⟨StatWth17⟩

4. Spezielle Verteilungen

Werner Gurker

Institut für Stochastik und Wirtschaftsmathematik

Technische Universität Wien

Diskrete Verteilungen

Im Folgenden betrachten wir einige für Anwendungen wichtige diskrete Verteilungen etwas detaillierter:

- Diskrete uniforme Verteilung
- Bernoulli–Verteilung
- Binomialverteilung
- Negative Binomialverteilung
- Geometrische Verteilung
- Hypergeometrische Verteilung
- Poisson–Verteilung

Diskrete uniforme Verteilung

Eine sG X hat eine diskrete uniforme Verteilung (auch diskrete Gleichverteilung) auf der Menge M:

$$M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad \text{mit} \quad x_i \neq x_j \quad \text{für} \quad i \neq j$$

wenn jedes Element von M die gleiche Wahrscheinlichkeit hat:

$$p(x_i) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Erwartungswert/Varianz:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

Spezialfälle

(1) $M = \{a, a+1, \ldots, b\}$ $(a \leq b,\ a, b \in \mathbb{Z})$:

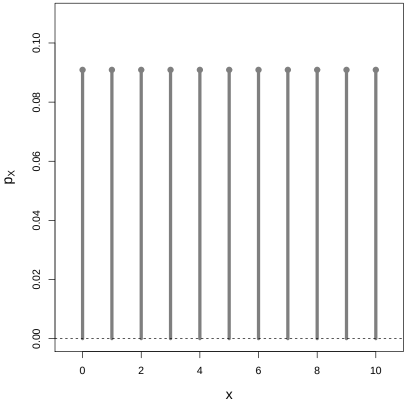
$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$$

(2) $M = \{1, 2, \ldots, k\}$ $(k \in \mathbb{N})$:

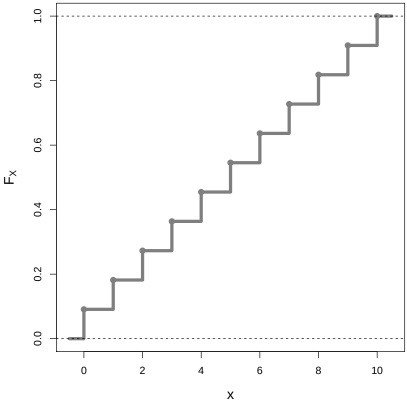
$$\mathbb{E}(X) = \frac{1+k}{2}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{k^2 - 1}{12}$$

Beispiel: $M = \{0, 1, \ldots, 10\}$

W–Funktion



Verteilungsfunktion



Bernoulli–Verteilung

Beobachtet man nur, ob ein bestimmtes Ereignis A eintritt oder nicht, spricht man von einem Bernoulli–Experiment. Die zugehörige sG X ist nur ein Indikator für den Eintritt von A:

$$X = \begin{cases} 1 & A \text{ tritt ein („Erfolg")} \\ 0 & A \text{ tritt nicht ein („Misserfolg")} \end{cases}$$

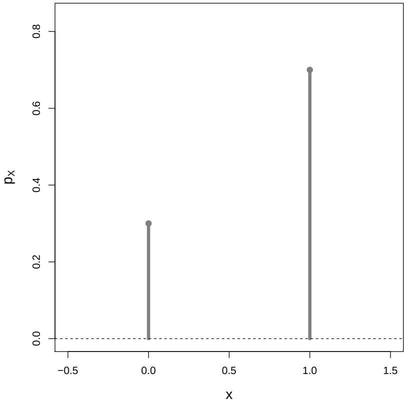
Gilt $p = P(X = 1)$ und daher $q = 1 - p = P(X = 0)$, so hat X eine Bernoulli–Verteilung (oder Alternativverteilung) $\mathrm{A}(p)$.

W–Funktion: $p(x) = p^x (1 - p)^{1-x}$ für $x \in \{0, 1\}$

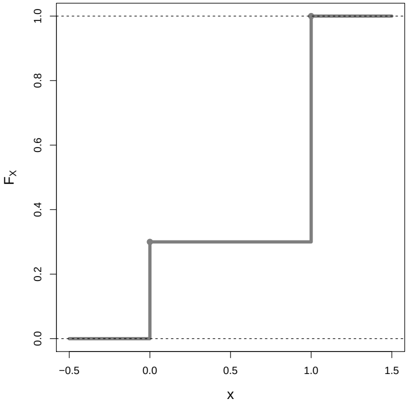
Erwartungswert/Varianz: $\mathbb{E}(X) = p, \quad \mathrm{Var}(X) = p(1 - p)$

Beispiel: $A(0.7)$

W–Funktion



Verteilungsfunktion



Binomialverteilung

Das Ergebnis von n unabhängigen und identischen Bernoulli–Experimente lässt sich als n–Tupel aus Nullen und Einsen darstellen, z. B.:

$$\underbrace{(0,0,1,0,1,\ldots,1)}_{n \text{ Elemente}}$$

Häufig ist man aber nur an der Anzahl der Erfolge interessiert.

Bezeichnet die sG X die Zahl der Erfolge bei n Bernoulli–Experimenten, so kann X die Werte $0, 1, \ldots, n$ annehmen.

Gibt es x Erfolge (und daher $n - x$ Misserfolge), so hat man:

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

verschiedene Möglichkeiten, die Positionen für die x Erfolge zu wählen.

Binomialverteilung (Forts.)

Die Wahrscheinlichkeit für jede dieser Möglichkeiten beträgt:

$$p^x(1-p)^{n-x}$$

Die W–Funktion von X ist daher gegeben durch:

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad \text{für} \quad x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

Die sG X hat eine Binomialverteilung: $X \sim \mathrm{B}(n, p)$

Binomischer Lehrsatz: $\displaystyle\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = (p+1-p)^n = 1^n = 1$

Binomialverteilung (Forts.)

