263.) $$\int_1^{\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx$$

Sei: · $f: [1; +\infty) \longrightarrow [0; 1]$ (es läßt sich $[0; \cos(1)$ zeigen)

$f(x) = \frac{|\cos x|}{x}$

· $g: [1; +\infty) \longrightarrow [0; 1]$

$g(x) = \frac{1}{x^2}$

Bemerkungen:

· f ist stückweise stetig in $[1; +\infty)$

· g ist stetig in $[1; +\infty)$

· $|f(x)| = f(x)$

Es gilt:

· $|f(x)| = f(x) = \frac{|\cos x|}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2} = g(x)$, $\forall x \in [1; +\infty)$

· $$\int_1^{\infty} g(x)\,dx = \lim_{D\to\infty} \int_1^{D} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{D\to\infty} \left(-\frac{1}{x} + C\right)\Big|_1^D =$$

$$= \lim_{D\to\infty} \left(-\frac{1}{D} + \frac{1}{1}\right) = 1$$

$\Rightarrow \int_1^{\infty} g(x)\,dx$ konvergent (von $|g(x)|$ auch $\Rightarrow$ absolut)

[$g(x)$ ist eine konvergente Majorante]

$\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx$ (absolut) konvergent.

278.) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \ln^{\alpha} n} \quad (\alpha > 0)$

Sei $f : [2; +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(n) = \frac{1}{n \cdot \ln^{\alpha} n} \quad (\alpha > 0) \quad > 0$ (leicht zu bemerken)

· Ist $f(n)$ monoton fallend in $[2; +\infty)$?

Seien $n_1, n_2 \in [2; +\infty)$, sodaß $n_1 < n_2$

$n_2 \cdot \ln^{\alpha} n_2 - n_1 \cdot \ln^{\alpha} n_1 > 0 \quad (n_2 > n_1 \wedge \ln^{\alpha} n_2 > \ln^{\alpha} n_1)$ in $[2; +\infty)$

$\frac{1}{f(n)}$ streng monoton wachsend $\Longleftrightarrow$ $f(n)$ streng monoton fallend ✓

Daher gilt es:

$\sum_{n\geq 2} f(n)$ konvergent $\Longleftrightarrow$ $\int_2^{\infty} f(x)\,dx$ konvergent

$$\int_2^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{D\to\infty} \int_2^{D} \frac{dx}{x \ln^{\alpha} x} \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \end{array} \right. = \lim_{D\to\infty} \int_{\ln 2}^{\ln D} \frac{du}{u^{\alpha}} =$$

$$= \lim_{D\to\infty} \frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha} + C \Big|_{\ln 2}^{\ln D} = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \lim_{D\to\infty} \left(\ln^{1-\alpha} D - \ln^{1-\alpha} 2 \right) \underset{\text{SONST DIVERGENT}}{\overset{\alpha > 1}{=\!=}} \frac{\ln^{1-\alpha} 2}{\alpha - 1}$$

$\Rightarrow \int_2^{\infty} f(x)\,dx$ (absolut) konvergent (gegen $\frac{\ln^{1-\alpha} 2}{\alpha - 1}$) für $\alpha > 1$, sonst divergent

$\Rightarrow \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \ln^{\alpha} n} \quad (\alpha > 0)$ ist genau dann konvergent (absolut), wenn $\alpha > 1$ ist. Falls $\alpha \leq 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \ln^{\alpha} n}$ divergent.

310.) $$f(x,y) = \frac{x\cos\frac{1}{x} + y\sin y}{2x-y}, \quad 0 \neq 2x \neq y$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = -\sin y$$

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \frac{1}{2}\cos\frac{1}{x}$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}(-\sin y) = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cos\frac{1}{x} = \text{NULL}$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

335.)

$$g_u(u,v) = e^{-u^2}$$

$$g_v(u,v) = -e^{v^3}$$

$$h(t) = \frac{d}{dt}\, g(t^2-1,\, 3t) \overset{\text{Ketten-Regel}}{\underset{\text{anwenden}}{=\!=\!=}} g_u(t^2-1,\, 3t)\cdot\frac{d}{dt}(t^2-1) + g_v(t^2-1,\, 3t)\cdot\frac{d}{dt}\, 3t =$$

$$= e^{-(t^2-1)^2}\cdot 2t - e^{(3t)^3}\cdot 3 =$$

$$= 2t\, e^{(1+t)(1-t)} - 3\, e^{27t^3}$$

Kettenregel:

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge $f: D \to \mathbb{R}$ und $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit $\vec{g}(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$ und $g(\mathbb{R}) \subseteq D$. Weiters sei $F(x) = f(\vec{g}(x))$.

