Runde 5, Beispiel 35

LVA 118.181, Übungsrunde 5, 17.11.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 15.11.2006

1 Angabe

Man löse das AWP

$$y'' - 3y' + 2y = 6e^{-x}, \qquad y(0) = 9, y'(0) = 6$$

(a) mittels Ansatzmethode,
(b) mittels Laplace-Transformation

2 Theoretische Grundlagen: Anfangswertprobleme mit der Laplace-Transformation lösen

Wir betrachten folgendes AWP:

$$y'' + ay' + by = r(t), \qquad y(0) = K_0,\ y'(0) = K_1, \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

$r(t)$ (Störfunktion) ist der gegebene Input (z.B. in mechanischen oder elektrischen Systemen) und $y(t)$ ist der Output (aus dem Input resultierend).

2.1 Formel aus Kreyszig, 'Advanced Engeneering Mathematics'

Drei Schritte sind zur Lösung mit der $\mathcal{L}$-Transformation durchzuführen:

2.1.1 Aufstellen der subsidiären Gleichung

$Y = \mathcal{L}(y)$ erhalten wir durch die Transformierung der gegebenen Gleichun unter berücksichtigung von

1. $\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0)$,
2. $\mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0)$,

was folgende Gleichung ergibt:

$$[s^2Y - sy(0) - y'(0)] + a[sY - y(0)] + bY = R(s), \qquad R(s) = \mathcal{L}(r)$$

Nach Zusammenfassung der Y-Terme erhalten wir:

$$(s^2 + as + b)Y = (s + a)y(0) + y'(0) + R(s)$$

2.1.2 Lösung der subsidiären Gleichung durch die sog. Transfer-Funktion $Q(s)$ (oft auch $H(s)$ genannt)

$$Q(s) = \frac{1}{s^2 + as + b} = \frac{1}{(s + \frac{1}{2}a)^2 + b - \frac{1}{4}a^2}$$
$$\mathbf{Y(s) = [(s + a)y(0) + y'(0)]Q(s) + R(s)Q(s)} \qquad (\blacksquare)$$

Wenn $y(0) = y'(0) = 0$ gilt, dan ist $y = RQ$, was wiederum bedeutet:

$$Q = \frac{Y}{R} = \frac{\mathcal{L}(\text{Input})}{\mathcal{L}(\text{Output})}$$

Beachten: Q hängt nicht von $r(t)$ und auch nicht von $y(0)$ und $y'(0)$ ab, sondern nur von den Koeffizienten a und b.

2.1.3 Umkehrung von Y zur Erhaltung von $y = \mathcal{L}^{-1}(Y)$

Berechnung von $y = \mathcal{L}^{-1}(Y)$.

2.2 Formel aus Vachenauer, 'Höhere Mathematik 2'

Für $Y = \mathcal{L}(y)$ gilt:

$$(s^2Y - sK_0 - K_1) + a(Y - K_0) + bY = F(s)$$

Die Lösung ist

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 + as + b} + \frac{sK_0 + aK_0 + K_1}{s^2 + as + b}$$

Danach Rücktransformation $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s))$.

3 Lösung des Beispiels

$$y'' - 3y' + 2y = 6e^{-x}, \qquad y(0) = 9, y'(0) = 6$$

3.1 Ansatzmethode

3.2 Laplace-Transformation

Ich setzte sogleich in die Formel (■) ein:

$$Y(s) = [(s-3)(-9)+6]Q(s) + \underbrace{\frac{6}{1+s}}_{\square} Q(s)$$

$$\square\ \mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{1+s}$$

$$Y(s) = (-9s+33)Q(s) + \frac{6}{1+s}Q(s)$$

$$Q(s) = \frac{1}{(s-\frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}}$$

Nach Einsatz von MATLAB (s.u.) erhalte ich:

$$\mathbf{y = 17e^{2x} - 27e^{x} + e^{-x}}$$

Der komplette Rechenweg:

$$(s^2Y - s(-9) - 6) - 3(sY - (-9)) + 2Y = \frac{6}{s+1}$$

$$s^2Y + 9s - 6 - 3sY - 27 + 2Y = \frac{6}{s+1}$$

$$\vdots$$

$$Y = \frac{-9s^2+24s+39}{(s+1)(s-1)(s-2)}$$

Mit Hilfe von Partialbruchzerlegung umformen, und anschließend $\mathcal{L}$-Transformation durchführen:

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{27}{s-1} + \frac{17}{s-2} \Rightarrow y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = e^{-x} - 27e^{x} + 17e^{2x}$$

Zur Berechnung mit MATLAB (Symbolic Toolbox muss vorhanden sein):

Listing 1: L-Transformation mit MATLAB

```
syms s;
syms z;
a=-3;
b=2;
r=6*exp(-1*z);
rL=laplace(r);
K1=6;
K2=-9;
Q=(s^2+a*s+b)^(-1);
Y=((s+a)*K2 + K1)*Q + rL*Q;
y=ilaplace(Y)
    y =

    -27*exp(t)+17*exp(2*t)+exp(-t)
```

3.3 Ansatzmethode

Die Auflösung des charakteristischen Polynoms der zugehörigen homogenen Gleichung:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}}$$
$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1$$
$$\mathbf{y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x}}$$

Vorbereiten den Ansatzes, Einsetzen und Berechnung der partikulären Lösung:

$$y_p(x) = Ae^{-x},\ y_p'(x) = -Ae^{-x},\ y_p''(x) = Ae^{-x}$$
$$Ae^{-x} + 3Ae^{-x} + 2Ae^{-x} = 6e^{-x} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{A = 1}$$

Allgemeine Lösung lautet somit:

$$\mathbf{y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} + e^{-x}}$$

Die spezielle Lösung:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} + e^{-x}$$
$$y' = 2c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} - e^{-x}$$
$$\text{Einsetzen der Anfangswerte}$$
$$I:\ c_1 + c_2 + 1 = -9$$
$$II:\ 2c_1 + c_2 - 1 = 6 \qquad \Rightarrow \qquad c_2 = -2c_1 + 7 \qquad \text{(Einsetzen in I)}$$
$$c_1 + 7 - 2c_1 + 1 = -9 \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = 17 \qquad \Rightarrow \qquad c_2 = 27$$
$$\mathbf{y = 17e^{2x} - 27e^{x} + e^{-x}}$$