Spezialfall $n = 1$: $\quad B(1, p) \equiv A(p) \quad$ (Bernoulli–Verteilung)

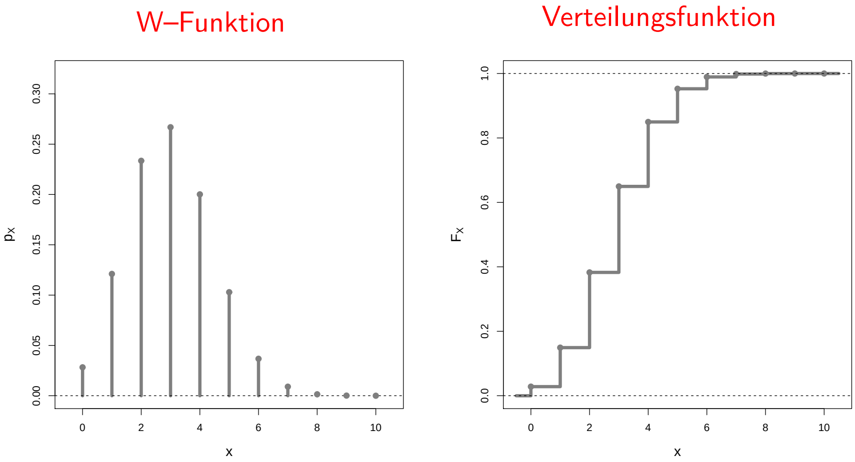
Erwartungswert/Varianz:

$$\mathbb{E}(X) = np, \quad \mathrm{Var}(X) = np(1 - p)$$

Modalwert(e) (d. h., x–Werte mit $p(x) = \max$):

$$x_{\text{mod}} = \begin{cases} \lfloor (n+1)p \rfloor & \text{falls} \quad (n+1)p \notin \mathbb{N} \\ (n+1)p - 1, \ (n+1)p & \text{falls} \quad (n+1)p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Beispiel: $B(10, 0.3)$



Negative Binomialverteilung

Ein Bernoulli–Experiment mit konstanter Erfolgswahrscheinlichkeit p wird solange (unabhängig) wiederholt, bis genau r Erfolge aufgetreten sind.

Ist die sG X die Gesamtzahl der dafür nötigen Versuche, dann hat X eine Negative Binomialverteilung $\mathrm{NB}(r, p)$ mit W–Funktion:

$$p(x) = P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r} \quad \text{für} \quad x \in \{r, r+1, \dots\}$$

Erwartungswert/Varianz:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{r}{p}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Vergleich $\mathrm{B}(n,p)$– / $\mathrm{NB}(r,p)$–Verteilung

Binomialverteilung: Die Anzahl n der – unabhängigen und identischen – Bernoulli–Versuch steht von vornherein fest.

Gezählt wird die Zahl der Erfolge unter den n Versuchen.

Negative Binomialverteilung: Die Anzahl der – unabhängigen und identischen – Bernoulli–Versuche ist von vornherein nicht beschränkt.

Gezählt wird die Zahl der Versuche bis zum r–ten Erfolg.

Die $\mathrm{NB}(r,p)$–Verteilung ist also quasi eine auf den Kopf gestellte („negative“) $\mathrm{B}(n,p)$–Verteilung.

Geometrische Verteilung

Die Negative Binomialverteilung $\mathrm{NB}(r, p)$ für $r = 1$ nennt man auch die Geometrische Verteilung.

Man schreibt: $\mathrm{G}(p) \quad (\equiv \mathrm{NB}(1, p))$

Ist X die Gesamtzahl der Versuche, die notwendig sind, um exakt einen Erfolg zu bekommen, so gilt:

$$p(x) = P(X = x) = p(1-p)^{x-1} \quad \text{für} \quad x \in \{1, 2, \ldots\}$$

Erwartungswert/Varianz:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Beweis (für $\mathbb{E}(X)$): Skriptum S. 154

Memoryless Property

Die Geometrische Verteilung hat „kein Gedächtnis“:

$$P(X > a + b \,|\, X > a) = P(X > b) \quad \text{für} \quad a, b \in \{1, 2, \dots\}$$

Beweis: Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit:

$$P(X > a + b \,|\, X > a) = \frac{P\big(\{X > a + b\} \cap \{X > a\}\big)}{P(X > a)} = \frac{P(X > a + b)}{P(X > a)}$$

Nun gilt: $P(X > x) = (1 - p)^x \quad \text{für} \quad x \in \{1, 2, \dots\}$

$$\Longrightarrow \quad P(X > a + b \,|\, X > a) = \frac{(1 - p)^{a+b}}{(1 - p)^a} = (1 - p)^b = P(X > b)$$

Memoryless Property (Forts.)

Diese Eigenschaft charakterisiert die G(p)–Verteilung.

D. h., sie ist die einzige diskrete Verteilung auf $\mathbb{N}$ mit dieser Eigenschaft.

Interpretation: Angenommen, man nimmt wiederholt an einem Glücksspiel teil, bei dem man mit Wahrscheinlichkeit p $(0 < p < 1)$ gewinnt.

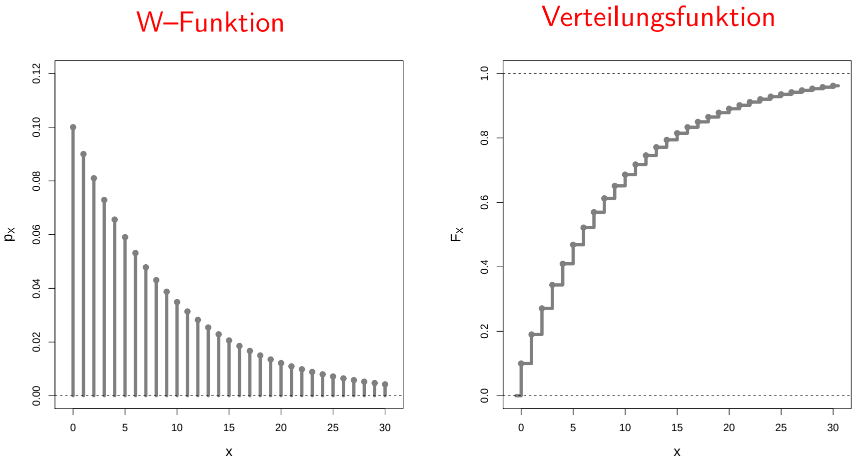
Ist X die Anzahl der Runden bis zum ersten Gewinn, so gilt $X \sim \mathrm{G}(p)$.

Hat man a Runden erfolglos gespielt, so besagt die „Gedächtnislosigkeit“ der G(p)–Verteilung, dass die Wahrscheinlichkeit, bei der $(a + 1)$–ten Runde zu gewinnen, gleich groß ist wie zu Beginn, d. h. gleich p.

Anders ausgedrückt, es gibt keine „Prämie“ für erfolglose Spiele (etwa in Form einer höheren Gewinnwahrscheinlichkeit).

Das Spiel startet nach jeder (erfolglosen) Runde von vorne.

