M_n … mittlere Anzahl von
Links-Rechts-Minima
in einem Datenfeld ($\hat{=}$ Zufallspermutation)
der Länge n

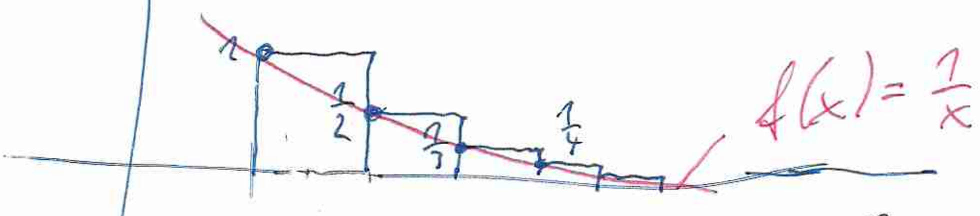
auch: M_n = mittl. Anzahl der <u>Zyklen</u> einer
Zufallspermutation der Länge n

es gilt: $M_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} =: H_n$

n-te harmonische Zahl
(n-te Partialsumme der
harmonischen Reihe)

1 … immer LR-Minimum
2 … Wahrsch. $= \frac{1}{2}$ (2 steht links von 1)
3 … Wahrsch. $= \frac{1}{3}$ (3 steht links von 1 und 2)
4 … Wahrsch $= \frac{1}{4}$ (4 steht links von 1, 2, 3)
⋮

$\Rightarrow M_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = H_n$



$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \approx \int_{1}^{n} \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$= \ln x \Big|_{1}^{n} = \ln n$$

Approximation

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \approx \ln n$$

es läßt sich zeigen (→ später, Integralrechnung):

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$$

asymptotisch gleich

$\Updownarrow$

---

sogar: $H_n = \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$ $\quad \Big| \quad \lim_{n \to \infty} \frac{H_n}{\ln n} = 1$

$$n! = n \cdot \underbrace{(n-1)}_{\leq n} \cdot \underbrace{(n-2)}_{\leq n} \cdot \ldots \cdot \underbrace{2}_{\leq n} \cdot \underbrace{1}_{\leq n}$$

$$\leq n^n$$

$$n! = O(n^n)$$

es läßt sich zeigen:

$$n! \approx \frac{n^n}{e^n} \cdot \sqrt{2\pi n}$$

Stirling-Formel

$$n! = \boxed{\Gamma(n+1)}$$

$$\Downarrow$$

$$n! = o(n^n)$$

Elementare Fkt.

