

Übungen SS14

389.055 Signale und Systeme 2 4.0

Inhaltsverzeichnis

1 Kapitel	3
Beispiel 1.1	3
Beispiel 1.2	8
Beispiel 1.3	13
Beispiel 1.4	16
Beispiel 1.5	18
Beispiel 1.6	19
Beispiel 1.7	24
Beispiel 1.8	27
2 Kapitel	28
Beispiel 2.1	28
Beispiel 2.2	35
Beispiel 2.3	39
Beispiel 2.4	42
Beispiel 2.5	45
Beispiel 2.6	50
Beispiel 2.9	55
3 Kapitel	61
Beispiel 3.1	61
Beispiel 3.2	75
Beispiel 3.6	81

1 Kapitel

Beispiel 1.1

Für das zeitbegrenzte Signal

$$x[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ n & 0 \leq n \leq 10 \\ 0 & n > 10 \end{cases}$$

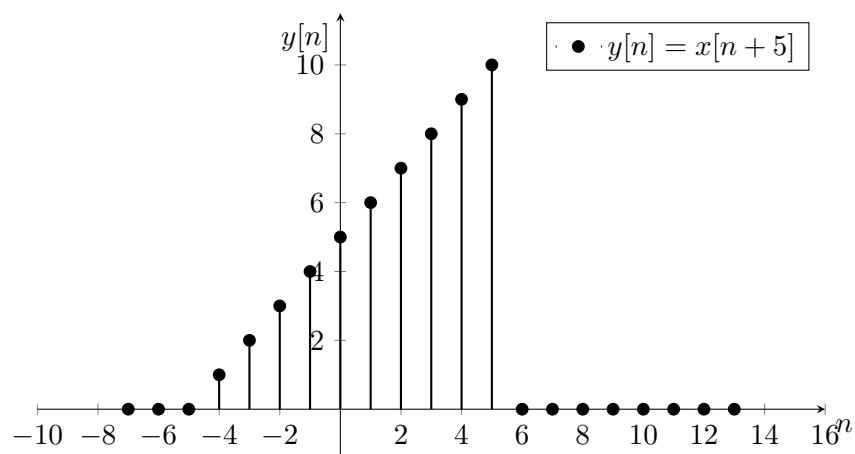
zeichnen Sie folgende Signale:

- a) $y[n] = x[n + 5]$
- b) $y[n] = x[-n + 5]$
- c) $y[n] = x[2n]$
- d) gerades + ungerades Teilsignal von $x[n]$:
- e) $y[n] = x[n + 10] + x[-n + 10] - 10\delta[n]$

Lösung zu Beispiel 1.1

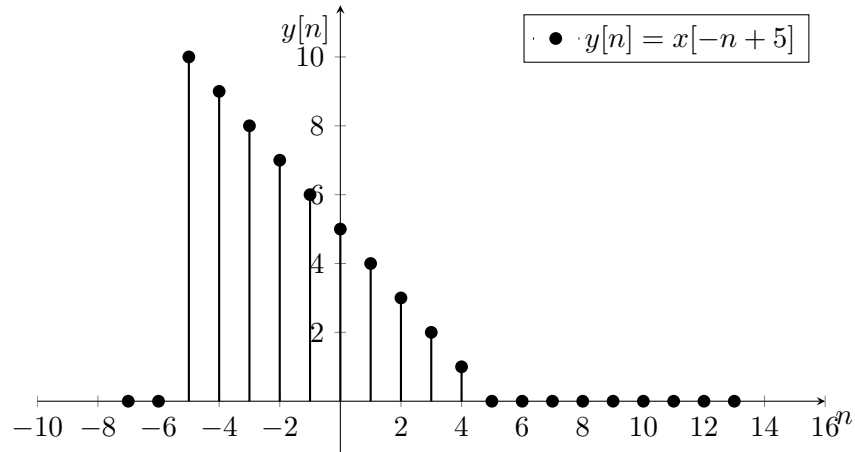
- a) $y[n] = x[n + 5]$:

n	< -5	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	> 5
$n + 5$	< 0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	> 10
$y[n]$	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0



