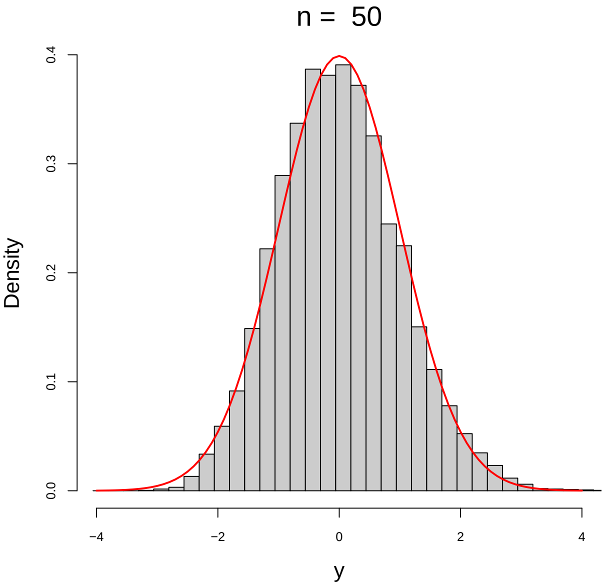
Simulation zum ZGVS (Forts.)



Simulation zum ZGVS (Forts.)



Simulation zum ZGVS (Forts.)



Normalapproximation der $B(n, p)$ – Verteilung

Die Summe $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ von n unabhängigen $A(p)$ – Größen X_i hat eine $B(n, p)$ – Verteilung.

Unter Verwendung der Stetigkeitskorrektur gilt für $a \leq b$, wobei $a, b \in \{0, 1, \ldots, n\}$:

$$P(a \leq S_n \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b + 1/2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - 1/2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Approximation der Verteilungsfunktion von S_n:

$$P(S_n \leq x) \approx \Phi\left(\frac{x + 1/2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Faustregel: Die Approximation ist zulässig, wenn $np(1-p) \geq 10$.

Normalapproximation der $\mathrm{P}(\lambda)$ – Verteilung

Hat X eine $\mathrm{P}(\lambda)$ – Verteilung, so gilt unter Verwendung der Stetigkeitskorrektur für $a \leq b$, wobei $a, b \in \mathbb{N}_0$:

$$P(a \leq X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b + 1/2 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) - \Phi\left(\frac{a - 1/2 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

Approximation der Verteilungsfunktion von X:

$$P(X \leq x) \approx \Phi\left(\frac{x + 1/2 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

Faustregel: Die Approximation ist zulässig, wenn $\lambda > 9$.