Folgen

Folge Anordnung reeller Zahlen

- konstante Folge
- arithmetische Folge: $a_n = a_0 + dn$
- geometrische Folge: $a_n = a_0\, q^n$
- rekursive Folge

fast alle alle bis auf endlich viele

ϵ-Umgebung

$U_\epsilon(a) = (a-\epsilon, a+\epsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \epsilon\}$

Grenzwert (auch Limes), reelle Zahl

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N(\epsilon)\colon |a_n - a| < \epsilon$

Besitzt eine Folge einen Grenzwert, so spricht man von **Konvergenz**, andernfalls von **Divergenz**.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ oder } a_n \longrightarrow a$$

Nullfolge Folge, die gegen 0 konvergiert

uneigentlich konvergent $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$

$\forall K > 0\, \exists N(K) \in \mathbb{N}\ \forall n > N(K) : a_n > K$

Häufungspunkt In jeder ϵ-Umgebung um a liegen unendlich viele Folgenglieder. Jeder Grenzwert ist auch ein Häufungspunkt.

Limes superior/inferior
größter/kleinster Häufungspunkt

Bei Konvergenz gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim \sup_{n\to\infty} a_n = \lim \inf_{n\to\infty} a_n$$

monoton fallend $a_{n+1} \le a_n$ (streng: $<$)

nach oben beschränkt

$$\exists S \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : a_n \le S$$

Supremum . . . kleinste obere Schranke
Infimum . . . größte untere Schranke

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Vollständigkeitssatz für $\mathbb{R}$

Jede nach oben (unten) beschränkte nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum (Infimum).

Hauptsatz über monotone Folgen
Eine monotone Folge ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

Rechenregeln für konvergente Folgen

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$
(ii) $\lim_{n\to\infty}(\lambda\, a_n) = \lambda a$ für $\lambda \in \mathbb{R}$
(iii) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$
(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$
falls $b_n \neq 0\, \forall n \in \mathbb{N}$ und $b \neq 0$

made by Gittenburg

Konvergenzuntersuchungen

Sandwich-Theorem
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$
$a_n \le c_n \le b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$

Satz von Bolzano-Weierstraß Jede beschränkte Folge enthält einen HP.

Cauchyfolge

$\forall \epsilon\ \exists N(\epsilon) : |a_n - a_m| < \epsilon\ \forall n, m > N(\epsilon)$

Cauchykriterium Eine reelle Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

Unendliche Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$

Partialsummenfolge
Unter dem **Grenzwert** oder der **Summe** einer Reihe versteht man den Grenzwert ihrer Partialsummenfolge.

$$n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

harmonische Reihe $\sum_{n\ge1} \frac{1}{n}$ ist divergent

geometrische Reihe $\sum_{n\ge0} q^n$

$|q| < 1$: konvergiert gegen $\frac{1}{1-q}$
$|q| \ge 1$: divergent

Teleskopsumme z.B. $\sum_{n\ge1} \frac{1}{n(n+1)}$

Konvergenzkriterien

Nullfolgenkriterium notwendig, aber nicht hinreichend: Die Folge der Summanden ist eine Nullfolge.

Cauchykriterium

$$\forall \epsilon > 0\, \exists N(\epsilon) : \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \epsilon\ \forall m \ge n > N(\epsilon)$$

Leibniz-Kriterium $\sum_{n\ge0}(-1)^n a_n$ falls $(a_n)_{n\ge0}$ = monoton fallende Nullfolge

absolut konvergent $\sum_{n\ge0} a_n$ falls $\sum_{n\ge0} |a_n|$ konvergent, ansonsten bedingt konvergent

Majorantenkriterium $\sum_n b_n$ konvergent und $|a_n| \le b_n$ für fast alle $n \Rightarrow \sum_n a_n$ absolut konvergent

Minorantenkriterium $\sum_n a_n$ divergent und $0 \le a_n \le b_n$ für fast alle $n \Rightarrow \sum_n b_n$ divergent

hyperharmonische Reihe $\sum_{n\ge1} \frac{1}{n^\alpha}$
konvergent für $\alpha > 1$,
divergent für $\alpha \le 1$

Wurzelkriterium

$\sqrt[n]{|a_n|} \le q < 1$ für fast alle n $\Rightarrow$ abs. konvergent, $\sqrt[n]{|a_n|} \ge 1$ für unendlich viele $\Rightarrow$ divergent

Quotientenkriterium

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q < 1$ für fast alle $n \Rightarrow$ abs. konvergent, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ge 1$ für fast alle $n \Rightarrow$ divergent

Cauchyprodukt
von $\sum_{n\ge0} a_n$ und $\sum_{n\ge0} b_n$:
$\sum_{n\ge0}(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k})$
Wenn beide Reihen absolut konvergent sind ist auch das Cauchyprodukt abs. konvergent.

Potenzreihe $\sum_{n\ge0} a_n(x-x_0)^n$
a_n . . . Koeffizienten
x_0 . . . Entwicklungspunkt

Landau-Symbole

Für $n \to \infty$

(i) $a_n = O(b_n)$
$\frac{a_n}{b_n} \le C > 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$
(ii) $a_n = o(b_n)$
$\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 0$
(iii) $a_n \sim b_n$ “asymptotisch gleich”
$\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$
(iv) $a_n = \Omega(b_n)$
$\frac{b_n}{a_n} \le C > 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$
(v) $a_n = \Theta(b_n)$
C_1 und C_2 positiv:
$C_1|b_n| \le |a_n| \le C_2|B_n|$
für fast alle $n \in \mathbb{N}$

Exp.funktion und Log

(i) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
(ii) $\ln(a^b) = b \ln a$
(iii) $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$
(iv) $e^x = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n$
(v) $e^x = \sum_{n\ge0} \frac{x^n}{n!}$
(vi) $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$

Winkelfunktionen

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Eulersche Formel

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

Eine Funktion heißt **stetig** an der Stelle x_0, wenn:

- $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$
- $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\epsilon)$: $(|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$