Institute of Analysis and Scientific Computing
Ao.Univ.Prof. Dr. Gabriela Schranz-Kirlinger
Stefan Wurm, BSc

106.054 UE AKNUM Computernumerik, 101.484 VU Computernumerik - SS 2016

Vorzubereiten bis: 23. Juni 2016 — 7. Juni 2016

5. Übungsblatt

Kreuzen Sie **bis zwei Stunden vor Übungsbeginn** auf TUWEL (`https://tuwel.tuwien.ac.at`) jene Aufgaben, die Sie gerechnet haben und in der Übung präsentieren können.

Mit * gekennzeichnete Beispiele **dürfen** Sie mit MATLAB bearbeiten, jene mit ! **müssen** mit MATLAB gelöst werden. Bringen Sie Ihren Code auf USB-Stick oder eigenem Rechner (mit VGA- oder HDMI-Anschluss) mit.

Bei Unklarheiten wenden Sie sich bitte gerne an `stefan.wurm@tuwien.ac.at` oder posten Sie in das TUWEL-Forum.

Aufgabe 1:
(!) Informieren Sie sich in der Hilfe von MATLAB unter dem Stichwort *Integration* bzw. *Quadratur*, welche Möglichkeiten zur a) symbolischen bzw. b) numerischen Berechnung eines Integrals bestehen. Verwenden Sie als Testbeispiel jeweils

$$I = \int_0^5 \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{10}(t-2)^2 \sin((6+3\sin t)t) \right) \mathrm{d}t.$$

Aufgabe 2:
(!) Vergleichen Sie Gauß- und Lobatto- Quadratur als Näherungen für das Integral

$$\int_2^6 \sin x^2 \, \mathrm{d}x$$

unter Nutzung von jeweils vier Punkten.
Hinweis: Die Knoten x_i bzw. die Gewichte w_i zur Lobatto-Quadratur auf dem Intervall $[-1, 1]$ sind gegeben durch:

x_i	$\frac{1}{5}\sqrt{5}$	$-\frac{1}{5}\sqrt{5}$	1	-1
w_i	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Vergessen Sie nicht, die Quadraturpunkte von $[-1, 1]$ auf das gewünschte Intervall zu transformieren.

Aufgabe 3:
(!) *Simpson Regel*

Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, welche die stückweise Integration mittels Simpson-Regel realisiert. Der Funktion sollen die Integralgrenzen $[a, b]$ und ein Vektor mit Stützwerten (die zu einem Gitter Γ gehören) übergeben werde. Das Gitter $\Gamma = \{x_i,\ i = 0..N\}$ (der Einfachheit halber darf $N = 2k, k \in \mathbb{N}$ angenommen werden) wird dabei nicht übergeben und soll folgende Eigenschaften besitzen: $x_0 = a$, $x_N = b$ und $x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{2k} = const$. Die Gitterpunkte sind also äquidistant auf $[a, b]$ verteilt.

Testen Sie Ihr Programm, indem Sie eine von Ihnen gewählte Funktion und die Funktionen $\exp(x)$ und $\exp(10x)$ damit numerisch integrieren und mit dem exakten Ergebnis vergleichen (doppellogarithmischer Plot des Fehlers über $H = 1/k$).

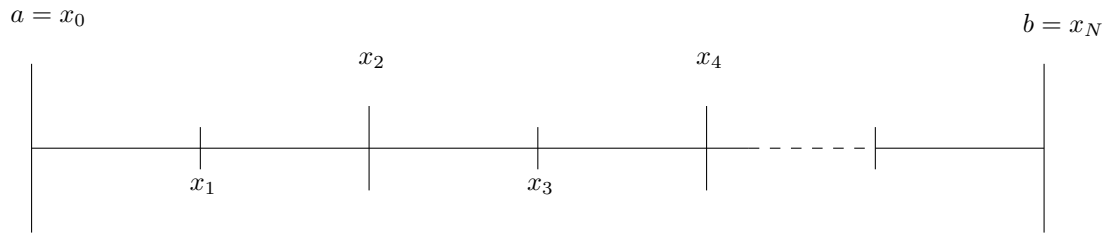

Abbildung 1: Anordnung der Stützstellen für die Simpson-Regel

Hinweis: Vergessen Sie nicht, dass die Integrale für die einzelnen Teilintervalle gemäß der Substitutionsregel mit der Intervallbreite skaliert werden müssen.

Bemerkung: Um eine besonders effiziente Implementierung zu erreichen, kann die Berechnung eines einzelnen Teilintegrals als Skalarprodukt des Gewichtsvektors mit den Stützwerten (und Skalierung) dargestellt werden. Außerdem könnte verwendet werden, dass der Endpunkt eines Intervalls der Anfangspunkt des nächsten Intervalls ist und deshalb nur einmal mit der richtigen Gewichtung summiert werden muss.

Aufgabe 4:
(!) *Fehlerschätzer*
Erweitern Sie das Programm aus der vorigen Aufgabe, dass dieses zusätzlich einen sogenannten *asymptotisch korrekten Fehlerschätzer* für das globale Intervall zurückgibt. Ein solcher ist für die Simpson-Regel gegeben durch

$$EST\,(k) := \frac{1}{2^p - 1}\,|I\,(k/2) - I\,(k)|\,, \quad p = 4$$

wobei $I(k)$ die Approximation des Integrals mit Unterteilung in k Teilintervalle bezeichnet und $EST(k)$ der dazugehörige Fehlerschätzer.

