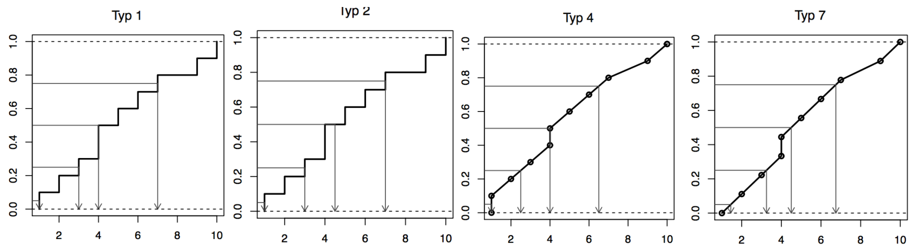
Formelsammlung: Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie

Kapitel 1: Deskriptive und explorative Statistik

Empirische Verteilungsfkt (S15): $\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{(-\infty,x]}(x_i), \quad x \in \mathbb{R}$

Quantile (S24):

Bei Typ7
1.Pkt = 0
Danach
1/(n-1)



Median (S24):

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{(k+1)} & \text{falls} \quad n = 2k+1 \quad \text{(d. h. } n \text{ ungerade)} \\ \frac{x_{(k)} + x_{(k+1)}}{2} & \text{falls} \quad n = 2k \quad \text{(d. h. } n \text{ gerade)} \end{cases}$$

u.Hinge(Q1) / o.Hinge(Q3):
Median der beiden Hälften
(Bei n=ungerade => Median mitzählen)

LFence:
Q1-1.5(Q3-Q1)

UFence:
Q3+1.5(Q3-Q1)

Whiskers: Punkt, der noch innerhalb der Fences liegt. **Ausreißer:** Punkte, die ausserhalb der Whiskers liegen.

Arith. Mittelwert

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

gewicht. Mittelwert

$$\overline{x}_g = \sum_{i=1}^{n} g_i x_i$$

geom. Mittelwert

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}$$

harm. Mittelwert

$$\overline{x}_n^{(h)} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

MAD

$$\text{MAD} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \tilde{x}|$$

Varianz

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)^2$$

Stichprobenstreuung

$$s_n = \sqrt{s_n^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)^2}$$

Verschiebungssatz (Wenn n = Groß)

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n(\overline{x}_n)^2\right] = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}\right]$$

Kapitel 2: Wahrscheinlichkeit

Bayes'sche Formel (S86)

$$P(C_i|A) = \frac{P(A|C_i)P(C_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(A|C_j)P(C_j)}$$

Odds-Form Bayes'sche Form (S86)

$$\underbrace{\frac{P(H|A)}{P(\overline{H}|A)}}_{\text{A-posteriori–Odds}} = \underbrace{\frac{P(H)}{P(\overline{H})}}_{\text{A-priori–Odds}} \times \underbrace{\frac{P(A|H)}{P(A|\overline{H})}}_{\text{Likelihood-Quotient}}$$

Unabhängig von 2 Ereignissen

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Kapitel 3: Stochastische Größen und Verteilungen

Verteilungsfunktion (S114)

$$F_X(x) := P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Allgemein (S114)

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

linksseitiger Grenzwert (S114)

$$P(X = x) = F(x) - F(x-) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}$$

Verallgemeinerte Inverse (S116)

$$F^{-1}(y) = \inf\{x \,|\, F(x) \geq y\} \quad \text{für} \quad y \in (0,1)$$

p-Quantil (S117)

$$x_p = F^{-1}(p) \quad \text{für} \quad p \in (0,1)$$

<u>Diskrete Verteilungen:</u>

Wahrscheinlichkeitsfunktion (118)

$$p_X(x) = P(X = x) \quad \text{für} \quad x \in M_X$$

Verteilungsfunktion (S118)

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_X(x_i), \quad x \in \mathbb{R}$$

Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x x p(x)$$

Erwartungswert Funktion

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{x \in S_X} g(x) p_X(x)$$

Stetige Verteilungen:

Erwartungswert (S134)

