41. Man bestimme die partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y'+y\cdot\cos x=\sin x\cdot\cos x$ zur Anfangsbedingung $y(0)=1$.

zu erst bestimmen wir wieder die **homogene Gleichung:** $y'+y\cdot\cos x=0$

$$y'+y\cdot\cos x=0$$
$$y'=-y\cdot\cos x$$
$$\frac{y'}{y}=-\cos x \;\Big|\; \int$$
$$\ln|x|=-\sin x+\ln c \Rightarrow \text{entlogarithmieren}$$
$$x=e^{-\sin x}\cdot C$$

FEHLERHAFT!!!!

also lautet die **homogene Gleichung:** $y_h(x)=e^{-\sin x}\cdot C$

nun geht es weiter mit der inhomogenen Gleichung: $y'+y\cdot\cos x=\sin x\cdot\cos x$
für die partikuläre Lösung verwenden wir wieder die Methode „Variation der Konstanten" $c\to c(x)$, also $y_h(x)=e^{-\sin x}\cdot C \Rightarrow y_p(x)=e^{-\sin x}\cdot C(x)$
jetzt müssen wir in unsere inhomogene Gleichung einsetzen (Achtung Kettenregel bei C(x)):

$$\left(C'(x)\cdot e^{-\sin x}\cdot 1\right)+\left(C(x)\cdot e^{-\sin x}\cdot(-\cos x)\right)+\left(e^{-\sin x}\cdot C(x)\right)\cdot\cos x=\sin x\cdot\cos x$$
$$C'(x)\cdot e^{-\sin x}=\sin x\cdot\cos x$$
$$C'(x)=\sin x\cdot\cos x\cdot e^{+\sin x} \;\Big|\; \int$$
$$C(x)=(\sin x-1)\cdot e^{\sin x}$$

Integral[u*v'] dx = u*v - Integral[u'*v] dx
für die partielle integration sinx als u(x) und cosx * e^(sinx) als v'(x) wählen.
mit dieser wahl lassen sich u'(x) und v(x) leicht bestimmen, und zwar:

u(x) = sinx -> u'(x) = cosx
v'(x) = cosx * e^(sinx) -> v(x) = e^(sinx)
[da bei der ableitung von e^(sinx) im zuge der kettenregel, also innere ableitung mal der äußeren, cosx*e^(sinx) rauskommt

Integral[u*v'] dx = u*v - Integral[u'*v] dx

Integral[sinx * cosx * e^(sinx)] dx = sinx*e^(sinx) - Integral[cosx*e^(sinx)] dx (= Integral[v'(x)])

Integral[sinx * cosx * e^(sinx)] dx = sinx*e^(sinx) - e^(sinx)
Integral[sinx * cosx * e^(sinx)] dx = e^(sinx)*(sinx - 1)

c(x) = e^(sinx)*(sinx - 1)

nun in die **partikuläre Lösung** einsetzen:

$$y_p(x)=e^{-\sin x}\cdot C(x) \Rightarrow y_p(x)=e^{-\sin x}\cdot(\sin x-1)\cdot e^{\sin x}=\sin x-1$$

am Ende noch die homogene und die partikuläre Lösung zur **allgemeinen Lösung** zusammenfassen:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \Rightarrow y(x) = e^{-\sin x} \cdot C + \sin x - 1$$

nun müssen wir auch noch unsere Anfangsbedingung $y(0) = 1$ einsetzen:

$$y(0) = 1 = e^{-\sin 0} \cdot C + \sin 0 - 1 = e^{-0} \cdot C + 0 - 1$$

$$1 = C - 1 \Rightarrow C = 2$$

also sieht unsere spezielle Lösung so aus: $y(x) = 2 \cdot e^{-\sin x} + \sin x - 1$