Beispiel: G(0.1)



Ziehen mit / ohne Zurücklegen

Viele praktische Situationen lassen sich wie folgt modellieren:

In einem Behälter befinden sich (gut gemischt) N gleichartige Objekte.

$A \leq N$ der Objekten haben eine bestimmte Eigenschaft („Erfolge").

Somit haben $N - A$ der Objekte diese Eigenschaft nicht („Misserfolge").

$n \leq N$ Objekte werden zufällig hintereinander entnommen.

Das lässt sich auf zwei Arten bewerkstelligen:

mit oder ohne Zurücklegen

Ziehen mit / ohne Zurücklegen (Forts.)

(1) Mit Zurücklegen: Ein Objekt wird willkürlich entnommen und – nach der Feststellung ob es die Eigenschaft hat oder nicht – wieder in den Behälter zurückgelegt. Anschließend wird der Behälter gut durchgemischt. Dieser Vorgang wird n Mal wiederholt.

Dann gilt: Die Zahl X der dabei erhaltenen Erfolge folgt einer Binomialverteilung:

$$X \sim \mathrm{B}\left(n, p = \frac{A}{N}\right)$$

Ziehen mit / ohne Zurücklegen (Forts.)

(2) Ohne Zurücklegen: Ein Objekt wird willkürlich entnommen und – nach der Feststellung ob es die Eigenschaft hat oder nicht – nicht wieder in den Behälter zurückgelegt. Ein gezogenes Objekt kann somit kein weiteres Mal entnommen werden. Dieser Vorgang wird n Mal wiederholt.

Dann gilt: Die Zahl X der dabei erhaltenen Erfolge folgt einer Hypergeometrischen Verteilung:

$$X \sim \mathrm{H}(N, A, n)$$

Hypergeometrische Verteilung

Mittels einer einfachen kombinatorischen Überlegung sieht man, dass die W–Funktion der Hypergeometrischen Verteilung gegeben ist durch:

$$p(x) = \frac{\binom{A}{x}\binom{N-A}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x \in \{\max\{0, n+A-N\}, \ldots, \min\{A, n\}\}$$

Erwartungswert/Varianz:

$$\mathbb{E}(X) = n\,\frac{A}{N}, \qquad \mathrm{Var}(X) = n\,\frac{A}{N}\left(1 - \frac{A}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$$

$(N-n)/(N-1)$ ist der Korrekturfaktor für endliche Grundgesamtheiten.

Binomialapproximation

Ist N sehr viel größer als n, macht es keinen großen Unterschied, ob die Stichprobe durch Ziehungen ohne oder mit Zurücklegen zustande kommt.

In letzterem Fall lässt sich die Hypergeometrische Verteilung durch die (einfachere) Binomialverteilung approximieren:

$$\mathrm{H}(N, A, n) \approx \mathrm{B}\left(n, p = \frac{A}{N}\right)$$

Faustregel: Sind A und $N - n$ beide nicht zu klein und ist $n/N \leq 0.05$, dann gilt in guter Näherung:

$$P(X = x) = \frac{\binom{A}{x}\binom{N-A}{n-x}}{\binom{N}{n}} \approx \binom{n}{x}\left(\frac{A}{N}\right)^{x}\left(1 - \frac{A}{N}\right)^{n-x}$$

Poisson–Verteilung

Die Exponentialreihe konvergiert für alle $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \cdots = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{\lambda}$$

Für $\lambda > 0$ lässt sich also mit Hilfe der Terme dieser Reihe die W–Funktion einer sG X definieren:

$$p(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x \, e^{-\lambda}}{x!} \quad \text{für} \quad x \in \{0, 1, 2, \ldots\}$$

Eine Verteilung mit dieser W–Funktion nennt man eine Poisson–Verteilung und schreibt $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$.

Poisson–Verteilung (Forts.)

Erwartungswert/Varianz:

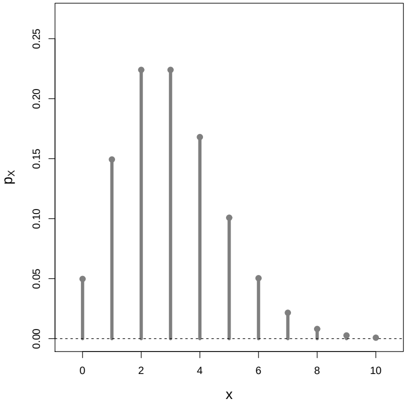
$$\mathbb{E}(X) = \lambda, \quad \mathrm{Var}(X) = \lambda$$

Modalwert(e) (d. h., x–Werte mit $p(x) = \max$):

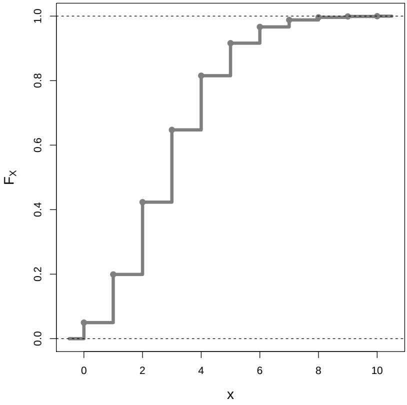
$$x_{\text{mod}} = \begin{cases} \lfloor \lambda \rfloor & \text{falls} \quad \lambda \notin \mathbb{N} \\ \lambda - 1,\ \lambda & \text{falls} \quad \lambda \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Beispiel: P(3)

W–Funktion



Verteilungsfunktion



Anwendungsbeispiele

Wie sich in der Praxis zeigt, lässt sich die Poisson–Verteilung in guter Näherung in vielen unterschiedlichen Situationen anwenden:

- Anzahl der von einer radioaktiven Substanz während einer bestimmten Zeitspanne emittierten α–Teilchen
- Anzahl der Lackierungsfehler auf einem Autoblech
- Anzahl der Verkehrsunfälle während einer bestimmten Zeitspanne
- Anzahl der Kunden, die im Laufe eines Tages ein Geschäft betreten
- Anzahl der Blitze innerhalb einer Minute bei einem Gewitter
- etc.

Poisson–Prozess

$p(x, h)$ = Wahrscheinlichkeit von x „Vorkommnissen" in einem – zeitlichen oder räumlichen – Intervall der Länge h

(1) Proportionalität im Kleinen: $p(1, h) = \lambda h + o(h)$ für $\lambda > 0,\ h > 0$

Bem: $o(h)$ („klein o von h") ist eine Funktion mit $\lim_{h \to 0} [o(h)/h] = 0.$

(2) Nachwirkungsfreiheit: $\sum_{x=2}^{\infty} p(x, h) = o(h)$

D. h., für kleine Intervalle kann die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von zwei oder mehr Vorkommnissen vernachlässigt werden.