Fkt.: $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

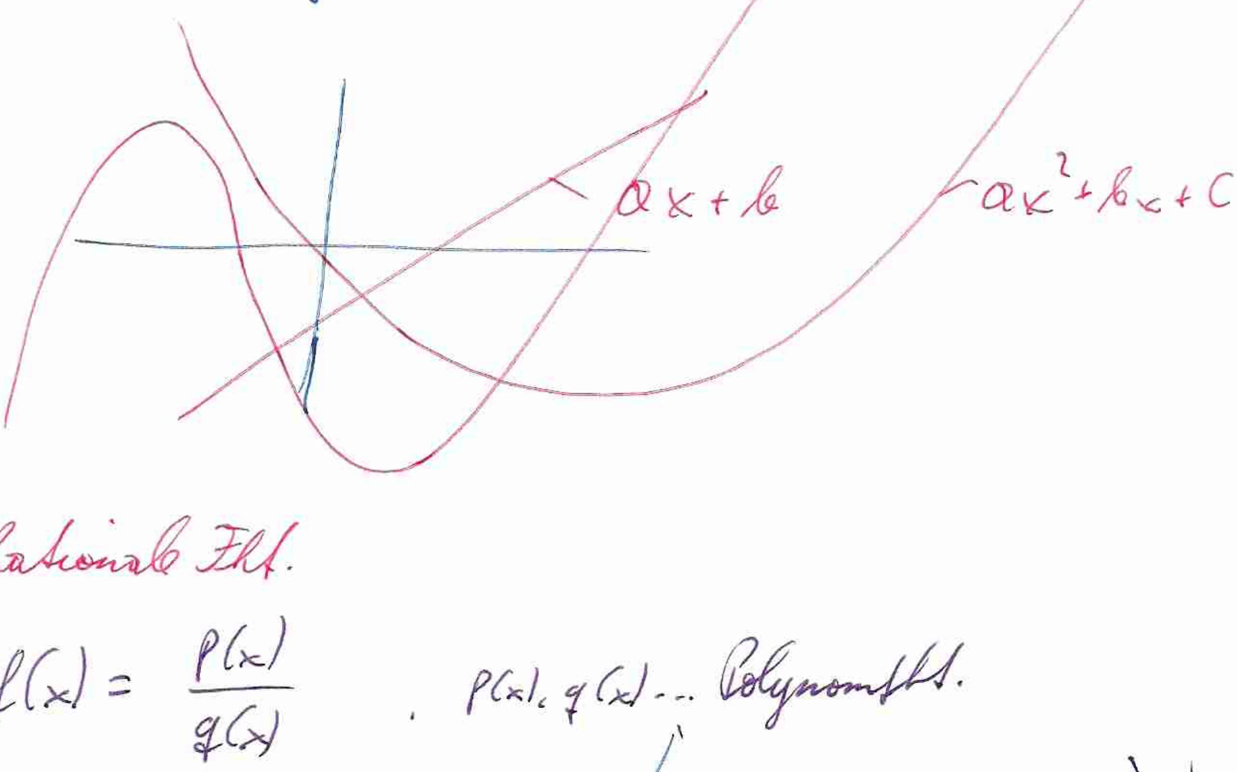
D … Definitionsbereich

Def.: Polynomfkt.

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 ,$$

$a_i \in \mathbb{R}$

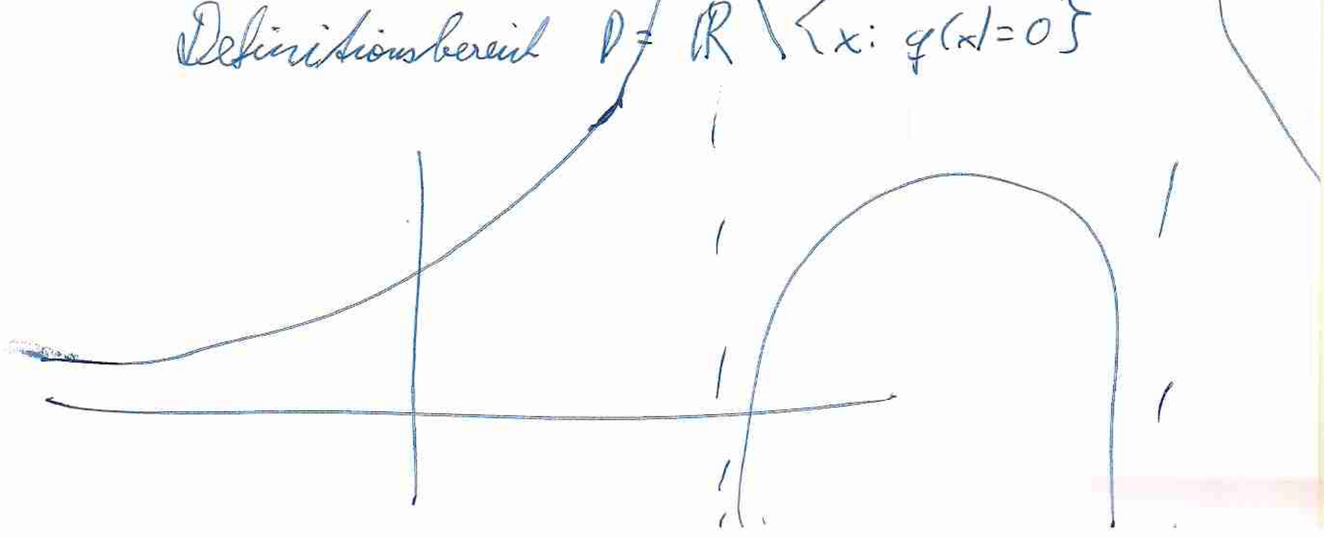
n … Grad des Polynoms



Def.: Rationale Fkt.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} , \quad p(x), q(x) \dots \text{Polynomfkt.}$$

Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{x : q(x) = 0\}$



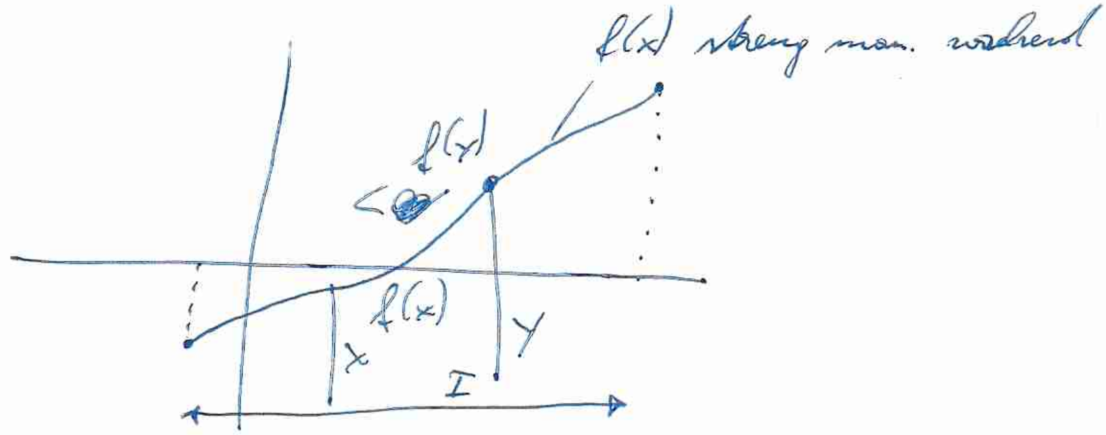
Def.: $f: D \to \mathbb{R}$ Funktion

$I \subseteq D$ ... Intervall

f auf I streng monoton wachsend

$\Updownarrow$

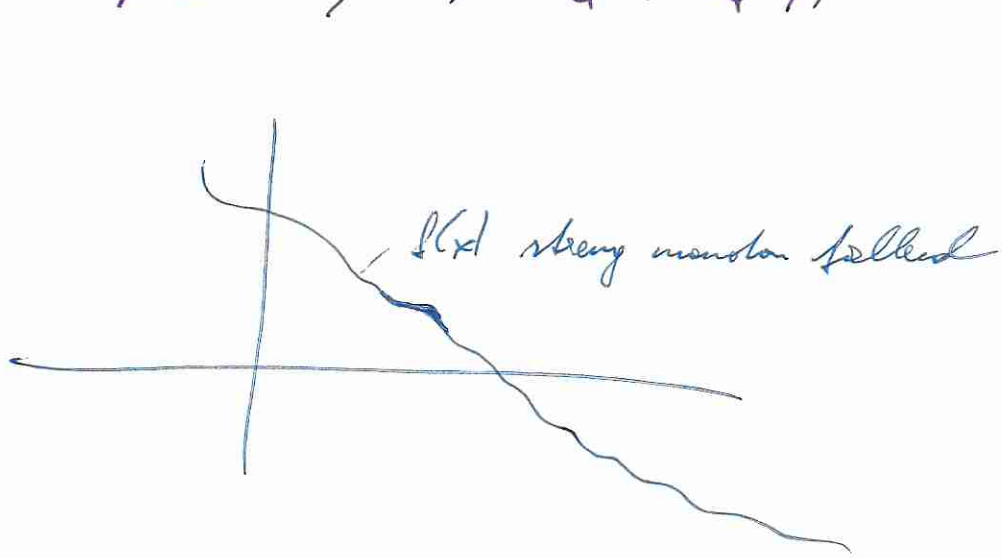
$x, y \in I$ und $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$



f auf I streng monoton fallend

$\Updownarrow$

$x, y \in I$ und $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$



Satz

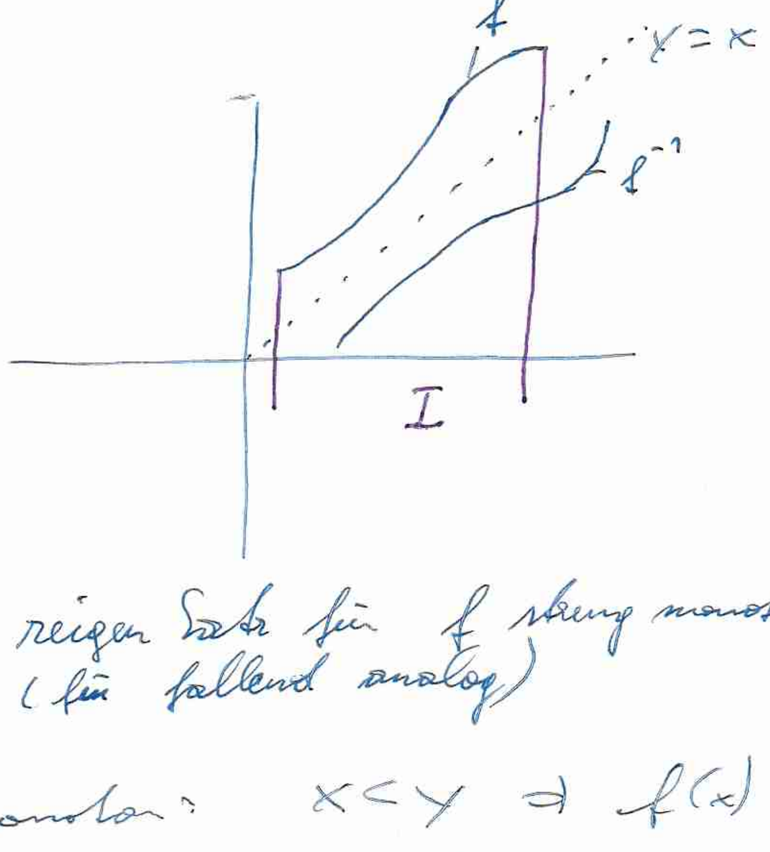
geg.: Fkt.: $f : I \to \overbrace{f(I)}^{\text{Bild von } I}$