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

Erwartungswert (Funktion) LotUS

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx$$

Allgemein

Verteilungsfunktion (S119)

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$$

Dichtefunktion (S120)

$$\frac{d}{dx} F_X(x) = F_X'(x) = f_X(x)$$

gemischte Verteilung (S123)

$$\sum_{i=1}^{m} p(x_i) + \int_a^b f^*(x)\, dx = 1$$

Median(0.5-Quantil)

$$x_{0.5} = F_X^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Transformationssatz für Dichte (S129)

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|, \quad y \in S_Y$$

Jacobian (S129)

$$J = \frac{dx}{dy} = \frac{dg^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{dg(x)}{dx}}$$

Verschiebungssatz Varianz

$$\sigma_X^2 = \mathbb{E}(X^2) - \left[\mathbb{E}(X)\right]^2$$

Bestimmung der Verteilungsfunktion aus der Grafik

y1 + ((1-y1) * x/x2) = 1

Kapitel 4: Spezielle Verteilungen

Diskrete Verteilungen

Erwartungswert

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}$$

Varianz

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

<u>Bernoulli Verteilung</u> *X ~ A(p)*

W-Funktion

$$p(x) = p^x (1-p)^{1-x} \quad \text{für} \quad x \in \{0,1\}$$

Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=0}^{1} x p^x (1-p)^{1-x} = (0)(1-p) + (1)(p) = p$$

Varianz

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = p - p^2 = p(1-p)$$

<u>Binomialverteilung</u> *X ~ B(n,p)*

W-Funktion

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X) = np,$$

Varianz

$$\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$

Anzahl Versuche

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

$$\sum_{x=0}^{n} p(x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = [p + (1-p)]^n = 1$$

<u>Negative Binomialverteilung</u> *X ~ NB(n,p)*

W-Funktion

$$p(x) = P(X=x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}$$

Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X) = \frac{r}{p},$$

Varianz

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

<u>Geometrische Verteilung</u> *X ~ G(p)*

W-Funktion

$$p(x) = P(X=x) = p(1-p)^{x-1}$$

Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p},$$

Varianz

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

<u>Hypergeometrische Verteilung</u> *X ~ H(N, A, n)*

W-Funktion

$$p(x) = P(X=x) = \frac{\binom{A}{x}\binom{N-A}{n-x}}{\binom{N}{n}},$$

Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X) = n\frac{A}{N},$$

Varianz

$$\mathrm{Var}(X) = n\frac{A}{N}\left(1 - \frac{A}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$$

<u>Poisson Verteilung</u> $X \sim P(\lambda)$

W-Funktion

$$p(x) = P(X=x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X) = \lambda,$$

Varianz

$$\mathrm{Var}(X) = \lambda$$

Stetige Verteilungen

Stetige uniforme Verteilung $X \sim U(a, b)$

Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für} \quad x \in (a,b) \\ 0 & \text{für} \quad x \notin (a,b) \end{cases}$$

Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für} \quad a < x < b \\ 1 & \text{für} \quad x \geq b \end{cases}$$

Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2},$$

Varianz

$$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exponentialverteilung $X \sim \text{Exp}(\lambda)$

Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\tau} e^{-x/\tau} \quad \text{für} \quad x \geq 0$$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{für} \quad x \geq 0$$

Verteilungsfunktion

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Gedächtnislosigkeit

$$P(X > s + t \,|\, X > s) = P(X > t)$$

Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = \tau,$$

Varianz

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \tau^2,$$

$$\sqrt{\text{Var}(X)} = \frac{1}{\lambda} = \tau$$

Gammaverteilung $X \sim P(\alpha, \lambda)$

Dichte

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}$$

Gammafunktion

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u}\, du \quad \text{für} \quad \alpha > 0$$

Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\lambda} = \alpha\beta,$$

Varianz

$$\text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2} = \alpha\beta^2$$

Für $X \sim \chi^2(n)$:

Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X) = n,$$

Varianz

$$\text{Var}(X) = 2n$$

Normalverteilung $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

StandardN-Verteilung

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X) = \mu,$$

Varianz

$$\text{Var}(X) = \sigma^2$$

Standardisierung

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq z\right) = P(X \leq \mu + \sigma z)$$

affine Transformation

$$X = \mu + \sigma Z \quad \text{mit} \quad Z \sim \text{N}(0,1)$$

Quantile

$$x_p = \mu + \sigma z_p$$

Quantile (p < 0.5)

$$z_p = -z_{1-p}$$

F-verteilung $X \sim F(m, n)$

Dichte

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} x^{(m-2)/2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left[1+\left(\frac{m}{n}\right)x\right]^{(m+n)/2}}$$

Quantile

$$F_{m,n;p} = \frac{1}{F_{n,m;1-p}}$$

Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n}{n-2}$$

Varianz

$$\text{Var}(X) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$$

T-Verteilung $X \sim t(n)$

Dichte

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$$

Quantile

$$t_{n;p} = -t_{n;1-p}$$

Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X) = 0$$

Varianz

$$\text{Var}(X) = \frac{n}{n-2}$$

Betaverteilung $X \sim Be(a, b)$

Dichte

$$f(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}$$

Quantile

Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a}{a+b},$$

Varianz

$$\text{Var}(X) = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$$

Kapitel 5: Multivariate Verteilungen

Verteilungsfunktion

$$F(x_1,x_2) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} f(w_1,w_2)\,dw_1dw_2$$

W-Funktion

$$P\big((X_1,X_2)\in B\big) = \iint_B f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2$$

Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_1(x_1)\,dx_1$$

Randdichten

$$X_1:\ f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2)\,dx_2 \qquad X_2:\ f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2)\,dx_1$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit (Diskret)

$$P(X_2=x_2\,|\,X_1=x_1) = \frac{P(X_1=x_1,X_2=x_2)}{P(X_1=x_1)} = \frac{p(x_1,x_2)}{p_1(x_1)}$$

Bedingte Dichte (stetig)

$$f(x_2|x_1) = \frac{f(x_1,x_2)}{f_1(x_1)}$$

Bedingter Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X_2|x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f(x_2|x_1)\,dx_2$$

Bedingte Varianz

$$\mathrm{Var}(X_2|x_1) = \mathbb{E}(X_2^2|x_1) - \big[\mathbb{E}(X_2|x_1)\big]^2$$

Kovarianz

$$\mathbb{E}(XY) - \mu_1\mu_2$$

Korrelationskoeffizient

$$\rho = \rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\,\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\,\sigma_2}$$

Unabhängigkeit (stetig)

$$f(x_1,x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$$

Unabhängigk. (diskret)

$$f_2(x_2) = f(x_2|x_1)$$

Verteilungsfunktion mitHerleitung (u.a. Seriellsystem)

Achtung: e^0 = 1

$$\begin{aligned}F_{\min}(y) = P(Y_1\le y) &= 1-P(Y_1>y)\\ &= 1-P(X_1>y, X_2>y,\ldots,X_n>y)\\ &= 1-\prod_{i=1}^{n} P(X_i>y)\\ &= 1-\prod_{i=1}^{n}\,[1-P(X_i\le y)]\end{aligned} \qquad F_{\min}(y) = 1-\prod_{i=1}^{n}\,[1-F_i(y)]$$

Verteilungsfunktion (ua. Parallelsystem)

$$F_{\max}(y) = \prod_{i=1}^{n} F_i(y)$$

Kapitel 6: Folgen von stochastischen Größen

Erwartungswert (u.a. Linearkombination)

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{i=1}^{n} a_i\mathbb{E}(X_i)$$

Wie oft muss man im Mittel eine Münze werfen, sodass beide Seiten zumindest einmal vorgekommen

$$\mathbb{E}(X) = N\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N-1} + \cdots + 1\right)$$

Normalapproximations der B(n,p)-Verteilung

$$P(X_n\le x) \approx \Phi\left(\frac{x+1/2-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$P(a\le X_n\le b) \approx \Phi\left(\frac{b+1/2-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-1/2-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

(Wenn Wert nicht in Tabelle, abs(Wert) ablesen => Tabellenwert)

