6.0 VU Theoretische Informatik 2023W 26.1.2024			
Matrikelnummer	Nachname	Vorname	Gruppe
	Lösung		**A**

Aufgabe 1

(a) [**10 Punkte**] Wir definieren das folgende Entscheidungsproblem:

> 2-HALTEPROBLEM
> Instanz: Zwei SIMPLE Programme Π_1, Π_2 und ein Input String I.
> Frage: Terminieren beide Programme Π_1 und Π_2 auf dem Input I?

Zeigen Sie, dass dieses Problem semi-entscheidbar ist, indem Sie eine Semi-Entscheidungsprozedur für das 2-HALTEPROBLEM skizzieren. Geben Sie auch eine Begründung dafür, dass es sich tatsächlich um eine Semi-Entscheidungsprozedur für dieses Problem handelt, indem Sie kurz das Verhalten der Prozedur auf positiven bzw. negativen Instanzen diskutieren.

(b) [**2 Punkte**] Ist das 2-HALTEPROBLEM entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort kurz (maximal zwei Sätze). Punkte gibt es nur für eine hinreichend begründete Antwort.

Aufgabe 2

(a) **[10 Punkte]** Sei $L = \{a^k(ba)^n \mid k > n\}$. Vervollständigen Sie den folgenden Beweis, der mit Hilfe des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen zeigen soll, dass L nicht regulär ist.

Beweis indirekt. Angenommen, L ist regulär. Sei dann m die Konstante aus dem Pumping Lemma und das gewählte Wort

$w =$ $\boldsymbol{a^{m+1}(ab)^m}$ ______

Dann gilt $w \in L$ und $|w| =$ $\boldsymbol{3m+1}$ ______, also $|w| \geq m$.

Wir teilen nun w in xyz so auf, dass $|xy| \leq m$ und $|y| > 0$. Nachdem $|xy| \leq m$, kann xy nur aus

bis zu $\boldsymbol{m}$ Symbolen $\boldsymbol{a}$ ______ bestehen.

Nach dem Pumping Lemma muss aber $xy^iz \in L$ für alle $i \geq 0$ gelten.

Wenn wir nun $i =$ $\boldsymbol{0}$ ______ wählen, müsste – wäre L regulär – auch

$xy^iz =$ $\boldsymbol{a^{m+1-|y|}(ab)^m}$ ______ aus L sein.

Dies ist aber nicht der Fall, da

$\boldsymbol{y}$ aus mindestens einem Symbol $\boldsymbol{a}$ besteht, und damit die Anzahl der Symbole $\boldsymbol{a}$ nicht mehr die Anzahl der (ab)-Blöcke übersteigt. ______

______

Wir haben also einen Widerspruch gefunden, L kann somit keine reguläre Sprache sein.

(b) **[2 Punkte]** Ist jede Teilmenge einer regulären Menge selbst wiederum regulär? Begründen Sie Ihre Antwort kurz (maximal zwei Sätze). Punkte gibt es nur für eine hinreichend begründete Antwort.

Aufgabe 3

Sei E der **Pr**-Funktionsausdruck $\mathbf{Pr}(C_1^0, S \circ S \circ P_2^2)$.

(a) [**4 Punkte**] Werten Sie E für die Eingabewerte 0, 1, 2 und 3 aus.

(b) [**2 Punkte**] Welche Funktion wird durch E dargestellt?

(c) [**2 Punkte**] Welche Funktion wird durch μE dargestellt?

(d) [**2 Punkte**] Welche Funktion wird durch $\overline{\mu} E$ dargestellt?

(e) [**2 Punkte**] Ist es entscheidbar, ob eine gegebene Turingmaschine M die durch E dargestellte Funktion berechnet? Begründen Sie Ihre Antwort kurz. Punkte gibt es nur für eine hinreichend begründete Antwort.