<u>streng</u> monoton auf Intervall I

$\Rightarrow$ Fkt. $f : I \to f(I)$ ist <u>bijektiv</u>

$\Rightarrow$ <u>Umkehrfkt.</u> existiert

Umkehrfkt. monoton (so wie f).



Beweis zeigen Satz für f streng monoton wachsend (für fallend analog)

f monoton: $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

$\Rightarrow f$ <u>injektiv</u>

f <u>surjektiv</u>: trivial wg. Def.

$\Rightarrow f$ bijektiv

$\Rightarrow f^{-1} : f(I) \to I$ existiert

Umkehrfkt.

z.z.: f^{-1} monoton wachsend

z.z.: $x < y \Rightarrow f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$

$$\begin{array}{cc} f^{-1}(x) & f^{-1}(y) \\ \| & \| \\ u & v \\ \Downarrow & \Downarrow \\ x = f(u) & y = f(v) \end{array}$$

$f(u) < f(v)$

f str. monoton wachsend

$\Downarrow$

$u < v$

fertig!

Potenzieren und Wurzelziehen

n-te Potenz: $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ mal}} = x^n$$

Satz $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f_n(x) = x^n$,

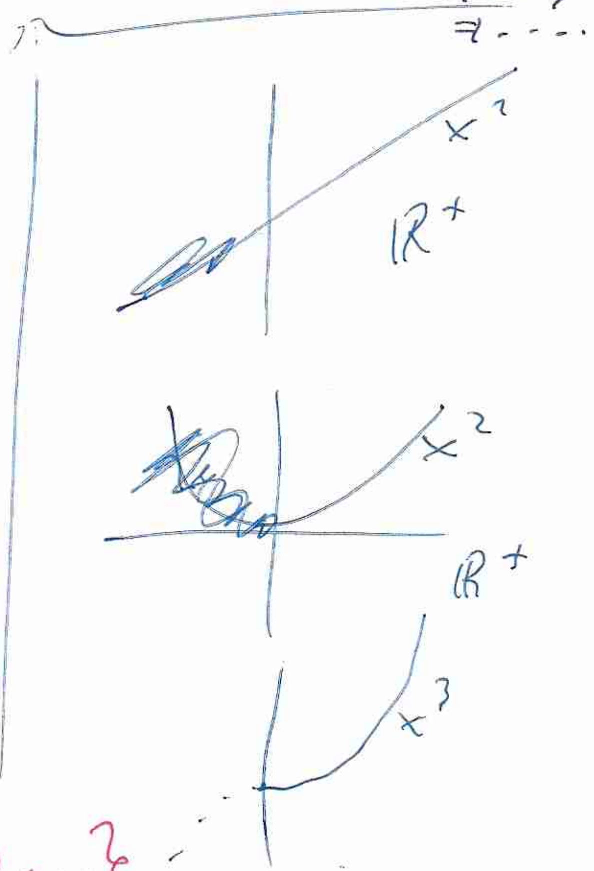
Exponent $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $\Rightarrow$ bijektiv

Beweis: • f_n : auf $\mathbb{R}^+$ streng monoton wachsend

$x < y \Rightarrow x^2 < y^2 \Rightarrow x^3 < y^3 \Rightarrow \ldots$

$\Rightarrow$ injektiv

• z.z.: f_n surjektiv



$y \in \mathbb{R}^+$ geg.