(3) Unabhängigkeit: Die Anzahlen von Vorkommnissen in einander nicht überlappenden Intervallen sind unabhängig.

Unter diesen Bedingungen gilt für die Anzahl X von Vorkommnissen in einem Intervall der Länge h: $X \sim \mathrm{P}(\lambda h)$

P(λ)–Verteilung als Grenzfall der B(n, p)–Verteilung

Für $X_n \sim \mathrm{B}(n, \lambda/n)$ gilt:

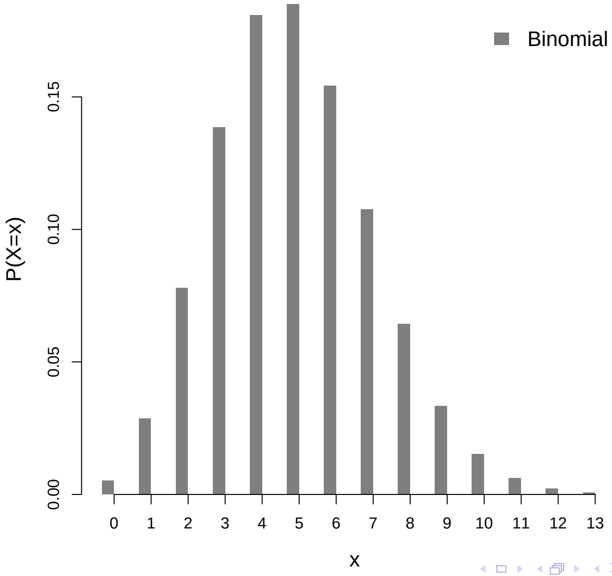
$$\lim_{n \to \infty} P(X_n = x) = \frac{\lambda^x \, e^{-\lambda}}{x!}$$

Interpretation: Gibt es viele – unabhängige und identische – Bernoulli–Experimente mit kleiner Erfolgswahrscheinlichkeit, so folgt die Zahl der Erfolge in guter Näherung einer Poisson–Verteilung.

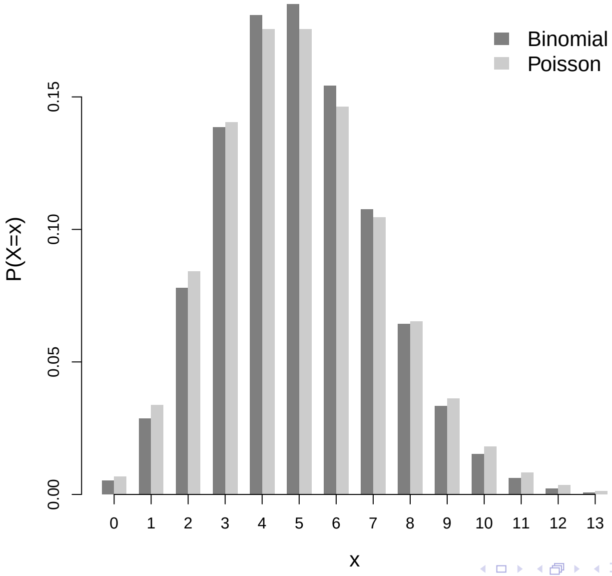
Faustregel: Für $n \geq 50$, $p \leq 1/10$ und $np \leq 10$ gilt in guter Näherung für $X \sim \mathrm{B}(n, p)$:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \approx \frac{(np)^x \, e^{-np}}{x!}$$

Beispiel: $B(50, 1/10)$



Beispiel: $B(50, 1/10) \approx P(5)$



Verteilungsfamilien

Wie im diskreten Fall hängen auch im stetigen Fall Verteilungen meist von – einem oder mehreren – Parametern ab.

Man spricht daher genauer von Verteilungsfamilien.

Bsp: Familie der Poisson–Verteilungen:

$$\mathcal{F}_P = \{\mathrm{P}(\lambda) \,|\, \lambda > 0\}$$

λ ist der Parameter der Verteilungsfamilie.

Familie der Normalverteilungen (s. später):

$$\mathcal{F}_N = \{\mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \,|\, \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0\}$$

μ und σ^2 (bzw. σ) sind die Parameter der Verteilungsfamilie.

Stetige uniforme Verteilung

Eine sG X hat eine (stetige) uniforme Verteilung (oder eine (stetige) Gleichverteilung) auf dem Intervall (a, b) ($a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$), wenn die Dichte von X wie folgt lautet:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{für} \quad x \in (a, b) \\ 0 & \text{für} \quad x \notin (a, b) \end{cases}$$

Man schreibt $X \sim \mathrm{U}(a, b)$ oder $X \sim \mathrm{U}[a, b]$ (falls die Randpunkte zum Träger gehören).

Bem: Man beachte, dass es für (Wahrscheinlichkeits–) Berechnungen keine Rolle spielt, ob man das offene Intervall (a, b), das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ oder ein halboffenes Intervall $(a, b]$, $[a, b)$ zugrunde legt.

Für eine stetige sG X gilt stets: $P(X = x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Stetige uniforme Verteilung (Forts.)

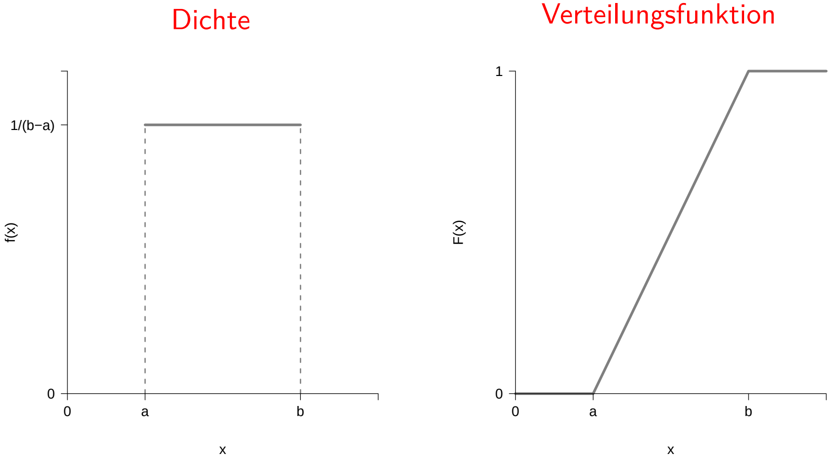
Die Verteilungsfunktion von $X \sim \mathrm{U}(a, b)$ ist gegeben durch:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{für} \quad a < x < b \\ 1 & \text{für} \quad x \geq b \end{cases}$$

Erwartungswert/Varianz:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Beispiel: $U(a, b)$



Exponentialverteilung

Die Geometrische Verteilung G(p) [14] lässt sich als (diskrete) Wartezeit–verteilung (= Zahl der Versuche bis zum ersten Erfolg) interpretieren.

