45. Gesucht ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y''-y'-2y=x$.

Hier handelt es sich um eine lineare inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten: $y''+ay'+by=s(x)$, wobei a und b konstante Koeffizienten sind.

Für die allgemeine Lösung $y(x)$ gilt: $y(x)=y_h(x)+y_p(x)$, wobei $y_h(x)$ die allgemeine Lösung der zugehörigen inhomogenen Gleichung ist und $y_p(x)$ die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist.

Für die homogene Gleichung $y_h(x)$ nehmen wir den Exponentialansatz: $y(x)=e^{\lambda x}$ durch einsetzen in die allgemein Form $y''+ay'+by=0$ erhält man $\lambda^2 e^{\lambda x}+a\lambda e^{\lambda x}+be^{\lambda x}=0$ und die charakteristische Gleichung lautet $\lambda^2+a\lambda+b=0$

sind λ_1, λ_2 die Lösungen der charakteristischen Gleichung $\lambda^2+a\lambda+b=0$, dann lautet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(x)=\begin{cases} c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x} & \lambda_1,\lambda_2 \text{ reell}, \lambda_1\neq\lambda_2 \\ e^{\alpha x}\left(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x\right) & {}_1\lambda_2=\alpha\pm i\beta \text{ konjungiert komplex} \\ \left(c_1+c_2x\right)e^{\lambda_1 x} & \lambda_1=\lambda_2 \text{ reell} \end{cases}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Unsere Gleichung: $y''-y'-2y=x$

1. Homogene Gleichung $y_h(x)$: $y''-y'-2y=0$

charakteristische Gleichung: $\lambda^2+\lambda-2=0 \Rightarrow$

$${}_1\lambda_2=+\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1+8}{4}}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}\Rightarrow\lambda_1=-\frac{2}{2}=-1,\ \lambda_2=\frac{4}{2}=2$$

es trifft der erste Ansatz der allgemeinen Lösung zu:

$y_h(x)=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$, wobei λ_1,λ_2 reell, $\lambda_1\neq\lambda_2$ gilt, also einsetzen und die **homogene Gleichung** lautet: $y_h(x)=c_1e^{-1x}+c_2e^{+2x}$

2. partikuläre Lösung $y_p(x)$: hier verwenden wir die Methode des unbestimmten Ansatzes: die Störfunktion hat folgende Form $s(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_kx^k$ oder $s(x)=\left(a_0+a_1x+\ldots+a_kx^k\right)e^{\mu x}$, dann nehmen wir als Versuchslösung $y_p(x)=\left(A_0+A_1x+\ldots+A_kx^k\right)e^{\mu x}$ mit unbestimmten Koeffizienten $A_0,\ldots,A_k$

unsere Störfunktion lautet ganz einfach nur $s(x)=x$

in die Form eines Ansatze gebracht: $s(x)=a_0+a_1x \Rightarrow$ daraus kann man ganz leicht ablesen: $a_0=0$, $a_1=1$, $\mu=0$

unsere **Versuchslösung** lautet also: $y_p(x)=A_0+A_1x$

jetzt brauchen wir noch die Ableitungen, damit wir in unsere Gleichung einsetzen können: $y_p(x) = A_0 + A_1 x \Rightarrow y_p'(x) = A_1 \Rightarrow y_p''(x) = 0$

so nun in die ursprüngliche Gleichung $y'' - y' - 2y = x$ einsetzen:

$$0 - A_1 - 2(A_0 + A_1 x) = x$$

$$-A_1 - 2A_0 - 2A_1 x = x$$

Koeffizientenvergleich:

linear: $x^1 : -2A_1 x = x \Rightarrow A_1 = -\frac{1}{2}$

konstant: $x^0 : -A_1 - 2A_0 = 0 \Rightarrow -\left(-\frac{1}{2}\right) - 2A_0 = 0 \Rightarrow -2A_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$$A_0 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = +\frac{1}{4}$$

also lautet unsere **partikuläre Lösung:** $y_p(x) = +\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x$

nun können wir die **allgemeine Lösung** $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ bilden:

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x$$