Beispiel 51 (MA2 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 6, 03.05.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 05/2006

1 Angabe

In welcher Richtung erfolgt die maximale Änderung von

$$f(x,y,z) = x^2 \cdot \sin(yz) - y^2 \cdot \cos(yz)$$

vom Punkt $P(4, \frac{\pi}{4}, 2)$ aus und wie groß ist sie annähernd?

2 Theoretische Grundlagen: Der Gradient

Der **Gradient** ist die Funktion eines Skalarfeldes, welche die Änderungsrate und die Richtung der größten Änderung in Form eines Vektorfeldes angibt. Er ist damit eine Verallgemeinerung der Ableitung für Funktionen von mehreren Variablen.
Interpretiert man z.B. die Höhenkarte einer Landschaft als eine Funktion $z(x,y)$, die jedem Ort die Höhe an dieser Stelle zuordnet, dann ist der Gradient von z an einer Stelle (x,y) ein Vektor, der in die Richtung des steilsten Anstieges zeigt, und dessen Länge ein Maß für die Steigung ist.
Ein Vektor ist dann ein Gradient, wenn er jedem Punkt eines Skalarfeldes zugeordnet werden kann. Er hat die Richtung der Normalen der jeweiligen Niveaufläche, auf der die Werte des Skalarfeldes konstant sind, und ist in der Richtung wachsender Funktionswerte des Skalarfeldes orientiert. Der Betrag des Gradienten stimmt mit der Richtungsableitung der Funktion des Skalarfeldes in Normalenrichtung überein.

Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, dann ist der Gradient an der Stelle x wie folgt definiert:

$$\nabla f(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}^T$$

3 Lösung des Beispiels

Gegeben ist:

$$f(x,y,z) = x^2 \cdot \sin(yz) - y^2 \cdot \cos(yz)$$

Wir bilden nun die drei partiellen Ableitungen, welche wir für den Gradienten benötigen:

$$f_x = 2 \cdot x \cdot \sin(yz)$$
$$f_y = x^2 \cdot \cos(yz) \cdot z - 2 \cdot y \cdot \cos(yz) + y^2 \cdot \sin(yz) \cdot z$$
$$f_z = x^2 \cdot \cos(yz) \cdot y + y^2 \cdot \sin(yz) + y = x^2 \cdot \cos(yz) \cdot y + y^3 \cdot \sin(yz)$$

Nun bilden wir den Gradienten (einsetzen der Werte):

$$grad f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ \frac{\pi^2}{8} \\ \frac{\pi^2}{4^3} \end{pmatrix}$$

Nun Errechnen wir den Betrag vom Gradienten und erhalten auf diese Weise annähernd die maximale Änderung:

$$|grad f| = \sqrt{8^2 + \left(\frac{\pi^2}{8}\right)^2 + \left(\frac{\pi^2}{4^3}\right)^2}$$