Normalapproximations der Poisson-Verteilung

$$P(X\le x) \approx \Phi\left(\frac{x+1/2-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

$$P(a\le X\le b) \approx \Phi\left(\frac{b+1/2-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) - \Phi\left(\frac{a-1/2-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

Additionstheoreme: Bernoulli Verteilung

$$X_i\sim \mathsf{A}(p),\ i=1,2,\ldots,n,\ \text{ua.} \implies \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathsf{B}(n,p)$$

Binomial Verteilung:

$$X_i\sim \mathsf{B}(n_i,p),\ i=1,2,\ldots,n,\ \text{ua.} \implies \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathsf{B}\left(\sum_{i=1}^{n} n_i, p\right)$$

Poisson Verteilung

$$X_i\sim \mathsf{P}(\lambda_i),\ i=1,2,\ldots,n,\ \text{ua.} \implies \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)$$

Geometrische Verteilung

$$X_i\sim \mathsf{G}(p),\ i=1,2,\ldots,r,\ \text{ua.} \implies \sum_{i=1}^{r} X_i \sim \mathsf{NB}(r,p)$$

Exponential Verteilung

$$X_i\sim \mathsf{Exp}(\lambda),\ i=1,2,\ldots,n,\ \text{ua.} \implies \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathsf{Gam}(n,\lambda)$$

Gamma Verteilung

$$X_i\sim \mathsf{Gam}(\alpha_i,\lambda),\ i=1,2,\ldots,n,\ \text{ua.} \implies \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathsf{Gam}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,\lambda\right)$$

Normal Verteilung

$$X_i\sim \mathsf{N}(\mu_i,\sigma_i^2),\ i=1,2,\ldots,n,\ \text{ua.} \implies \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathsf{N}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i,\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)$$

Mit Konstanten $a_1,a_2,\ldots,a_n$ gilt etwas allgemeiner:

$$X_i\sim \mathsf{N}(\mu_i,\sigma_i^2),\ i=1,2,\ldots,n,\ \text{ua.} \implies \sum_{i=1}^{n} a_iX_i \sim \mathsf{N}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\mu_i,\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_i^2\right)$$

Chiquadrat Verteilung:

$$X_i\sim \chi^2(n_i),\ i=1,2,\ldots,n,\ \text{ua.} \implies \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2\left(\sum_{i=1}^{n} n_i\right)$$

Kapitel 7: Schliessende Statistik

Maximum Likelihood Schätzer (diskret)

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta) \quad \text{für} \quad \theta \in \Theta$$

Maximum Likelihood Schätzer (stetig)

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) \quad \text{für} \quad \theta \in \Theta$$

Statistische Tests

p-Wert

Bezug zum klassischen Testen: Ein klassischer Test ergibt sich dadurch, dass eine $\mathcal{H}_0$, deren p–Wert kleiner als α ist, auf dem Niveau α verworfen wird. Anders ausgedrückt:

Test für den Mittelwert einer Normalverteilung (Varianz σ^2 bekannt) [S301]

Nullhypothese: $\mathcal{H}_0 : \mu = \mu_0$

Teststatistik: $Z_0 = \dfrac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$

Alternativhypothese $\mathcal{H}_1$	$\mathcal{H}_0$ verwerfen, falls
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0\rvert > z_{1-\alpha/2}$
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < z_\alpha \; (= -z_{1-\alpha})$

Test für den Mittelwert einer Normalverteilung (Varianz σ^2 unbekannt) [S303]

Nullhypothese: $\mathcal{H}_0 : \mu = \mu_0$

Teststatistik: $T_0 = \dfrac{\overline{X}_n - \mu_0}{S_n/\sqrt{n}}$

Alternativhypothese $\mathcal{H}_1$	$\mathcal{H}_0$ verwerfen, falls
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert T_0\rvert > t_{n-1;\,1-\alpha/2}$
$\mu > \mu_0$	$T_0 > t_{n-1;\,1-\alpha}$
$\mu < \mu_0$	$T_0 < t_{n-1;\,\alpha} \; (= -t_{n-1;\,1-\alpha})$