Die stetige Version der G(p)–Verteilung ist die Exponentialverteilung.

Eine sG X hat eine Exponentialverteilung mit dem Skalierungsparameter $\tau > 0$, wenn ihre Dichte gegeben ist durch:

$$f(x) = \frac{1}{\tau}\, e^{-x/\tau} \quad \text{für} \quad x \geq 0$$

Setzt man $\lambda = 1/\tau$, lautet die Dichte:

$$f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x} \quad \text{für} \quad x \geq 0$$

Man schreibt $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ oder $X \sim \mathrm{Exp}(\tau)$.

Exponentialverteilung (Forts.)

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} = 1 - e^{-x/\tau} \quad \text{für} \quad x \geq 0$$

Beweis:

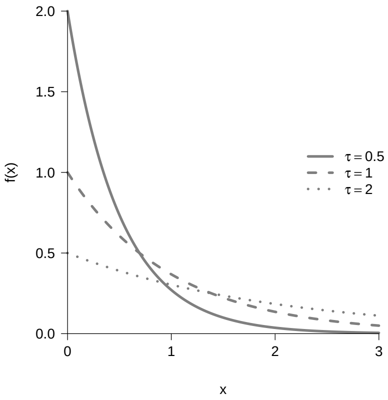
$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \lambda\, e^{-\lambda u}\, du = -e^{-\lambda u}\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

Erwartungswert/Varianz/Streuung:

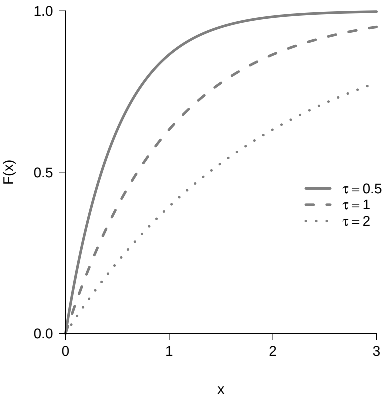
$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = \tau, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \tau^2, \qquad \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \frac{1}{\lambda} = \tau$$

Beispiel: $\mathrm{Exp}(\tau)$, $\tau = 0.5, 1, 2$

Dichte



Verteilungsfunktion



Memoryless Property

Für $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ gilt:

$$P(X > s + t \,|\, X > s) = P(X > t) \quad \text{für} \quad s, t > 0$$

Beweis:

$$P(X > s + t \,|\, X > s) = \frac{P(X > s + t,\, X > s)}{P(X > s)} = \frac{P(X > s + t)}{P(X > s)}$$

$$P(X > x) = 1 - F(x) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda x}\right) = e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{P(X > s + t)}{P(X > s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X > t)$$

Memoryless Property (Forts.)

Die Memoryless Property lässt sich als „Nicht–Alterung“ interpretieren.

Ist z. B. X die exponentialverteilte Lebensdauer einer Komponente, und ist die Komponente zum Zeitpunkt s noch intakt, so hat die restliche Lebensdauer der Komponente, d. h. $X - s$, die gleiche Exponentialver–teilung wie eine komplett neue Komponente.

M. a. W., die Komponente „erinnert“ sich nicht an ihr Alter und ist zu jedem Zeitpunkt, zu dem sie noch intakt ist, so gut wie neu.

Diese Eigenschaft charakterisiert die Exponentialverteilung:

Die Exp(λ)–Verteilung ist die einzige stetige Verteilung auf $\mathbb{R}^+$ ohne Gedächtnis.

Beweis: Skriptum S. 167

Gammafunktion

Die Gammafunktion Γ ist definiert durch:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u}\, du \quad \text{für} \quad \alpha > 0$$

Sie hat die folgenden Eigenschaften:

(1) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha) \quad$ für $\alpha \in (0, \infty)$

(2) $\Gamma(n) = (n-1)! \quad$ für $n = 1, 2, \ldots$

(3) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

An den Eigenschaften (1) und (2) erkennt man, dass die Gammafunktion eine Verallgemeinerung der Fakultät auf positive reelle Zahlen ist.

Aus diesem Grund schreibt man auch $\Gamma(x) = (x-1)!$ für $x \in \mathbb{R}^+$.

Gammaverteilung

Die Gammaverteilung ist eine Verallgemeinerung der Exponentialverteilung.

Eine sG X hat eine Gammaverteilung mit dem Formparameter $\alpha > 0$ und dem Skalierungsparameter $\beta > 0$, wenn ihre Dichte gegeben ist durch:

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}\, e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} \quad \text{für} \quad x > 0$$

Setzt man $\lambda = 1/\beta$, lautet die Dichte:

$$f(x) = \frac{\lambda^{\alpha} x^{\alpha-1}\, e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} \quad \text{für} \quad x > 0$$

Man schreibt $X \sim \text{Gam}(\alpha, \lambda)$ oder $X \sim \text{Gam}(\alpha, \beta)$.

Gammaverteilung (Forts.)

Für die Verteilungsfunktion gibt es allgemein keinen expliziten Ausdruck:

$$F(x) = \int_0^x \frac{t^{\alpha-1} e^{-t/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \, dt \quad \text{für} \quad x \geq 0$$

Erwartungswert/Varianz:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\lambda} = \alpha\beta, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2} = \alpha\beta^2$$

Gammaverteilung: Spezialfälle

(1) Für $\alpha = 1$ ergibt sich die Exponentialverteilung:

$$\mathrm{Gam}(1, \beta) \equiv \mathrm{Exp}(\beta), \quad \mathrm{Gam}(1, \lambda) \equiv \mathrm{Exp}(\lambda)$$

(2) Ist der Formparameter α eine natürliche Zahl nennt man die Gammaverteilung auch Erlang–Verteilung:

$$\mathrm{Gam}(n, \beta) \equiv \mathrm{Er}(n, \beta), \quad \mathrm{Gam}(n, \lambda) \equiv \mathrm{Er}(n, \lambda), \quad n \in \mathbb{N}$$

(3) Für $\alpha = n/2$ (mit $n \in \mathbb{N}$) und $\beta = 2$ (oder $\lambda = 1/2$) ergibt sich die Chiquadratverteilung $\chi^2(n)$ mit n Freiheitsgraden.