Dann gilt:

$$F'(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(g_1(x), \dots, g_n(x)) \cdot g_i'(x).$$

In Leibniz'scher Notation:

$$\frac{dF}{dx} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial g_i} \cdot \frac{dg_i}{dx}.$$

339.) $f(x,y) = x^2 + 4y^2$

$P_0(3,2)$

a) $f_x(x,y) = 2x$

$f_y(x,y) = 8y$

$\nabla f(x,y) = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ 4y \end{pmatrix}$

$\nabla f(P_0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \end{pmatrix}$

Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: $\nabla f(P_0) \cdot \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|} = 6$

Richtung $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\nabla f(P_0) \cdot \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|} = 16$

b) Richtung von $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$: $\nabla f(P_0) \cdot \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\|} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(6+16) = -11\sqrt{2}$

c) Richtung von $\nabla f(P_0)$: $\nabla f(P_0) \cdot \frac{\nabla f(P_0)}{\|\nabla f(P_0)\|} = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{73}} \\ \frac{8}{\sqrt{73}} \end{pmatrix} = \frac{18\sqrt{73}}{73} + \frac{128\sqrt{73}}{73} =$

$= 2\sqrt{73}$

Wenn man in Richtung des Gradients wandert, dann wächst die Funktion am stärksten.

341.) $f(x,y) = x^2(y-1) + x e^{y^2}$

$(x_0, y_0) = (1, 0)$

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right)$$

$$+ R(x,y)$$

[Zeilen 1 und 3: lineare Approximation, Zeilen 1, 2, 3: quadratische Approximation, $R(x)$: Fehler]

$f_x(x,y) = 2x(y-1) + e^{y^2}$

$f_y(x,y) = x^2 + 2xy\,e^{y^2}$

$f_{xx}(x,y) = 2(y-1)$

$f_{xy}(x,y) = 2x + 2y e^{y^2} = 2(x + y e^{y^2}) = f_{yx}(x,y)$

$f_{yy}(x,y) = 2x e^{y^2} + 2xy \cdot 2y e^{y^2} = 2x(e^{y^2} + 2y^2 e^{y^2}) = 2x e^{y^2}(1 + 2y^2)$

$f_x(1,0) = 2\cdot(-1) + e^0 = -1$

$f_y(1,0) = 1 + 2\cdot 0 \cdot e^0 = 1$

$f_{xx}(1,0) = -2$

$f_{xy}(1,0) = 2$

$f_{yy}(1,0) = 2e^0(1 + 2\cdot 0) = 2$

$f(1,0) = 1\cdot(-1) + 1 \cdot e^0 = 0$

$$f(x,y) = -(x-1) + y + \frac{1}{2}\left(-2(x-1)^2 + 4(x-1)y + 2y^2\right) + R(x,y) =$$

$$= \underbrace{1 + y - x} + \underbrace{2(x-1)y + y^2 - (x-1)^2} + \underbrace{R(x,y)}$$

lineare Approximation

quadratische Approximation

366.) $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) =$, $x, y \in \mathbb{R}$

$$= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2 + 2y^2$$

· Partielle Ableitungen:

$$f_x(x,y) = 4x^3 + 4xy^2 - 4x$$

$$f_y(x,y) = 4x^2y + 4y^3 + 4y$$

$$f_{xx}(x,y) = 12x^2 + 4y^2 - 4$$

$$f_{xy}(x,y) = 8xy = f_{yx}(x,y)$$

$$f_{yy}(x,y) = 4x^2 + 12y^2 + 4$$

· Notwendige Bedingung für Extrema / Sattelpunkte:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^3 + 4xy^2 - 4x = 0 \\ 4x^2y + 4y^3 + 4y = 0 \end{cases}$$

$(x,y) = (0,0)$ ✓

$x \neq 0 \wedge y \neq 0$: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 1 = 0 \end{cases}$ ↯

$x = 0$:
$y^3 + y = 0$
$y(y^2+1) = 0$
$y = 0$

$y = 0$:
$x^3 - x = 0$
$x(x+1)(x-1) = 0$
$x = -1 \vee x = 0 \vee x = 1$

Mögliche Extrema / Sattelpunkte: $(-1,0), (0,0), (1,0)$.

Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$. Weiters sei $x_0 \in D$ ein Punkt mit $\nabla f(\vec{x_0}) = \vec{0}$. Bezeichne $H(\vec{x})$ die Hesse-Matrix von f in $\vec{x}$. Falls $H(\vec{x_0})$ negativ definit ist, so liegt bei $\vec{x_0}$ ein relatives Maximum vor. Im positiv definiten Fall liegt ein relatives Minimum vor. Ist $H(\vec{x_0})$ indefinit, so ist an der Stelle x_0 kein Extremum, sondern ein Sattelpunkt von f.

$(-1, 0)$

$f_{xx}(-1,0) = 8$

$f_{xy}(-1,0) = f_{yx}(-1,0) = 0$

$f_{yy}(-1,0) = 8$

$\det \underbrace{H((-1,0))}_{\text{positiv definit}} = \begin{vmatrix} \overset{>0}{8} & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 64 > 0$

$\Rightarrow$ relatives Minimum

$(0, 0)$

$f_{xx}(0,0) = -4$

$f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0) = 0$

$f_{yy}(0,0) = 4$

$\det \underbrace{H((0,0))}_{\text{indefinit}} = \begin{vmatrix} \overset{<0}{-4} & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -16 < 0$

indefinit ← (Hauptminorenkriterium)

$\Rightarrow$ Sattelpunkt

$(1, 0)$

$f_{xx}(1,0) = 8$

$f_{xy}(1,0) = f_{yx}(1,0) = 0$

$f_{yy}(1,0) = 8$

$\det \underbrace{H((1,0))}_{\text{positiv definit}} = \begin{vmatrix} \overset{>0}{8} & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 64 > 0$

$\Rightarrow$ relatives Minimum