Beispiel 460 (MA1 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 4, 03.04.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 04/2006

1 Angabe

Man berechne:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2 \cdot x + 9}$$

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Substitutionsregel

Es sei $u = g(x)$ in einem Intervall I stetig differenzierbar und $y = f(u)$ im Wertebereich W von $u = g(x)$ stetig. Dann gilt für $x \in I$ bzw. $u \in W$:

$$\int f[g(x)] \cdot g'(x)\, dx = \int f(u)\, du = F(u) = F[g(x)]$$

2.2 Wichtige Grundintegrale in diesem Beispiel

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x + c \qquad \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \cdot \arctan \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2 \cdot a} \cdot \arctan \ln |\frac{a + x}{a - x}| + c$$

2.3 'Grundintegralfeundliche' Umformung der quadrat. Glg.

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) =$$

$$a \cdot (x^2 + 2\frac{b}{2a}x + (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} - (\frac{b}{2a})^2) = a((x + \frac{b}{2a})^2 + (\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}))$$

3 Lösung des Beispiels

Zunächst formen wir die quadratische Gleichung im Nenner um:

$$x^2 + 2\frac{2}{2}x + \left(\tfrac{2}{2}\right)^2 + 9 - \left(\tfrac{2}{2}\right)^2 = (x + 1)^2 + 8$$

Wir vereinfachen das Integral nun weiter:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2 \cdot x + 9} = \int \frac{dx}{(x + 1)^2 + 8} = \frac{1}{8} \int \frac{dx}{\frac{(x+1)^2}{8} + 1}$$

Nun nehmen wir die Substitution vor:

$$\frac{(x+1)^2}{8} = u^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x+1}{\sqrt{8}}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{8}} \qquad \Rightarrow \qquad dx = \sqrt{8}du$$

Nun setzen wir die Substitution ein:

$$\frac{\sqrt{8}}{8} \int \frac{1}{u^2+1} du = \frac{1}{\sqrt{8}} \arctan u \ + c$$

Abschließend die Rücksubstitution:

$$\frac{1}{\sqrt{8}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{8}} \ + c$$

Nun überprüfen wir das Ergebnis noch anhand der Formel - es kommt auch unser Ergebnis heraus:

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \arctan \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c$$