Gibt es $x \in \mathbb{R}^+$:

$$x^n = y$$

Beweisidee: geg $y \in \mathbb{R}^+$

betrachte $M = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^n < y\}$

es lässt sich zeigen: M beschränkt

$\Downarrow$ S. Bund $\Rightarrow$ $m := \sup M$

$\hookrightarrow$ kleinste obere Schranke: $m^n = y$

$\Rightarrow \quad f_n(x) = x^n$ besitzt eine Umkehrfkt.:

$$f_n^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$

$\Rightarrow$ heißt n-te Wurzelfkt.:

$$f_n^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$ (n-te Wurzel von x)

---

negative Exponenten:

$$x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n$$

rationale Exponenten:

$$x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$$

$\Rightarrow$ liefert Rechenregeln für Potenzen:

$$x^r \cdot x^s = x^{r+s},$$

$$\frac{x^r}{x^s} = x^{r-s},$$

$$\left(x^r\right)^s = x^{r \cdot s}$$

Monotonieeigenschaften:

Satz $x,y>0$, $\underline{\underline{r\in\mathbb{Q}^+}}$:

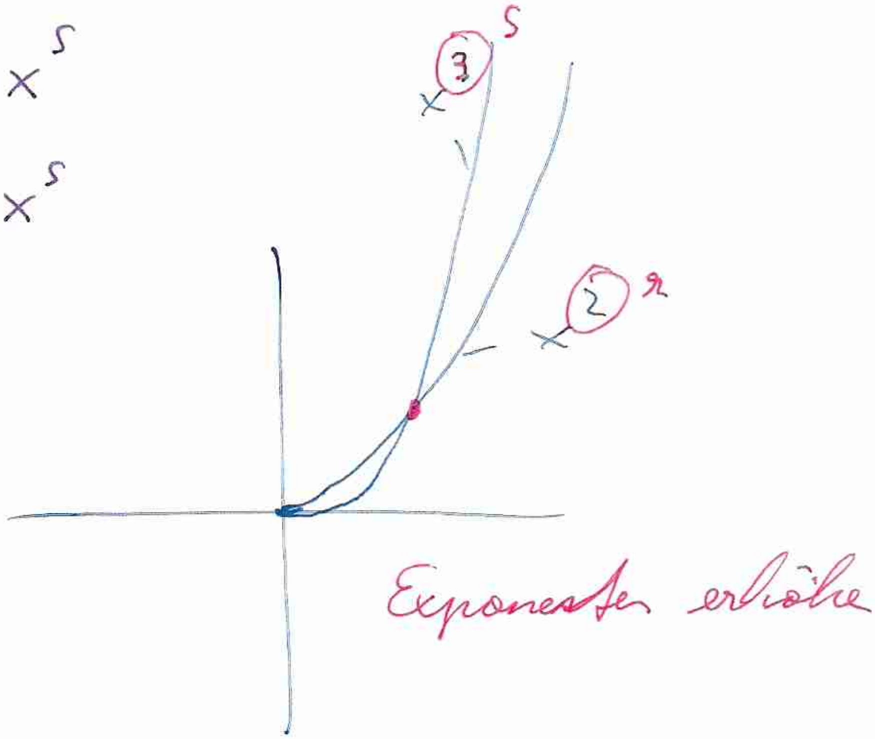
$$x<y \Rightarrow x^r < y^r$$

("vererbt" von vorher)

Satz $x>0$, $r,s\in\mathbb{Q}$, $r<s$.

$$x>1 \Rightarrow x^r < x^s$$

$$x<1 \Rightarrow x^r > x^s$$



Potenzieren mit irrationalem Exponenten

Bsp.: $\alpha = \sqrt{2} = 1.41421\ldots\ldots$

betrachte Folge $(a_n)_n = (1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \ldots)$

$\uparrow$ rationale Zahlen

$\Rightarrow x^{1}, x^{1.4}, x^{1.41}, x^{1.414}, \ldots$

definiert

Folge $(x^{a_n})_n$ ist monoton wachsend und beschränkt

$\Rightarrow$ definiere $x^{\alpha} := \underbrace{\lim_{n\to\infty} x^{a_n}}_{\text{existiert aufgrund mon. \& beschränkt}}$

Problem: für andere Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

mit $b_n \to \alpha$

muß auch gelten: $x^{\alpha} = \lim_{n\to\infty} x^{b_n}$

man muß zeigen: • $\lim_{n\to\infty} x^{b_n}$ existiert

• $\lim_{n\to\infty} x^{b_n}$ hängt nicht von Wahl von b_n ab!

Satz $(a_n)_n$ … Nullfolge rationaler Zahlen

$x > 0$ feste vorgeg. Zahl

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x^{a_n} = 1$

Satz $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ konvergente Folgen rat. Zahlen mit

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

$\Rightarrow$ für alle $x > 0$: • existieren $\lim\limits_n x^{a_n}$, $\lim x^{b_n}$

• $\lim\limits_{n\to\infty} x^{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x^{b_n}$

Grenzwerte gleich