Runde 5, Beispiel 34

LVA 118.181, Übungsrunde 5, 17.11.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 16.11.2006

1 Angabe

Man zeige mittels partieller Integration, dass

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0^+),$$

wobei vorausgesetzt wird, dass $f(t)$, $f'(t)$ Laplace-transformierbar sind und $f(t)$ auf $(0, \infty)$ stetig ist. Mit $F(s) := \mathcal{L}\{f(t)\}$ wird die Laplace-Transformierte von f(t) bezeichnet und $f(0^+)$ bezeichnet den rechtsseitigen Grenzwert $\lim_{t\to 0, t>0} f(t)$.

2 Lösung des Beispiels

3 Kurze Lösung

$$\begin{gathered}
\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \cdot F(s) - f(0^+) \\
\int e^{-st} f'(t) \partial t = s \int_0^\infty e^{-st} f(t) \partial t \\
e^{-st} f(t)|_0^\infty + s \int e^{-st} f(t) \partial t = \\
= s \cdot F(s) + \lim t \to \infty f(t) e^{-st} - \lim t \to 0 f(t) e^{-st} - f(0^+)
\end{gathered}$$

4 Lösung mit Background

Sei $f(t)$ im Intervall $]0, \infty[$ differenzierbar und die Ableitung $f'(t)$ $\mathcal{L}$-transformierbar. Nach Definition ist dann $f'(t)$ in jedem endlichen Intervall $[0, T]$ (sogar absolut) integrierbar und es gilt

$$\int_0^T f'(t) \partial t = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_0^T f'(t) \partial t = \lim_{\epsilon \to 0^+} f(T) - f(\epsilon) = f(T) - \lim_{\epsilon \to 0^+} f(\epsilon)$$

Also existiert der Grenzwert

$$f(0^+) = \lim_{t \to 0^+} f(t).$$

Setzt man voraus, daß $f(t)$ höchstens exponentielles Wachstum hat, so folgt für alle hinreichend großen s mit partieller Integration:

$$\int_0^\infty e^{-st} f'(t) \partial t = \underbrace{e^{-st} f(t)|_{t=0}^{t\to\infty}}_{=0} + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) \partial t$$

Allgemeiner kann man so schließen: Sei $s > 0$ und das $\mathcal{L}$-Integral

$$\int_0^\infty e^{-st} f'(t) \partial t$$

der Ableitung konvergent. Seien

$$\psi(x) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \partial t,$$
$$g(x) = e^{sx} \psi(x),$$
$$h(x) = e^{sx}.$$

Zu zeigen ist:

$$F(s) = \lim_{x\to\infty} \psi(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{h(x)}$$

existiert und es gilt:

$$sF(s) + f(0^+) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\partial t$$

ψ,g und h sind differenzierbar, denn f ist stetig. Es gilt $h'(x) \neq 0$ und $h'(x) \to \infty$ für $x \to \infty$. Weiters gilt:

$$\begin{array}{ccc} \frac{g'(x)}{h'(x)} & = & \frac{1}{s} \cdot [s\psi(x) + \psi'(x)] = \frac{1}{s}[s\int_0^x e^{-st} f(t)\partial t + e^{-sx} f(x)] \\ & = & \frac{1}{s}[-e^{-st} f(t)|_{t=0}^{t=x} + \int_0^x e^{-st} f'(t)\partial t + e^{-sx} f(x)] \\ & = & \frac{1}{s}[\int_0^x e^{-st} f'(t)\partial t + f(0^+)] \\ & \Rightarrow & \frac{1}{s}[\int_0^\infty e^{-st} f'(t)\partial t + f(0^+)] \end{array}$$

Kann mit l'Hospital nachgeprüft werden. Zusätzlich erhält man $\lim_{x\to\infty} \psi'(x) = lim_{x\to\infty} e^{-sx} f(x) = 0$. Unter den gemachten Voraussetzungen kann also $f(t)$ nur von höchstens exponentiellem Wachstum sein.

(Nicht verlangt, aber interessant in diesem Zusammenhang:) Beispiele für $\mathcal{L}$-transformierbaren Funktionen, deren Ableitungen nicht $\mathcal{L}$-transformierbar sind:

1. $f(t) := \ln t$ ist $\mathcal{L}$-transformierbar, denn $f(t)$ ist in jedem endlichen Intervall $[0, T]$ absolut integrierbar und der Logarithmus wächs nicht mal linear, geschweige denn exponentiell. Die Ableitung $f'(t) = \frac{1}{t}$ ist nicht $\mathcal{L}$-transformierbar, da das uneigentliche Integral

   $$\int_0^1 e^{-st}\partial t$$

   für alle $s \in \mathbb{R}$ divergiert.

2. Für $f(t) := 1 - e^{-t}$ ist $f'(t) = e^{-t}$. Das Laplace-Integral von $f'(t)$ konvergiert für $s > -1$, das Laplace-Integral von $f(t)$ nur für $s > 0$.

3. Für $f(t) := e^t \sin t^2$ ist $f'(t) = e^t(\sin t^2 + 2t\cos t^2)$. Das Laplace-Integral von $f(t)$ konvergiert für $s = 1$, das $\mathcal{L}$-Integral von $f'(t)$ divergiert für $s = 1$.

4. Für $f(t) := e^{et}\sin^{et}$ ist $f'(t) = e^t e^{et}(\sin e^{et} + e^{et}\cos e^{et})$. Das Laplace-Integral von $f(t)$ konvergiert für $s > -1$, das $\mathcal{L}$-Integral von $f'(t)$ divergiert für alle s.