Test für die Varianz σ^2 einer Normalverteilung [S306]

Nullhypothese: $\mathcal{H}_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$

Teststatistik: $\chi_0^2 = \dfrac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2}$

Alternativhypothese $\mathcal{H}_1$	$\mathcal{H}_0$ verwerfen, falls
$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi_0^2 < \chi^2_{n-1;\,\alpha/2}$ oder $\chi_0^2 > \chi^2_{n-1;\,1-\alpha/2}$
$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi_0^2 > \chi^2_{n-1;\,1-\alpha}$
$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi_0^2 < \chi^2_{n-1;\,\alpha}$

Tests für die Mittelwerte von zwei unabhängige Stichproben (Normalverteilungen) [S310]

Bedingung: $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$ (unbekannt)

Nullhypothese: $\mathcal{H}_0 : \mu_X - \mu_Y = \Delta_0$

Teststatistik: $T_0 = \dfrac{(\overline{X} - \overline{Y}) - \Delta_0}{S_p\sqrt{1/m + 1/n}}$

Alternativhypothese $\mathcal{H}_1$	$\mathcal{H}_0$ verwerfen, falls
$\mu_X - \mu_Y \neq \Delta_0$	$\lvert T_0\rvert > t_{m+n-2;\,1-\alpha/2}$
$\mu_X - \mu_Y > \Delta_0$	$T_0 > t_{m+n-2;\,1-\alpha}$
$\mu_X - \mu_Y < \Delta_0$	$T_0 < t_{m+n-2;\,\alpha} \; (= -t_{m+n-2;\,1-\alpha})$

Gepoolter Varianzschätzer

$$S_p^2 = \frac{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{m+n-2}$$

Bedingung: σ_X^2 ungleich σ_Y^2 (beide unbekannt)

Nullhypothese: $\mathcal{H}_0 : \mu_X - \mu_Y = \Delta_0$

Teststatistik: $Z_0 = \dfrac{(\overline{X} - \overline{Y}) - \Delta_0}{\sqrt{S_X^2/m + S_Y^2/n}}$

Alternativhypothese $\mathcal{H}_1$	$\mathcal{H}_0$ verwerfen, falls
$\mu_X - \mu_Y \neq \Delta_0$	$\lvert Z_0\rvert > z_{1-\alpha/2}$
$\mu_X - \mu_Y > \Delta_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$
$\mu_X - \mu_Y < \Delta_0$	$Z_0 < z_\alpha \; (= -z_{1-\alpha})$

Tests für die Varianzen von zwei unabhängige Stichproben (Normalverteilungen) [S]

Nullhypothese: $\mathcal{H}_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$

Teststatistik: $F_0 = \dfrac{S_X^2}{S_Y^2}$

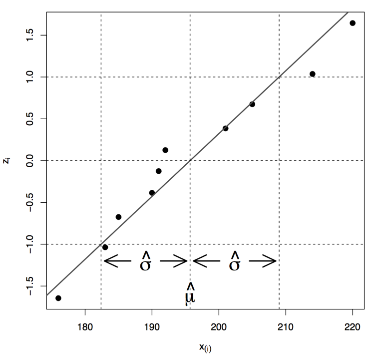
Alternativhypothese $\mathcal{H}_1$	$\mathcal{H}_0$ verwerfen, falls
$\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$	$F_0 < F_{m-1,n-1;\,\alpha/2}$ oder $F_0 > F_{m-1,n-1;\,1-\alpha/2}$
$\sigma_X^2 > \sigma_Y^2$	$F_0 > F_{m-1,n-1;\,1-\alpha}$
$\sigma_X^2 < \sigma_Y^2$	$F_0 < F_{m-1,n-1;\,\alpha}$

