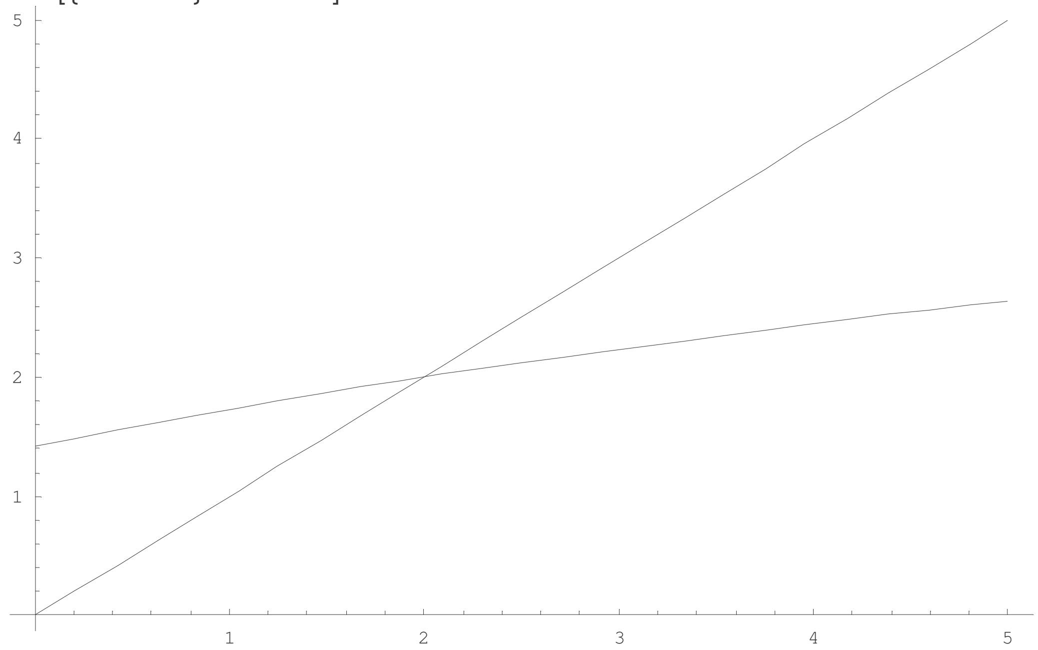
29. Man bestimme die Lösung der Differenzengleichung $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$ (für $n \geq 0$) zum Anfangswert $x_0 = 0$ auf graphischem Weg, berechne die Gleichgewichtspunkte und überprüfe sie auf Stabilität.

```
Plot[{√(2+x), x}, {x, 0, 5}]
```



- Graphics -

Ein Gleichgewicht x^* heißt **stabil**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ gibt, sodass für alle Lösungsfolgen (x_n) mit **Fehler! Es ist nicht möglich, durch die Bearbeitung von Feldfunktionen Objekte zu erstellen.** gilt: **Fehler! Es ist nicht möglich, durch die Bearbeitung von Feldfunktionen Objekte zu erstellen.** für alle $n \in N$.

Ein Gleichgewichtspunkt x^* heißt **asymptotisch stabil**, wenn es außerdem ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle (x_n) mit **Fehler! Es ist nicht möglich, durch die Bearbeitung von Feldfunktionen Objekte zu erstellen.** gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$. Andernfalls heißt x^* **instabil**.

Ein Fixpunkt x^* der Differenzengleichung $x_{n+1} = f(x_n)$ ist **asymptotisch stabil**, falls $|f'(x^*)| < 1$ und instabil, falls $|f'(x^*)| > 1$.

Gleichgewichtspunkt: $x_{n+1} = f(x_n) = \sqrt{2+x_n} = x$

$$\sqrt{2+x_n} = x \Rightarrow 2+x = x^2 \Rightarrow 0 = x^2 - x - 2 \Rightarrow {}_1x_2 = +\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2}$$

$${}_1x_2 = +\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1+8}{4}} = +\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \Rightarrow x_1 = +2 \text{ und } x_2 = -1$$

$\Rightarrow$ also ist $x_1 = x^* = +2$ der Gleichgewichtspunkt

nun auf Stabilität überprüfen: $f'(x_n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2+x}}$

$\Rightarrow f'(2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2+2}} = \frac{1}{2} < 1$ also ist $x^* = 2$ asymptotisch stabil