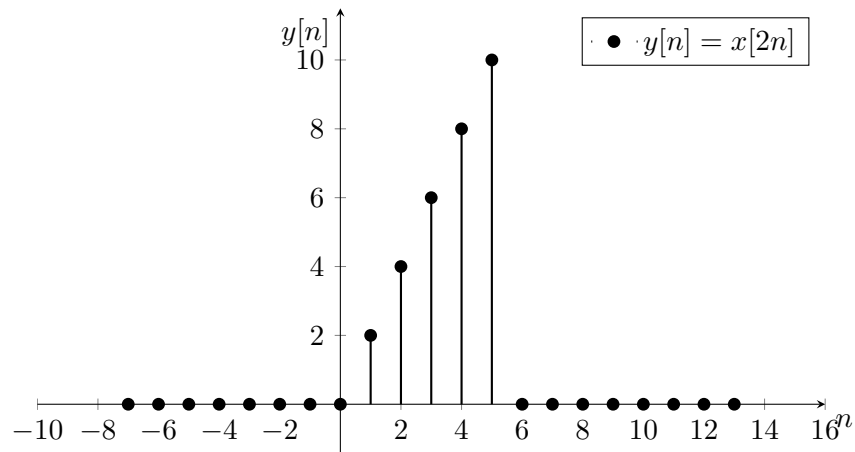
b) $y[n] = x[-n + 5]$:

n	< -5	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	> 5
$-n + 5$	> 10	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	< 0
$y[n]$	0	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0



c) $y[n] = x[2n]$:

n	< 0	0	1	2	3	4	5	> 5
$2n$	< 0	0	2	4	6	8	10	> 10
$y[n]$	0	0	2	4	6	8	10	0



d) gerades + ungerades Teilsignal von $x[n]$: dazu muss man sich die Einzelnen Teile erst berechnen:

Definition 1.1 Gerade und Ungerade

$$x[n] = x_g[n] + x_u[n] \quad \forall n$$

$$x_g[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n]) \quad \forall n$$

$$x_u[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n]) \quad \forall n$$

Z.B.: Berechnung vom geraden Teil:

$$x_g[-10] = \frac{1}{2}(x[-10] + x[10]) = \frac{1}{2}(0 + 10) = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_g[-9] = \frac{1}{2}(x[-9] + x[9]) = \frac{1}{2}(0 + 9) = \frac{9}{2}$$

