

# Beispiel 443 (MA1 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 4, 05.04.

Markus Nemetz, [markus.nemetz@tuwien.ac.at](mailto:markus.nemetz@tuwien.ac.at), TU Wien, 03/2006

## 1 Angabe

Berechnen Sie  $\int_2^3 x^2 dx$  mit Hilfe von Untersummen bei äquidistanter Teilung. (Hinweis:  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$ ,  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ ).

## 2 Lösung des Beispiels

Betrachten wird die äquidistante Teilung: Wenn wir das Intervall  $[2; 3]$  in  $n$  gleiche Teile teilen, erhalten wir als Grenzen  $x_i = 2 + \frac{i}{n}$  für alle  $i$  von 0 bis  $n$  ( $x_0$  ist also 2,  $x_n$  ist 3) Nun benötigen wir die Untersummen: da die Funktion  $x^2$  im ersten Quadranten steigend ist, ist bei dem Intervall von  $x_i$  bis  $x_{i+1}$  der kleinere Funktionswert bei  $x_i$  (liegt weiter links) - somit ist der Flächeninhalt von einem solchen 'untergeschriebenen' Rechteck:

$$\underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{Länge des Intervalls}} \cdot \left(2 + \frac{i}{n}\right)^2$$

Nun berechnet man die Summe über alle solchen Rechtecke: das erste Rechteck geht von  $x_0$  bis  $x_1$ : also müssen wir bei  $i = 0$  anfangen; das letzte Rechteck geht von  $x_{n-1}$  bis  $x_n$ , also müssen wir bei  $i = n - 1$  aufhören:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \left(2 + \frac{i}{n}\right)^2$$

Da  $\frac{1}{n}$  für alle Summanden ein konstanter Faktor ist, kommt er vor die Summe. Außerdem quadrieren wir die Klammer aus:

$$\frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} 4 + \frac{4i}{n} + \frac{i^2}{n^2}\right)$$

Die Summe können wir nun in drei Summen aufteilen:

$$\frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} 4 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{4i}{n} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i^2}{n^2}\right)$$

Bei der ersten Summe wird  $n$  mal (nämlich von 0 bis  $n - 1$ ) die 4 aufsummiert, also ist es  $4 \cdot n$ . Bei der zweiten Summe können wir  $\frac{4}{n}$  als konstanten Faktor herausnehmen; bei der dritten Summe nehmen wir  $\frac{1}{n^2}$  heraus:

$$\frac{1}{n} \cdot \left(4 \cdot n + \frac{4}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i + \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i^2\right)$$

Die Formeln für die Summen über  $i$  und für die Summe über  $i^2$  stehen bei der Angabe dabei, jedoch Vorsicht: Wir summieren nur bis  $n-1$ , nicht bis  $n$ ! Dass wir bei 0 beginnen ist egal, da bei  $i = 0$  sowieso der Summand 0 ist.

$$\frac{1}{n} \cdot \left( 4n + \frac{4}{n} \cdot (n-1) \cdot \frac{n}{2} + \frac{1}{n^2} \cdot (n-1) \cdot n \cdot \frac{2n-1}{6} \right)$$

$\frac{1}{n}$  multiplizieren wir nun in die Klammer hinein und kürzen:

$$4 + 2 \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{1}{6} \cdot \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \cdot \left( 2 - \frac{1}{n} \right)$$

Diese Formel ist nun der Flächeninhalt über Untersummen bei Teilung in  $n$  gleich große Intervalle. Wenn man nun das Integral haben möchte, lässt man die Anzahl der Intervalle gegen unendlich gehen, d.h. wir bilden den Grenzwert für  $n$  gegen unendlich:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4 + 2 \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{1}{6} \cdot \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \cdot \left( 2 - \frac{1}{n} \right)$$

4 geht nach 4,  $\frac{1}{n}$  geht nach 0, d.h.  $\left( 1 - \frac{1}{n} \right)$  geht nach 1 und  $2 \cdot \left( 1 - \frac{1}{n} \right)$  geht nach 2,  $\left( 1 - \frac{1}{n} \right)$  geht nach 1 und  $\left( 2 - \frac{1}{n} \right)$  geht nach 2, d.h.  $\frac{1}{6} \cdot \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \cdot \left( 2 - \frac{1}{n} \right)$  geht nach  $\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3}$ .

Das heisst, der Grenzwert und somit auch das Ergebnis für das Integral ist:  $6\frac{1}{3}$