Runde 3, Beispiel 18

LVA 118.181, Übungsrunde 3, 03.11.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 01.11.2006, 06.12.

1 Angabe

Gegeben sei das AWP $y' = x - y, y(0) = 1$. Man berechne die exakte Lösung und ermittle anschliessend, wie gross n mindestens gewählt werden muss, damit beim Euler-Verfahren der relative Fehler für $y(x)$ an der Stelle $x = 1$ maximal 15% beträgt.

2 Theoretische Grundlagen: Euler-Verfahren

Das Euler-Verfahren ist ein numerisches Vefahren zur Lösung von Anfangswertproblemen. Die Idee ist, denn Differentialquotienten $y' = \frac{\partial y}{\partial x}$ durch den Differenzenquotienten $\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y(x+h)-y(x)}{h}$ zu ersetzen (h ist die Schrittweite):

$$f(x, y(x)) = y'(x) = \frac{\partial y}{\partial x} \approx \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

Die Auflösung nach $y(x+h)$ ergibt

$$y(x+h) \approx y(x) + hf(x, y(x))$$

Wenn wir nun den bekannten Anfangswerk $y_0 = y(x_0)$, eine kleine Schrittweite h wählen und $x = x_0$ und $y = y_0$ setzen, erhalten wir mit y_1 eine Näherung für den exakten Wert $y(x_0 + h)$:

$$y(x_1) = y(x_0 + h) \approx y_0 + fh(x_0, y_0) =: y_1$$

Daraus können wir y_2 errrechnen usw. worazs such folgende allgemeine Formel ergibt:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

3 Lösung des Beispiels

$y' = x - y$ wird nach folgender Formel aufgelöst (Lineare inhomogene Differentialgleichungen 1. Ordnung in der Form $y' + p(x)y = r$ (r ist Störfunktion, singulär oder nur von x abhängig)):

$$h = \int p(x)\ dx$$

$$y(x) = e^{-h}(\int e^h r\ dx + c)$$

(Quelle: Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 9.Aufl., S.26ff.)

$$p = 1, \qquad r = y, \qquad h = \int p \ dx = x$$

$$y(x) = e^{-x} \cdot (\int e^x \cdot x + c)$$

$$\int u \cdot v' \ dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \ dx$$

$$u = x, u' = 1, \qquad v' = e^x, v = e^x$$

$$\Rightarrow \qquad \int e^x \cdot x \ dx = x \cdot e^x - \int e^x \ dx = x \cdot e^x - e^x$$

$$\Rightarrow \qquad y(x) = e^{-x} \cdot (x \cdot e^x - e^x + c) = x - 1 + c \cdot e^{-x}$$

Lösung des AWP $y(0) = 1$ ergibt für $c = 2$ und die spezielle Lösung

$$y(x) = x - 1 + 2 \cdot e^{-x}$$

Zum Euler-Cauchy-Verfahren:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot \underbrace{F(x_k, y_k, h)}_{f(x_k, y_k) = x_k 0 y_k}$$

$$h = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1 - 0}{h} \text{ Schrittweite } \frac{1}{h}$$

$$\text{Stuetzstellen } x_k = x_0 + kh$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{h}(\underbrace{x_0}_{0} + k \underbrace{h}_{\frac{1}{h}} - y_k) \ \Rightarrow \ y_{k+1} = y_k + \frac{1}{h^2}k - \frac{1}{h}y_k$$

$$y_{k+1} = y_k(1 - \frac{1}{h}) + k\frac{1}{h^2}$$

$$\Rightarrow \text{Allgemeine Formel (Maple):}$$

$$y_k = \underbrace{y(0)}_{1} \cdot (1 - \frac{1}{h})^k + (1 - \frac{1}{h})^k + \frac{k+1}{h} - \frac{1+h}{h}$$

$$y_k = 2(1 - \frac{1}{h})^k$$

Exakter Wert: $y(1) = 0.7358$.
Relativer Fehler: $y_{\text{exakt}} - 2(1 - \frac{1}{h})^k = 0.15$ (15%). Ergibt besten Wert für $h = 3.76$ (4).