45 $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$

Subst. $z = y^{1/2}$ liefert $z' = \frac{2}{x}z + \frac{x}{2}$ also $\frac{dz}{dx} = \frac{4z+x^2}{2x}$

$$\iff \underbrace{-(4z+x^2)}_{p}\,dx + \underbrace{2x}_{q}\,dz = 0$$

wir haben $\frac{\partial p}{\partial z} = -4 \neq \frac{\partial q}{\partial x} = 2$, also nicht exakt

wir suchen einen integr. Faktor und verwenden:

Gibt es eine Fkt. $g(x)$ mit $\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial z} = g(x)\cdot q$,
so gibt es einen int. Faktor $\mu(x)$. Dieser ist Lsg. von
$$\mu'(x) = -g(x)\cdot\mu(x)$$

$\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial z} = 2-(-4) = 6 = \frac{3}{x}\cdot 2x$

also $\mu(x) = -\frac{3}{x}\mu(x) \Rightarrow \mu(x) = x^{-3}$

$\rightsquigarrow -\frac{4z}{x^3} - \frac{1}{x}\,dx + \frac{2}{x^2}\,dz = 0$

$\Rightarrow u(x,z) = \int -\frac{4z}{x^3} - \frac{1}{x}\,dx + c(z) = 2zx^{-2} - \ln|x| + c(z)$

$u_z = 2\cdot x^{-2} + c'(z) \overset{!}{=} 2\cdot x^{-2} \Rightarrow c'(z) = 0 \Rightarrow c(z) = c$

$\Rightarrow u(x,y) = \frac{2z}{x^2} - \ln|x| = c$

$\Rightarrow z = \left(c + \frac{\ln|x|}{2}\right)x^2$

$\Rightarrow y = \left(c + \frac{\ln|x|}{2}\right)^2 x^4$