# Beispiel 17 (MA2 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 5, 27.04.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 04/2006

## 1 Angabe

Man prüfe nach, ob die gemischten partiellen Ableitungen $f_{xy}$ und $f_{yx}$ für die folgenden Funktionen übereinstimmen:

$$\text{(a)}\quad f(x,y) = \frac{x^2}{1+y^2}$$

$$\text{(b)}\quad f(x,y) = x^3 e^{y^2}$$

$$\text{(c)}\quad f(x,y) = \sqrt{xy^3}$$

## 2 Theoretische Grundlagen

### 2.1 Partielle Ableitungen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. $f : D \to \mathbb{R}$ und $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$. Existiert die Ableitung der 'partiellen' Funktion

$$x \mapsto (a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

an der Stelle $x_i = a_i$, so nennt man diese die **partielle Ableitung von f nach $\mathbf{x_i}$ im Punkte a**: sie wird mit

$$\frac{\delta f(x)}{\delta x_i}|_{x=a} \qquad \text{oder} \qquad \frac{\delta f}{\delta x_i}(a)$$

bezeichnet. Das Zeichen '$\delta$' anstelle von '$d$' soll verdeutlichen, dass von einer Funktion mit mehreren Variablen das Änderungsverhalten bezüglich einer Veränderlichen untersucht wird, wobei für das Differenzieren die anderen Ableitungen als Konstanten anzusehen sind.

Für die partiellen Ableitungen sind ebendalls die Bezeichnungen $f_{x_i}$ üblich bzw. $f_x, f_y, f_z, f_t, \ldots,$ wenn Variablen $x, y, z, t, \ldots$ lauten. Dementsprechend schreibt man für die höheren Ableitungen:

$$f_{xx} = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}, \qquad f_{xy} = f(_x)_y = \frac{\delta}{\delta y}(\frac{\delta}{\delta x}) \qquad \text{usw.}$$

### 2.2 Satz von Schwarz über die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen

Der Satz von Schwarz besagt, dass für zweimal stetig differenzierbare Funktionen die Reihenfolge der partiellen Differentiation nicht entscheidend für das Ergebnis ist. Tatsächlich sagt er noch mehr aus, weil er aus der Existenz der ersten partiellen Ableitungen und einer partiellen zweiten Ableitung die Existenz und den Wert einer anderen partiellen zweiten Ableitung herleitet.
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offene Menge und $f : U \to \mathbb{R}$ einmal stetig differenzierbare Funktion in den zwei Variablen $x, y$. Wenn die eine zweite partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ existiert und stetig ist, dann existiert auch die andere zweite partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, diese ist stetig und es gilt: :$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$.
Insbesondere ist $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, also 2mal stetig differenzierbar.
Oft werden die Klammern weggelassen und man schreibt kürzer: :$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ oder auch $f_{xy} = f_{yx}$.

## 3 Lösung des Beispiels

### 3.1 Beispiel a

$$f(x, y) = \frac{x^2}{1 + y^2} = x^2 \cdot \frac{1}{1 + y^2}$$

Zunächst die Ableitung nach $x$:

$$f_x = 2x \cdot \frac{1}{1 + y^2}$$

Nun die Ableitung nach $y$ (Quotientenregel!):

$$f_y = x^2 \cdot \frac{0 \cdot (1 + y^2) -\dot{} \, 2y}{(1 + y^2)^2} = x^2 \cdot \frac{-2y}{(1 + y^2)^2}$$

Nun die gemischte partielle Ableitung $f_{xy}$ (Quotientenregel!):

$$f_{xy} = 2x \cdot \frac{0 \cdot (1 + y^2) -\dot{} \, 2y}{(1 + y^2)^2} = \frac{-4xy}{(1 + y^2)^2}$$

Zum Schluss die gemischte partielle Ableitung $f_{yx}$:

$$f_{yx} = 2x \cdot \frac{-2y}{(1 + y^2)^2} = \frac{-4xy}{(1 + y^2)^2}$$

Die beiden gemischten partiellen Ableitungen $f_{xy}$ und $f_{yx}$ sind somit gleich.

## 3.2 Beispiel b

$$f(x,y) = x^3 e^{y^2}$$

Zunächst die Ableitung nach $x$:

$$f_x = 3x^2 \cdot e^{y^2}$$

Nun die Ableitung nach $y$ (Kettenregel!):

$$f_y = x^3 \cdot e^{y^2} \cdot 2y$$

Nun die gemischte partielle Ableitung $f_{xy}$ (Kettenregel!):

$$f_{xy} = 3x^2 \cdot e^{y^2} \cdot 2y$$

Zum Schluss die gemischte partielle Ableitung $f_{yx}$:

$$f_{yx} = 3x^2 \cdot e^{y^2} \cdot 2y$$

Die beiden gemischten partiellen Ableitungen $f_{xy}$ und $f_{yx}$ sind somit gleich.

## 3.3 Beispiel c

$$f(x,y) = \sqrt{xy^3} = (xy^3)^{1/2} = x^{1/2} \cdot y^{3/2}$$

Zunächst die Ableitung nach $x$:

$$f_x = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} \cdot y^{3/2}$$

Nun die Ableitung nach $y$:

$$f_y = x^{1/2} \cdot \frac{3}{2} \cdot y^{1/2}$$

Nun die gemischte partielle Ableitung $f_{xy}$:

$$f_{xy} = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} \cdot \frac{3}{2} \cdot y^{1/2} = \frac{3}{4} \cdot x^{-1/2} \cdot y^{1/2}$$

Zum Schluss die gemischte partielle Ableitung $f_{yx}$:

$$f_{yx} = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} \cdot \frac{3}{2} \cdot y^{1/2} = \frac{3}{4} \cdot x^{-1/2} \cdot y^{1/2}$$

Die beiden gemischten partiellen Ableitungen $f_{xy}$ und $f_{yx}$ sind somit gleich.