Aufgabe 1

Die folgenden Daten sind Beobachtungen einer stochastischen Größe:

$$0.7 \quad -6.0 \quad 9.0 \quad -5.6 \quad 9.6 \quad -4.4 \quad 4.1 \quad -0.1 \quad 1.1 \quad -1.0$$

[2] (a) Zeichnen Sie die empirische Verteilungsfunktion $\widehat{F}$ und bestimmen Sie (grafisch) das 3. Quartil (Typ 1).

[2] (b) Bestimmen Sie $\overline{x}$, s^2 und s.

[1] (c) Bestimmen Sie den Median und den MAD.

Aufgabe 2

Die folgenden (bereits geordneten) Daten sind CPU–Zeiten (in Sek) von $n = 30$ Jobs:

9	15	19	22	24	25	30	34	35	35
36	36	37	38	42	43	46	48	54	55
56	56	59	62	69	70	82	82	89	139

[1] (a) Bestimmen Sie den Median und die Hinges.

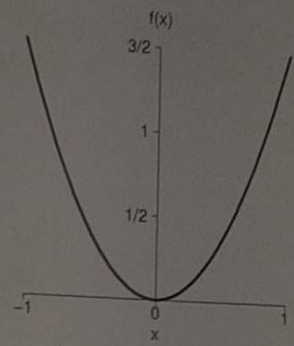
[1] (b) Bestimmen Sie auf Basis der Hinges die Fences. (Skriptum S. 27)

[3] (c) Bestimmen und zeichnen Sie den Boxplot. (Gibt es Ausreißer?)

Aufgabe 3

Die Dichte einer sG X lautet wie folgt:

$$f(x) = \begin{cases} Cx^2 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



[1] (a) Bestimmen Sie die Konstante C.

[1] (b) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

[2] (c) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X (plus Skizze).

[1] (d) Wie kann man auf Basis von $U \sim U(0,1)$ Beobachtungen von X generieren?

Aufgabe 4

Ein System besteht aus drei hintereinander geschalteten Komponenten. Die Lebensdauern X_i, $i = 1, 2, 3$, der Komponenten folgen unabhängigen Exponentialverteilungen mit den Mittelwerten $\tau_1 = 3$ [h], $\tau_2 = \tau_3 = 4$ [h]. Bestimmen Sie für die Lebensdauer X des Systems:

[2] (a) die Verteilungsfunktion.

[1] (b) die Dichte. (Um welche Verteilung handelt es sich?)

[1] (c) den Erwartungswert und die Streuung.

[1] (d) die Wahrscheinlichkeit, dass das System länger als 3 Stunden intakt ist.

Aufgabe 5

[1] (a) Die sG X habe die Dichte $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$. Wie lautet die Dichte von $Y = \sqrt{X}$?

[1] (b) Die gemeinsame Dichte von X und Y sei gegeben durch:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy & 0 < x < 1,\ 0 < y < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wie lauten die Randdichten von X und Y? Sind X und Y unabhängig?

[1] (c) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ seien iid $\mathsf{U}(0,1)$. Dann ist die Verteilungsfunktion des Maximums der sGn gegeben durch:

☐ $(1-x)^n$ ☐ x^n ☐ $1 - x^n$ ☐ $1 - (1-x)^n$

[1] (d) X und Y seien zwei unabhängige, standardnormalverteilte sGn. Dann gilt:

$$Z = 4X - 6Y + 18 \sim N(\quad , \quad)$$

[1] (e) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sei eine Stichprobe aus einer Verteilung mit Mittelwert μ und Varianz σ^2. Für großes n gilt nach dem ZGVS für den Stichprobenmittelwert $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$:

☐ $\overline{X} \approx \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ ☐ $\overline{X} \approx \mathsf{N}(n\mu, n\sigma^2)$ ☐ $\overline{X} \approx \mathsf{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

Aufgabe 6

Die folgenden Beobachtungen stammen aus einer Poissonverteilung $\mathsf{P}(\lambda)$:

$$1 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 2 \quad 4 \quad 4$$

Bestimmen Sie:

[1] (a) den Momentenschätzwert von λ (mit Begründung).

[3] (b) den ML–Schätzwert von λ (mit Herleitung).

[1] (c) einen Schätzwert für $P(X > 2)$.

Aufgabe 7

Die Daten von Aufgabe 1 stammen aus einer Normalverteilung $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2.

[1] (a) Bestimmen Sie ein 95%–Konfidenzintervall für μ.

[2] (b) Bestimmen Sie 95%–Konfidenzintervalle für σ^2 und σ.

[2] (c) Läßt sich behaupten, dass der Mittelwert größer als Null ist? Testen Sie dazu die folgenden Hypothesen (zum Niveau $\alpha = 5\%$):

$$\mathcal{H}_0 : \mu = 0 \quad \text{gegen} \quad \mathcal{H}_1 : \mu > 0$$

Aufgabe 8

Die folgenden (der Größe nach geordneten) 30 Zahlen wurden mit dem R–Command `round(sort(runif(30)), 4)` erzeugt:

0.0157	0.0227	0.0339	0.0568	0.0724	0.0792	0.1801	0.1869	0.2223	0.2416
0.2481	0.2496	0.2859	0.3370	0.3608	0.3648	0.4129	0.4202	0.4912	0.5510
0.5577	0.6640	0.6885	0.7132	0.8064	0.8486	0.8547	0.8760	0.9395	0.9771

[2] (a) Stammen die Daten aus einer $\mathsf{U}(0,1)$–Verteilung? Nehmen Sie den Chiquadrat–Anpassungstest (mit $\alpha = 5\%$) und die Klasseneinteilung:

$$[0, 0.2),\ [0.2, 0.4),\ \ldots,\ [0.8, 1]$$

[1] (b) Der p–Wert des obigen Tests beträgt 0.558. Wie wird dieser Wert berechnet?

[2] (c) R–Code zum obigen Test?