Für die Berechnung von $I(k/2)$ kann dieselbe Routine verwendet werden, wobei im Stützstellenvektor jeder zweite Eintrag weggelassen wird (dabei darf k natürlich als gerade Zahl angenommen werden).

Testen Sie nun auch die Qualität dieses Fehlerschätzers anhand der Testbeispiele aus der vorigen Aufgabe, indem Sie den geschätzten Fehler mit dem tatsächlichen Fehler vergleichen (doppellogarithmischer Plot der Abweichung des geschätzten Fehlers vom tatsächlichen über $H = 1/k$).

Aufgabe 5:
Zeigen Sie, dass der Fehlerschätzer aus der vorigen Aufgabe tatsächlich *asymptotisch korrekt* ist. Nehmen Sie dazu an, dass

$$I(k) - \int_a^b f(x)\,dx \leq ck^{-p} + \mathcal{O}(k^{-q}), \quad p < q$$

gilt und zeigen Sie damit, dass

$$I(k) - \int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2^p - 1}\,(I\,(k/2) - I\,(k)) = \mathcal{O}(k^{-q})$$

gilt.

Zusatzfrage: Welches q lässt sich für die Simpson-Regel aufgrund der Euler-Maclaurinschen Summenformel erwarten?

Aufgabe 6:
(!) Programmieren Sie die Romberg-Integration basierend auf der Simpson-Regel (Sie können z.B. auf den Code aus Aufgabe 3 zurückgreifen) und testen Sie erneut anhand der Beispiele aus Aufgabe 3. Variieren Sie dabei die Anzahl der extrapolierten Werte zwischen 2 und 6 und die Basisschrittweite

nach eigenem Ermessen und stellen Sie beides in geeigneten Plots dar.
Hinweis: Verwenden Sie das Neville-Schema zur Auswertung von Interpolationspolynomen (siehe Kapitel 4).

Aufgabe 7:
(!) *2D-Integration*
Zu programmieren ist die 2D-Mittelpunktregel für das Quadrat mit den Eckpunkten $(\pm 1, \pm 1)$. Schrei-

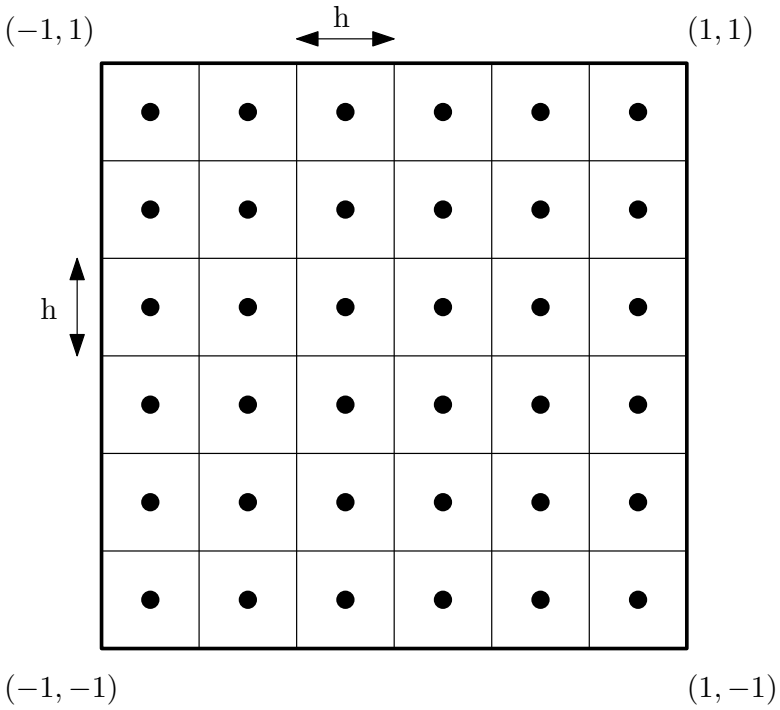

Abbildung 2: 2D-Quadraturschema mittels Mittelpunktregel

ben Sie dazu eine MATLAB-Funktion mit der Signatur `function [I] = mittelp2d(f,h)`, die zu einem gegebenen *function-handle* `f` und einer Schrittweite `h` (Annahme: $h = 2/k,\ k \in \mathbb{N}$) das Integral $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dy\,dx$ zu `I` approximiert.

Anleitung: Zerlegen Sie das gegebene Quadrat in Quadrate mit Seitenlänge h. Werten Sie die Funktion an den Mittelpunkten dieser kleiner Quadrate aus und summieren Sie die Werte auf und skalieren Sie mit h^2 (siehe Abbildung 2).

Testen Sie die Funktion anhand der Funktionen $f(x,y) := \exp(x+y)$ und $g(x,y) := \exp(10\,(x+y))$, sowie einer von Ihnen selbst gewählten Funktion. Berechnen Sie die exakten Integralwerte, um die absoulten Fehler berechnen zu können. Variieren Sie die Gitterweite h und stellen Sie den Fehler in einem doppellogarithmischen Plot über der Gitterweite dar.