Achtung: Wenn nicht In der Tabelle, dann:

$$F_{m-1,n-1;\,\alpha/2} = \frac{1}{F_{n-1,m-1;\,1-\alpha/2}}$$

Chiquadrat-Anpassungstest

Abbildung 7.16: Normal-QQ–Plot für die Daten von Bsp 7.30



Einfacher Test

Klassen	X	$\widehat{p}$	$n\widehat{p}$	$(X - n\widehat{p})^2/n\widehat{p}$
$(-\infty, -1.1433]$	4	0.125	5	0.2
$(-1.1433, -0.6522]$	9	0.125	5	3.2
$(-0.6522, -0.2849]$	4	0.125	5	0.2
$(-0.2849, 0.0439]$	4	0.125	5	0.2
$(0.0439, 0.3728]$	4	0.125	5	0.2
$(0.3728, 0.7401]$	1	0.125	5	3.2
$(0.7401, 1.2312]$	10	0.125	5	5.0
$(1.2312, \infty)$	4	0.125	5	0.2
Summe	40	1.000	40	12.4

H0 verwerfen wenn:

$$Q_{k-s-1} > \chi^2_{k-s-1;\,1-\alpha}$$

Zusammengesetzter Test

Klasse	X_i	p_{i0}	np_{i0}	$(X_i - np_{i0})^2/np_{i0}$
1	13	1/6	10	0.9
2	19	1/6	10	8.1
3	11	1/6	10	0.1
4	8	1/6	10	0.4
5	5	1/6	10	2.5
6	4	1/6	10	3.6
Summe	60	1	60	15.6

H0 verwerfen wenn:

$$Q_{k-1} > \chi^2_{k-1;\,1-\alpha}$$

$$p\text{–Wert} = P\big(\chi^2(5) \geq 15.6\big) \doteq 0.0081$$

Approximatives Konfidenzintervall für den Mittelwert μ

$$\overline{X}_n \pm t_{n-1;\,1-\alpha/2}\,\frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

Approximatives Konfidenzintervall $\sigma_X 2$ / $\sigma_Y 2$

$$\left(\frac{1}{F_{m-1,n-1;\,1-\alpha/2}}\,\frac{S_X^2}{S_Y^2},\ \frac{1}{F_{m-1,n-1;\,\alpha/2}}\,\frac{S_X^2}{S_Y^2}\right)$$

Approx. Konfidenzintervall für die Varianz

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1;\,1-\alpha/2}}},\ \sqrt{\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1;\,\alpha/2}}}\right)$$

Approximatives Konfidenzintervall $\mu_X - \mu_Y$

$$\overline{X} - \overline{Y} \pm t_{m+n-2;\,1-\alpha/2}\,S_p\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$$

Approximatives Konfidenzintervall (Bernoulli Verteilung)

$$\widehat{p} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}$$

F-Quantile (Wenn nicht in der Tabellen vorhanden)

$$F_{m-1,n-1;\,\alpha/2} = \frac{1}{F_{n-1,m-1;\,1-\alpha/2}}$$

Diverses

Integral durch Substitution

$$\int \frac{1}{5x-7}dx = ?$$

1.) $z = 5x - 7 \qquad \frac{dz}{dx} = 5 \qquad dx = \frac{dz}{5}$

2.) $\int \frac{1}{5x-7}dx = \int \frac{1}{z}\cdot\frac{dz}{5}$

3.) $\int \frac{1}{z}\cdot\frac{dz}{5} = \frac{1}{5}\int\frac{1}{z}dz = \frac{1}{5}ln|z| + C$

4.) $\frac{1}{5}ln|z| + C = \frac{1}{5}ln|5x-7| + C$

Partielle Integration

$$\int (x \cdot e^x)dx = F(x) = ?$$

$u = x$
$v' = e^x$

$u' = 1$
$v = e^x$

$F(x) = u \cdot v - \int (u' \cdot v)dx$

$F(x) = x \cdot e^x - \int (1 \cdot e^x)dx$

$F(x) = x \cdot e^x - \int e^x dx$

$F(x) = x \cdot e^x - e^x + C$

Frage: “Wie kann man auf Basis von U ~ U (0, 1) Beobachtungen von X generieren? Welcher x–Wert ergibt sich z. B. für u = 0.3522 ?”
Umkehrfunktion der VF -> einsetzen vom x-Wert