1) Man bestimme die Funktionalmatrix zu $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y}{x^2 z} \\ y^x z^2 \end{pmatrix}$$

(7 Punkte)

Lösung:

Wir setzen $f_1(x,y,z) = \frac{y}{x^2 \cdot z} = y \cdot x^{-2} \cdot z^{-1}$,

$f_2(x,y,z) = y^x \cdot z^2 = e^{x \cdot \ln y} \cdot z^2$ und berechnen die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = y \cdot z^{-1} \cdot (-2) x^{-3} = -\frac{2y}{x^3 \cdot z}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = x^{-2} \cdot z^{-1} = \frac{1}{x^2 \cdot z},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = y \cdot x^{-2} \cdot (-1) z^{-2} = -\frac{y}{x^2 \cdot z^2}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = \ln y \cdot e^{x \cdot \ln y} \cdot z^2 = y^x \cdot \ln y \cdot z^2,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = x \cdot \frac{1}{y} \cdot e^{x \cdot \ln y} \cdot z^2 = x \cdot y^{x-1} \cdot z^2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = e^{x \cdot \ln y} \cdot 2z = 2y^x \cdot z.$$

Also ist die Funktionalmatrix gegeben durch:

$$\underline{\underline{\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial (x,y,z)}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{-2y}{x^3 \cdot z} & \frac{1}{x^2 \cdot z} & \frac{-y}{x^2 \cdot z^2} \\ y^x \cdot \ln y \cdot z^2 & x \cdot y^{x-1} \cdot z^2 & 2y^x \cdot z \end{pmatrix}}},$$

Wobei $x \neq 0,\ y > 0,\ z \neq 0$ gelten muss.

2.) Für die Funktion

$$f(x,y) = (5x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2} \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}.$$

bestimme man die Tangentialebene an der Stelle (2,3)?

(7 Punkte)

<u>Lösung:</u> Die Formel aus dem Buch (S. 247) für die Tangentialebene der Funktion $f(x,y)$ im Punkt (x_0, y_0) lautet:

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0).$$

In unserem Fall ist $f(x,y) = (5x^2+y^2)\cdot e^{-x^2-y^2}$, $(x_0,y_0) = (2,3)$.

Wir berechnen also:

$$f_x = 10x\cdot e^{-x^2-y^2} + (5x^2+y^2)\cdot e^{-x^2-y^2}(-2x) =$$

$$= (10x - 10x^3 - 2xy^2)\cdot e^{-x^2-y^2},$$

$$f_x(2,3) = (10\cdot 2 - 10\cdot 8 - 2\cdot 2\cdot 9)\cdot e^{-4-9} = -96\cdot e^{-13},$$

$$f_y = 2y\cdot e^{-x^2-y^2} + (5x^2+y^2)\cdot e^{-x^2-y^2}\cdot(-2y) =$$

$$= (2y - 10x^2y - 2y^3)\cdot e^{-x^2-y^2},$$

$$f_y(2,3) = (2\cdot 3 - 10\cdot 4\cdot 3 - 2\cdot 27)\cdot e^{-4-9} = -168\cdot e^{-13},$$

und schließlich $f(2,3) = (5\cdot 4+9)\cdot e^{-13} = 29\cdot e^{-13}$.

Also lautet die Gleichung der Tangentialebene:

$$z = e^{-13}\cdot(29 - 96\cdot(x-2) - 168\cdot(y-3)) =$$

$$= e^{-13}\cdot(29 - 96x + 192 - 168y + 504),$$

Somit

$$\underline{\underline{z = e^{-13}\cdot(725 - 96x - 168y).}}$$

3) Man berechne folgendes uneigentliche Integral:

$$\int_0^\infty x \cdot e^{-3x^2}\, dx$$

Lösung: (6 Punkte)

Wir berechnen zuerst das unbestimmte Integral (d.h. die Stammfunktion) $\int x \cdot e^{-3x^2} dx$.
Die Substitution $x^2 = u$ liefert $2x\,dx = du$ und somit

$$\int x \cdot e^{-3x^2} dx = \frac{1}{2}\int e^{-3u} du = -\frac{1}{6} e^{-3u} + C =$$

$$= -\frac{1}{6} e^{-3x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Daraus folgt:

$$\int_0^\infty x \cdot e^{-3x^2} dx = \lim_{a\to\infty} \int_0^a x \cdot e^{-3x^2} dx =$$

$$= \lim_{a\to\infty} \left(-\frac{1}{6} e^{-3x^2}\right)\Big|_0^a = \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{6}e^{-3a^2} + \frac{1}{6}e^0\right) =$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\lim_{a\to\infty} e^{-3a^2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} e^{\lim_{a\to\infty}(-3a^2)} =$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\cdot e^{-\infty} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\cdot 0 = \frac{1}{6}$$