Aufgabe 4 [12 Punkte]

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt *Spiegelgraph*, wenn folgendes gilt:

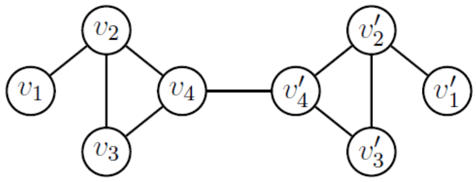
(1) $V = V_1 \cup V_2$ mit $|V_1| = |V_2|$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$,

(2) $E = E_1 \cup E_2 \cup \{[x, y]\}$ mit $E_i \subseteq V_i \times V_i$ $(i \in \{1, 2\})$, $x \in V_1$, $y \in V_2$.

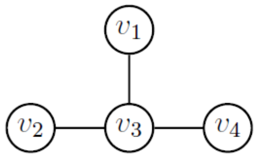
(3) es gibt eine Bijektion $m : V_1 \to V_2$, sodass $[v_i, v_j] \in E_1$ genau dann, wenn $[m(v_i), m(v_j))] \in E_2$. Für die Knoten x, y gilt $m(x) = y$.

In anderen Worten, ein Spiegelgraph besteht aus zwei gespiegelten „Kopien" ein und desselben Graphen, welche durch eine „Brückenkante" (x, y) verbunden sind.

Beispiele:



G_1



G_2

G_1 ein Spiegelgraph mit $m(v_i) = v_i'$ für $1 \leq i \leq 4$ und Brückenkante (v_4, v_4').
G_2 hingegen ist kein Spiegelgraph, da keine Kante als Brückenkante fungieren kann.

Wir betrachten das klassische Dreifärbbarkeitsproblem (3-Col) und die auf Spiegelgraphen eingeschränkte Variante davon (3-Col-S).

3-Col Instanz: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$. Frage: Gibt es eine Funktion $f \colon V \to \{0, 1, 2\}$, sodass $f(v_i) \neq f(v_j)$ für alle Kanten $[v_i, v_j] \in E$ gilt?

3-Col-S Instanz: Ein Spiegelgraph $G = (V, E)$. Frage: Gibt es eine Funktion $f \colon V \to \{0, 1, 2\}$, sodass $f(v_i) \neq f(v_j)$ für alle Kanten $[v_i, v_j] \in E$?

Betrachten Sie die folgende Reduktion R von 3-Col nach 3-Col-S, die jedem Graphen $G = (V, E)$ einen Spiegelgraph $R(G) = (V^*, E^*)$ mit

$$V^* = V \cup \{v' \mid v \in V\}$$
$$E^* = E \cup \{(v_i', v_j') \mid (v_i, v_j) \in E\} \cup \{(v_b, v_b')\},$$

zuordnet, wobei $v_b \in V$ ein beliebiger Knoten in G ist.

Zeigen Sie die Korrektheit der Reduktion, also:

G ist eine positive Instanz von 3-Col $\iff$ $R(G)$ ist eine positive Instanz von 3-Col-S.

Aufgabe 5 [12 Punkte]

Zeigen Sie mit Hilfe der Annotierungsregeln, dass die folgende Korrektheitsaussage wahr hinsichtlich totaler Korrektheit ist. Verwenden Sie $0 \leq j \leq n \wedge k = 2j + 1 \wedge q = j^2$ als Invariante und $n - j$ als Variante.

Eine nützliche Annotierungsregel:
$\texttt{while}\ e\ \texttt{do}\ \Pi \quad \mapsto \quad \{Inv\}\ \texttt{while}\ e\ \texttt{do}\ \{Inv \wedge e \wedge t{=}t_0\}\ \Pi\ \{Inv \wedge (e \supset 0{\leq}t{<}t_0)\}\ \{Inv \wedge \neg e\}$

$\{\boldsymbol{n \geq 0}\}$
{{{
$q := 0$;
$k := 1$};
$j := 0$};
while $j \neq n$ do {{
    $q := q + k$;
    $k := k + 2$};
    $j := j + 1$
}}
$\{\boldsymbol{q = n^2}\}$