Chiquadratverteilung

Die Chiquadratverteilung $X \sim \chi^2(n)$ spielt eine wichtige Rolle in der Statistik (vgl. dazu insbesondere Kapitel 7).

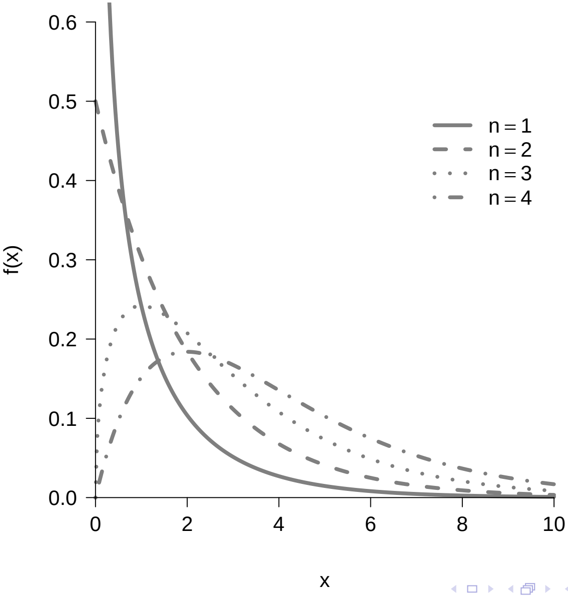
Dichte: $$f(x) = \frac{x^{n/2-1}\, e^{-x/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{n/2}} \quad \text{für} \quad x > 0$$

Erwartungswert/Varianz: $$\mathbb{E}(X) = n, \quad \mathrm{Var}(X) = 2n$$

Quantile: $$P(X \leq \chi^2_{n;\,p}) = p \quad \text{für } p \in (0,1)$$

(Tabelle im Anhang des Skriptums.)

Beispiel: $\chi^2(n)$, $n = 1, 2, 3, 4$



Normalverteilung

Die in diesem Abschnitt behandelte Verteilung gehört zu den wichtigsten Verteilungen in Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie.

Eine sG X hat eine Normalverteilung (oder Gauß–Verteilung) mit dem Lageparameter $\mu \in \mathbb{R}$ und dem Skalierungsparameter $\sigma > 0$, wenn ihre Dichte (die sog. „Glockenkurve") gegeben ist durch:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad \text{für} \quad -\infty < x < \infty$$

Man schreibt $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

Achtung: In manchen Lehrbüchern wird die Schreibweise $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$ verwendet. Hier schreiben wir aber stets $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

Normalverteilung (Forts.)

Für die Verteilungsfunktion der $N(\mu, \sigma^2)$–Verteilung gibt es keinen expliziten Ausdruck. Sie kann aber mittels Standardisierung auf die VF der $N(0, 1)$–Verteilung zurückgeführt werden.

Letztere wird mit Φ bezeichnet und ist tabelliert (vgl. Tabellen im Anhang des Skriptums).

Aus der Symmetrie der $N(0, 1)$–Verteilung um Null folgt:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \quad \text{für} \quad -\infty < x < \infty$$

Standardisierung: $X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \Longrightarrow \quad Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

Beweis: Skriptum S. 170

Normalverteilung (Forts.)

Affine Transformation:

$$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \quad \Longrightarrow \quad Y = a + bX \sim \mathrm{N}(a + b\mu, b^2\sigma^2)$$

Erwartungswert/Varianz/Streuung:

$$\mathbb{E}(X) = \mu, \qquad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2, \qquad \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sigma$$

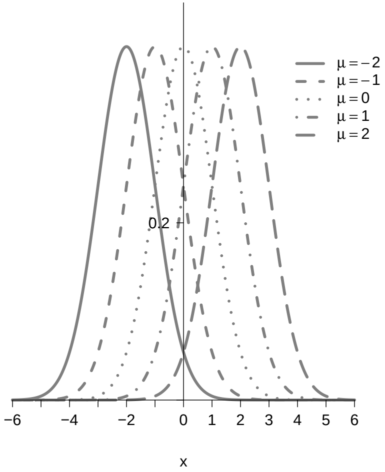
Quantile:

$$x_p = \mu + \sigma z_p \quad \text{mit} \quad z_p = \Phi^{-1}(p) \ \ldots \ p\text{–Quantil der } \mathrm{N}(0,1)$$

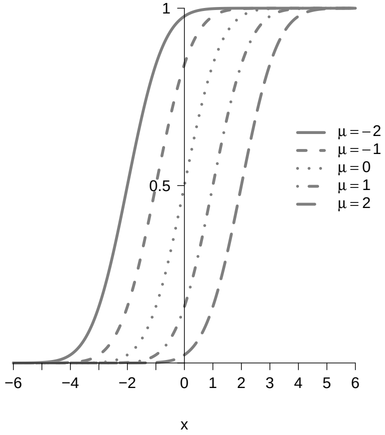
$$\text{Symmetrie der } \mathrm{N}(0,1)\text{–Vert. um Null} \quad \Longrightarrow \quad z_p = -z_{1-p}$$

Beispiel: $N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 1$, $\mu = -2, -1, 0, 1, 2$

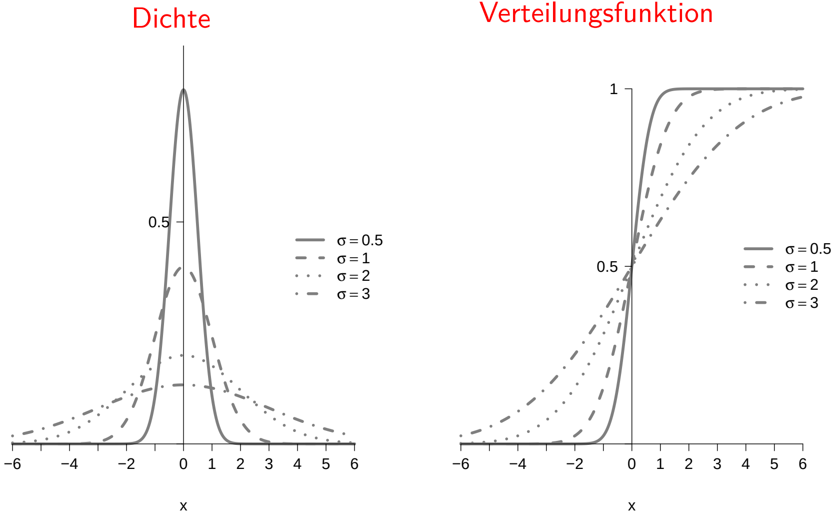
Dichte



Verteilungsfunktion



Beispiel: $N(\mu, \sigma^2)$, $\mu = 0$, $\sigma = 0.5, 1, 2, 3$



Beziehung zur χ^2–Verteilung

$$Z \sim \mathrm{N}(0,1) \quad \Longrightarrow \quad Z^2 \sim \chi^2(1)$$

$$X \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2) \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$$

Beweis: Skriptum S. 173

Standardisierung (allgemein)

X sei eine beliebige (d. h. diskrete, stetige oder gemischte) sG X mit Erwartungswert $\mathbb{E}(X) = \mu$ und Varianz $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 > 0$.