$$\vdots$$

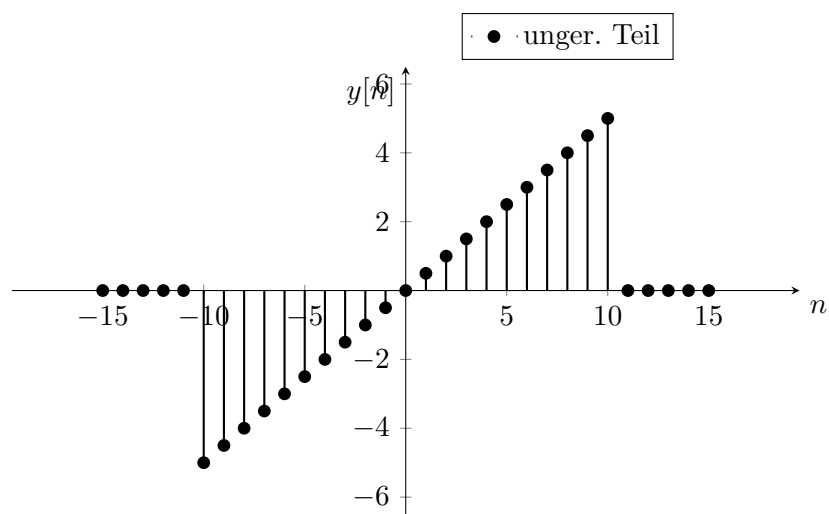
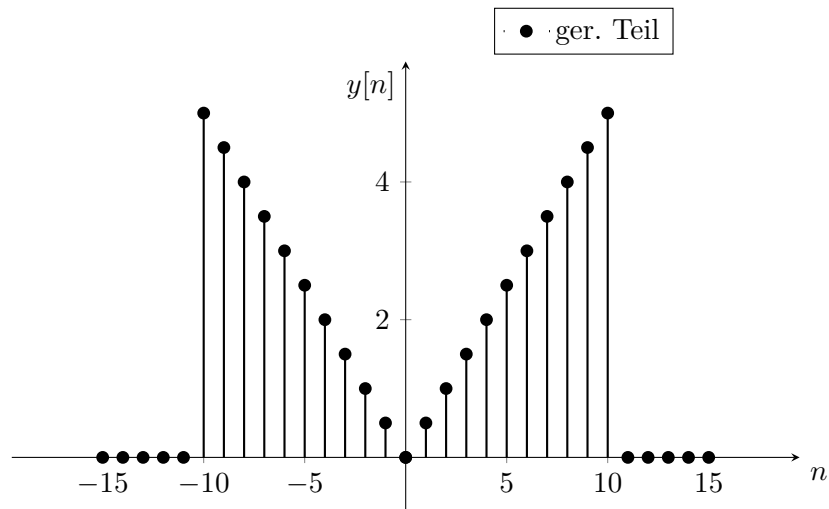
$$x_g[10] = \frac{1}{2}(x[10] + x[-10]) = \frac{1}{2}(10 + 0) = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_u[-10] = \frac{1}{2}(x[-10] - x[10]) = \frac{1}{2}(0 - 10) = -\frac{10}{2} = -5$$

$$\vdots$$

n	> 10	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$x[n]$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x[-n]$	0	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$x_g[n]$	0	$\frac{10}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{1}{2}$
$x_u[n]$	0	$-\frac{10}{2}$	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{8}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{6}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{4}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{2}{2}$	$-\frac{1}{2}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	> 10
$x[n]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0
$x[-n]$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x_g[n] = x_u[n]$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{10}{2}$	0



e) $y[n] = x[n + 10] + x[-n + 10] - 10\delta[n]$

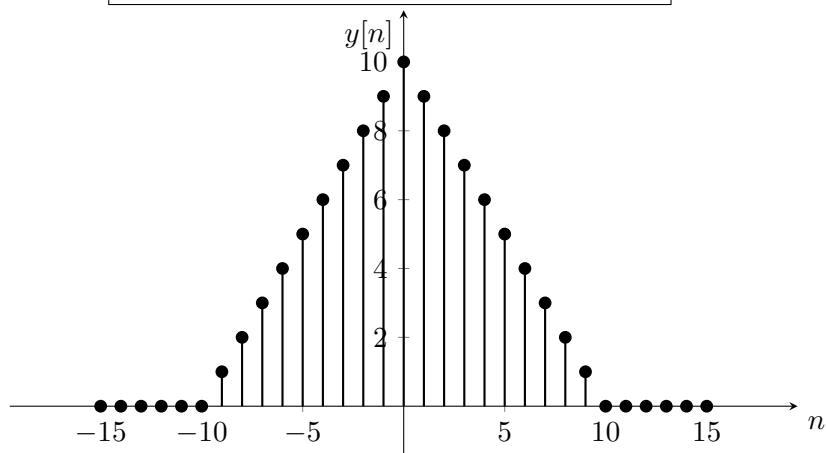
Definition 1.2 (δ -Einsimpuls)

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

n	< -10	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$x[n + 10]$	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x[-n + 10]$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$y[n]$	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

