Übungsblatt 4 für Mathematik 3 für InformatikerInnen

22.) Man suche mittels Potenzreihenansatz um $x = 0$ die Werte von λ, für welche die Differentialgleichung

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

polynomielle Lösungen besitzt.

Anmerkung: Es läßt sich zeigen (ist hier aber nicht verlangt), daß die Polynome darstellbar sind durch konstante Vielfache der Hermite-Polynome

$$y_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

23.) Man bestimme eine Lösungsbasis der folgenden Differentialgleichung über einen modifizierten Potenzreihenansatz um $x = 0$:

$$2(x^2 + x^3)y'' - (x - 3x^2)y' + y = 0.$$

24.) Die Legendre-Dgl. besitzt die Gestalt

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + m(m + 1)y = 0, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Wir betrachten im folgenden den Fall $m = 1$. Durch Nachrechnen bestätigt man sofort, daß $y(x) = x$ eine Lösung der Gleichung ist. Mittels Reduktionsansatz $y(x) = C(x)x$ reduziere man die Ordnung der Differentialgleichung und ermittle eine zweite, unabhängige Lösung der Differentialgleichung. Wie sieht die allgemeine Lösung der Differentialgleichung aus?

25.) Man betrachte die homogene Eulersche Dgl.

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0.$$

Mittels Ansatz $y(x) = x^r$ und Lösen der Indexgleichung (wie beim modifizierten Potenzreihenansatz) ermittle man eine Lösung $\varphi_1(x)$ der gegebenen Dgl.
Eine zweite, unabhängige Lösung $\varphi_2(x)$ bestimme man mittels Reduktionsansatz $y(x) = C(x)\varphi_1(x)$. Man überprüfe die Unabhängigkeit beider Lösungen durch Berechnung der Wronski-Determinante.

26.) Fortsetzung von Bsp. 25.) Man betrachte die inhomogene Eulersche Dgl.

$$x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x}.$$

Durch die Methode der Variation der Konstanten bestimme man die allgemeine Lösung dieser Dgl.
Hinweis: Aus Bsp. 25.) erhält man die Lösungsbasis $\{\frac{1}{x}, \frac{\ln x}{x}\}$.

27.) Man löse das Anfangswertproblem

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x}, \quad y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0.$$

28.) Man bestimme die allgemeine Lösung der Dgl.

$$y^{(4)} + 2y''' + 5y'' + 8y' + 4y = \cos x + 40e^x.$$