Die standardisierte sG Z ist definiert durch:

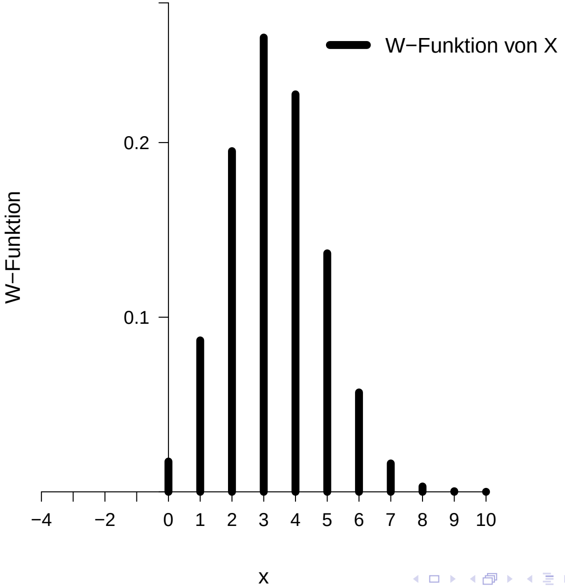
$$Z = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}} = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad \Longleftrightarrow \quad X = \mu + \sigma Z$$

Erwartungswert und Varianz von Z:

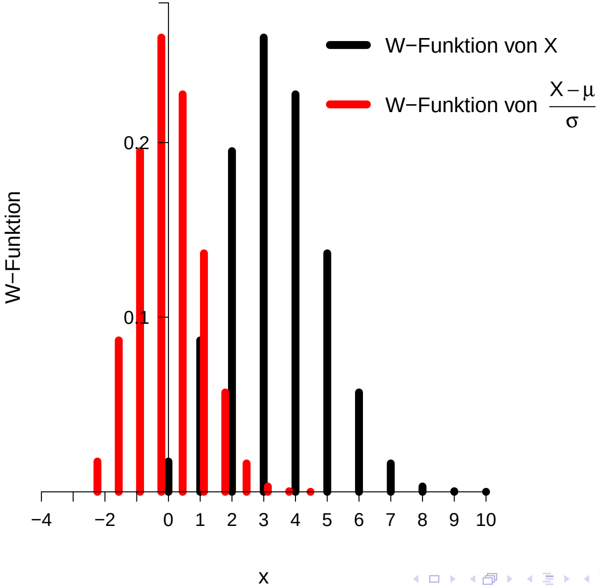
$$\mathbb{E}(Z) = 0, \qquad \mathrm{Var}(Z) = 1$$

Bem: I. A. gehört die Verteilung von Z nicht zur selben Verteilungs–familie wie X. Ausnahmen: Uniforme Verteilung, Normalverteilung, u. a.

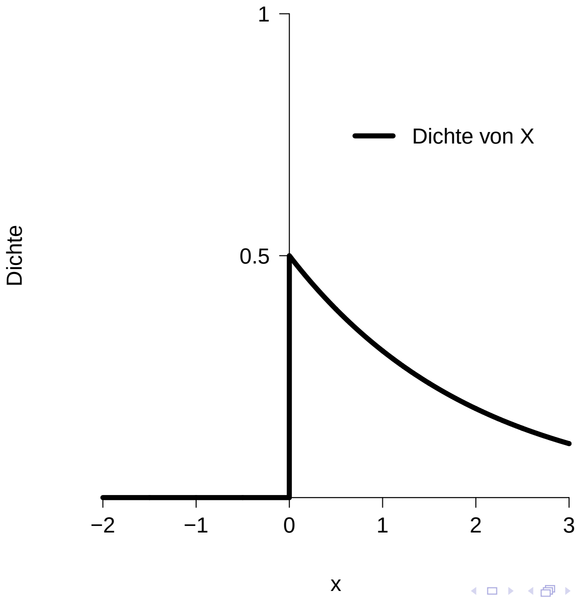
Beispiel 1: $X \sim B(10, 1/3)$, $\mu = 10/3$, $\sigma = \sqrt{20/9}$



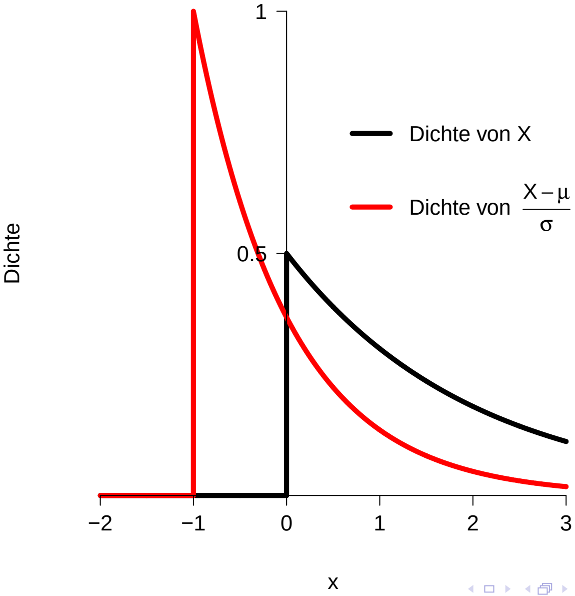
Beispiel 1: $X \sim B(10, 1/3)$, $\mu = 10/3$, $\sigma = \sqrt{20/9}$



Beispiel 2: $X \sim \mathrm{Exp}(\tau = 2)$, $\mu = 2$, $\sigma = 2$



Beispiel 2: $X \sim \text{Exp}(\tau = 2)$, $\mu = 2$, $\sigma = 2$



F–Verteilung

Eine sG X hat eine F–Verteilung mit m und n Freiheitsgraden (beide sind Formparameter), wenn ihre Dichte gegeben ist durch:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} x^{(m-2)/2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left[1+\left(\frac{m}{n}\right)x\right]^{(m+n)/2}} \quad \text{für} \quad x \geq 0$$

Γ ist die in [40] definierte Gammafunktion:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u}\, du \quad \text{für} \quad \alpha > 0$$

Man schreibt $X \sim \mathrm{F}(m,n)$.

