4.0 VU Theoretische Informatik und Logik

Teil 1 SS 2016 19. Oktober 2016

Matrikelnummer	Familienname	Vorname	Gruppe
	Lösung		A

1.) Sei $L = \{ww \mid w \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^*\}$. Beweisen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen, dass L nicht regulär ist.

(6 Punkte)

Lösung: Beweis indirekt. Angenommen, L ist regulär. Sei dann m die Konstante aus dem Pumping Lemma und das gewählte Wort z.B.

$$w = \underline{\mathtt{a}}^m \underline{\mathtt{b}} \underline{\mathtt{a}}^m \underline{\mathtt{b}}.$$

Dann gilt $w \in L$ und $|w| = 2m + 2 > m$.

Wir teilen nun w in xyz so auf, dass $|xy| \leq m$ und $|y| > 0$. Nachdem $|xy| \leq m$ und $w = \underline{\mathtt{a}}^m \underline{\mathtt{b}} \underline{\mathtt{a}}^m \underline{\mathtt{b}}$, kann xy nur aus Symbolen $\underline{\mathtt{a}}$ bestehen.

Nach dem Pumping Lemma muss aber $xy^iz \in L$ für alle $i \geq 0$ gelten.

Wenn wir nun z.B. $i = 2$ wählen, müsste auch $xy^2z = \underline{\mathtt{a}}^{m+|y|} \underline{\mathtt{b}} \underline{\mathtt{a}}^{2m} \underline{\mathtt{b}}$ aus L sein, was aber nicht der Fall ist! Wir haben also einen Widerspruch gefunden, L kann somit keine reguläre Sprache sein.

2.) Sei $L_1 = \{\underline{\mathtt{a}}^{2k} \underline{\mathtt{b}}^l \underline{\mathtt{c}}^{2m} \mid k, l, m \geq 0\}$ und $L_2 = \{\underline{\mathtt{a}}^{2m} \underline{\mathtt{b}}^m \underline{\mathtt{c}}^{4n} \mid m, n \geq 0\}$.

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die L_2 erzeugt. **(2 Punkte)**

Lösung: $G = (\{S, A, B\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}, \{S \to AB, A \to \underline{\mathtt{a}}^2 A \underline{\mathtt{b}} \mid \varepsilon, B \to \underline{\mathtt{c}}^4 B \mid \varepsilon\}, S)$

b) Geben Sie $L_1 \cap L_2$ an. **(2 Punkte)**

Lösung: $L_1 \cap L_2 = \{\underline{\mathtt{a}}^{2n} \underline{\mathtt{b}}^n \underline{\mathtt{c}}^{4l} \mid l, m \geq 0\}$ $\quad (L_1 \cap L_2 = L_2)$

c) Ist $L_1 \cap L_2$ eine kontextfreie Sprache? Begründen Sie Ihre Antwort. **(2 Punkte)**

Lösung: Ja, $L_1 \cap L_2$ ist kontextfrei. Dies ist nicht verwunderlich, da kontextfreie Sprachen unter Schnitt mit regulären Mengen abgeschlossen sind (und eine kontextfreie Grammatik für diese Sprache wurde unter a) angegeben.)

d) Ist $L_1 \cap L_2$ von einer deterministischen Turingmaschine in polynomiell beschränkter Zeit entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort. **(2 Punkte)**

Lösung: Ja, da $L_1 \cap L_2$ kontextfrei ist (siehe a)), und $\mathcal{L}_2 \subset \mathbf{P}$.

3.) Sei $\Sigma = \{\underline{\mathtt{0}}, \underline{\mathtt{1}}\}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

Es ist nicht entscheidbar, ob in der von einer Turingmaschine akzeptierten Sprache Wörter sind, die mit $\underline{\mathtt{1}}\underline{\mathtt{1}}$ beginnen.

(6 Punkte)

Lösung: Unentscheidbar, Satz von Rice.

Es geht um die Eigenschaft $P = \{L \mid \underline{\mathtt{1}}\underline{\mathtt{1}}w \in L, w \in \Sigma^*\}$. Diese ist keine triviale Eigenschaft, denn es gilt z.B. $\{\underline{\mathtt{0}}\} \notin P$ aber $\{\underline{\mathtt{0}}, \underline{\mathtt{1}}\}^* \in P$. Daher ist dieses Problem nach dem Satz von Rice unentscheidbar.

4.) Über die vier Sprachen A, B, C, D wissen wir Folgendes:

– A ist in $\mathbf{NP}$.

- B ist **NP**-vollständig.
- C ist entscheidbar.
- D ist rekursiv aufzählbar, aber nicht entscheidbar.

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie

- *jedenfalls* zutrifft (unabhängig davon, um welche Probleme es sich bei A bis D handelt, und auch unabhängig von (noch) unbewiesenen Beziehungen zwischen Komplexitätsklassen)
- *vielleicht* zutrifft (je nach dem worum es sich bei A bis D handelt, und/oder abhängig von der Lösung bisher unbewiesener Beziehungen zwischen Komplexitätsklassen)
- *keinesfalls* zutrifft (unabhängig davon, um welche Probleme es sich bei A bis D handelt, und auch unabhängig von (noch) unbewiesenen Beziehungen zwischen Komplexitätsklassen)

Begründen Sie Ihre Antwort.

- D kann auf C reduziert werden ($D \leq C$).
  Begründung: ☐ jedenfalls ☒ keinesfalls ☐ vielleicht

  Lösung: Dies würde beweisen, dass D entscheidbar ist.

- B kann in polynomieller Zeit auf A reduziert werden ($B \leq_p A$).
  Begründung: ☐ jedenfalls ☐ keinesfalls ☒ vielleicht

  Lösung: A könnte auch NP-vollständig sein. Wäre allerdings A in P, so hätten wir damit einen Beweis für $P = NP$.

(4 Punkte)

5.) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. (Zwei Punkte für jede richtige Antwort mit richtiger Begründung, einen Punkt bei leicht fehlerhafter Begründung, keinen Punkt für falsche Antworten oder fehlerhafte bzw. fehlende Begründungen.)

- Jede unentscheidbare Sprache enthält eine entscheidbare Teilmenge.
  Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

  Lösung: Jede unentscheidbare Sprache enthält eine endliche Teilmenge, und endliche Mengen sind immer entscheidbar.

- Ist L regulär, so ist auch $\{ww \mid w \in L\}$ regulär.
  Begründung: ☐ richtig ☒ falsch

  Lösung: In Beispiel 1 wurde bewiesen, dass dies nicht der Fall ist.

- Es gibt eine unbeschränkte Grammatik, welche $L = \{\}$ erzeugt.
  Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

  Lösung: $\{\}$ ist rekursiv aufzählbar.

(6 Punkte)