F–Verteilung (Forts.)

Erwartungswert/Varianz:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n}{n-2} \quad (n > 2), \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m\,(n-2)^2(n-4)} \quad (n > 4)$$

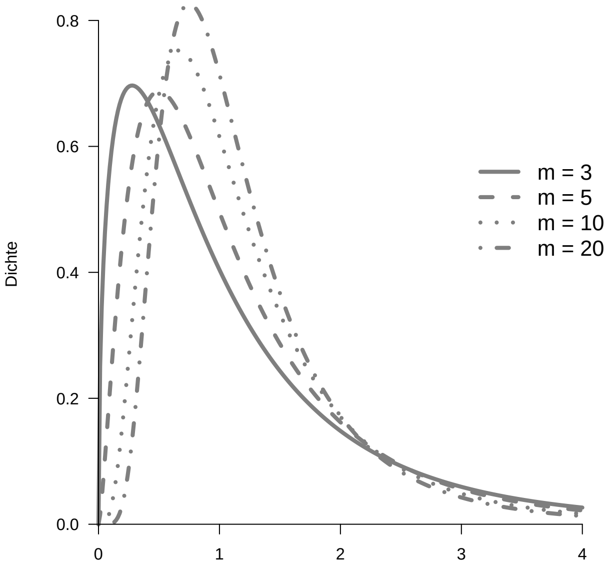
Symmetrieeigenschaft:

$$X \sim \mathrm{F}(m,n) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{X} \sim \mathrm{F}(n,m)$$

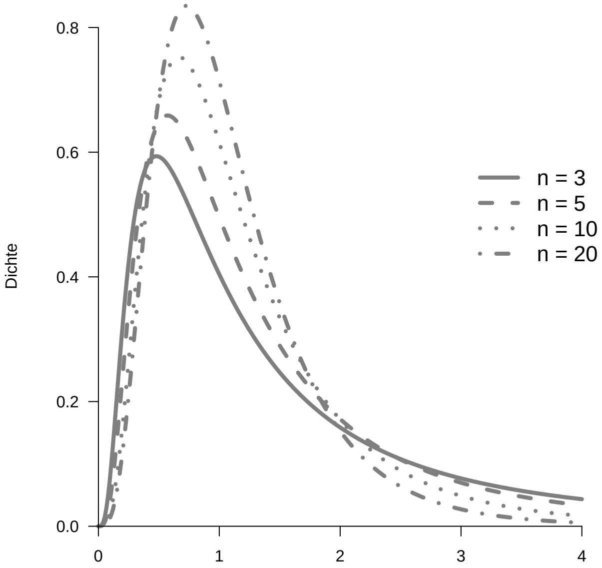
Quantile: Aus der Symmetrieeigenschaft folgt:

$$F_{m,n;\,p} = \frac{1}{F_{n,m;\,1-p}} \quad \text{für alle } p \in (0,1)$$

Beispiel 1: F(m, n), $n = 10$



Beispiel 2: F(m, n), $m = 10$



t–Verteilung

Eine sG X hat eine t–Verteilung (oder Student–Verteilung) mit n Freiheitsgraden (Formparameter), wenn ihre Dichte gegeben ist durch:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} \quad \text{für} \quad -\infty < x < \infty$$

Dabei ist Γ die in [40] definierte Gammafunktion.

Man schreibt $X \sim \mathrm{t}(n)$.

Spezialfall: Die t–Verteilung mit $n = 1$ heißt auch Cauchy–Verteilung:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad \text{für} \quad -\infty < x < \infty$$

t–Verteilung (Forts.)

Symmetrieeigenschaft: Die t–Dichten sind symmetrisch um Null:

$$f(x) = f(-x) \quad \text{für} \quad -\infty < x < \infty$$

Konvergenzeigenschaft: Für $n \longrightarrow \infty$ konvergieren die t–Dichten gegen die Dichte der Standardnormalverteilung:

$$\lim_{n \to \infty} f(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad \text{für} \quad -\infty < x < \infty$$

Schwere Ausläufer: Die t–Dichten haben schwerere Ausläufer als die Normaldichte. (Vgl. die folgende Abb.)

t–Verteilung (Forts.)

Erwartungswert/Varianz:

$$\mathbb{E}(X) = 0 \quad (n > 1), \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{n}{n-2} \quad (n > 2)$$

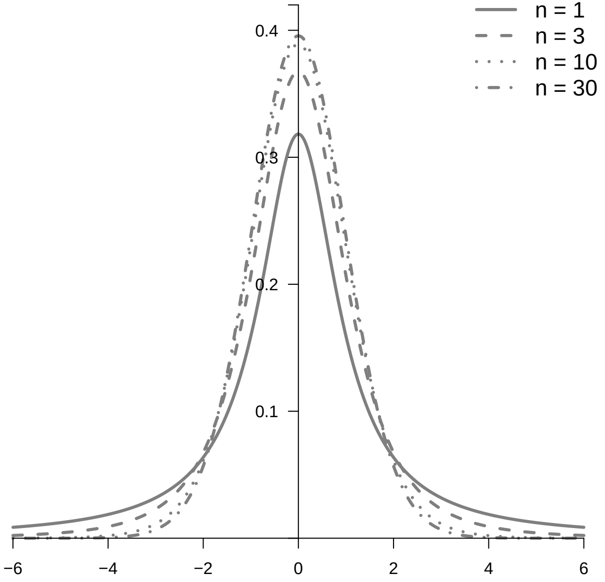
Quantile: Aus der Symmetrieeigenschaft folgt:

$$t_{n;\,p} = -t_{n;\,1-p} \quad \text{für alle } p \in (0,1)$$

Beziehung zur F–Verteilung:

$$X \sim \mathrm{t}(n) \quad \Longrightarrow \quad X^2 \sim \mathrm{F}(1,n)$$

Beispiel: t(n), $n = 1, 2, 10, 30$



Beispiel: t(n), $n = 1, 2, 10, 30, \infty$