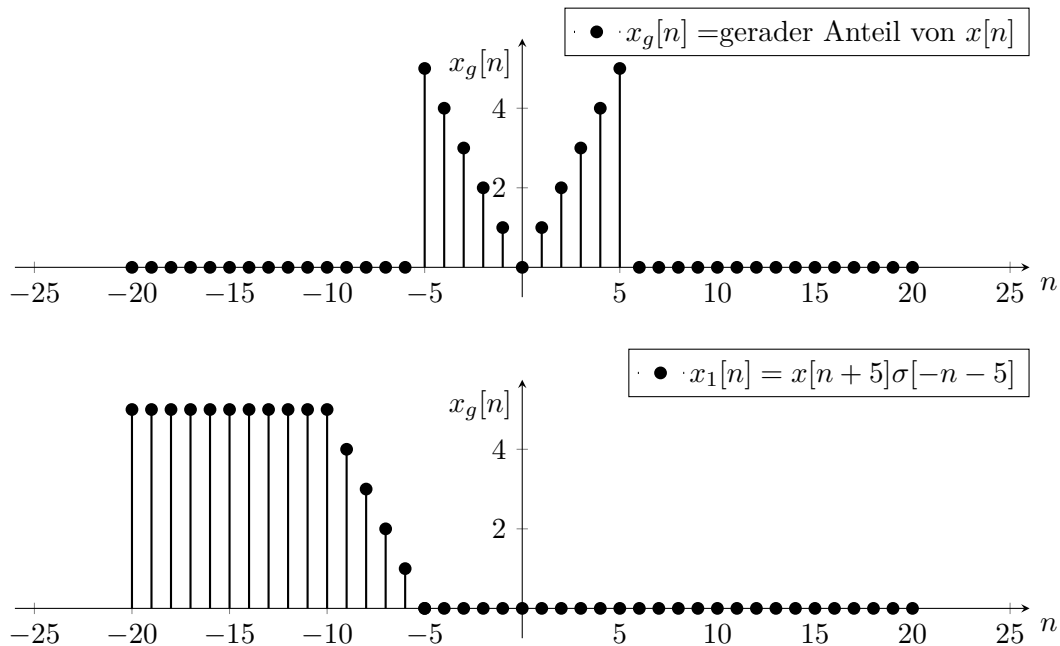
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	> 10
$x[n + 10]$	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x[-n + 10]$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0
$y[n]$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0

$$\bullet \cdot y[n] = x[n + 10] + x[-n + 10] - 10\delta[n]$$



Beispiel 1.2

Von einem Signal $x[n]$ sei der gerade Anteil $x_g[n]$ und das Signal $x_1[n]$ gegeben. Bestimmen Sie den ungeraden Anteil des Signals $x[n]$.



Lösung zu Beispiel 1.2

Wir beginnen nun schrittweise, die Funktion $x[n]$ zu erzeugen:

- 1. Schritt:** Als erstes versuchen wir, das Signal $x[n]$ zu rekonstruieren:
Dazu versuchen wir uns zuerst an $x_1[n]$:

Definition 1.3 (σ -Sprungfunktion)

$$\sigma[n] = \begin{cases} 0 & \text{für } n < 0 \\ 1 & \text{für } n \geq 0 \end{cases}$$

Somit unterdrückt der Ausdruck $\sigma[-n-5]$ alle Werte von $x[n]$ im Bereich $-5 < n < \infty$. Das bedeutet, wir kennen die Werte von $x[n+5]$ im Bereich von $-\infty < n \leq -5$.

Durch Verschiebung von $x[n+5]$ (Rechtsverschiebung um 5) erhalten wir $x[n]$ im Bereich $-\infty < n \leq 0$.

Siehe tabelle 1.1 auf Seite 11

- 2. Schritt:** Als nächstes versuchen wir, $x[n]$ im noch unbekannten Bereich $0 < n < \infty$ zu berechnen:

Dazu sehen wir uns die Formel für $x_g[n]$ an (siehe Definition 1.1 auf Seite 5)

$$x_g[n] = \frac{1}{2} \left(\underbrace{x[n]}_{\text{unbekannt}} + \underbrace{x[-n]}_{\text{bekannt}} \right) \quad \forall n > 0$$

Somit können wir, wenn wir uns die Formel etwas umstellen folgendes aussagen:

$$2 \cdot x_g[n] - x[-n] = x[n] \quad \forall n \geq 1$$

Da $x[n] \quad \forall n \leq 0$ bereits bekannt ist, können wir uns so die fehlenden Werte berechnen:

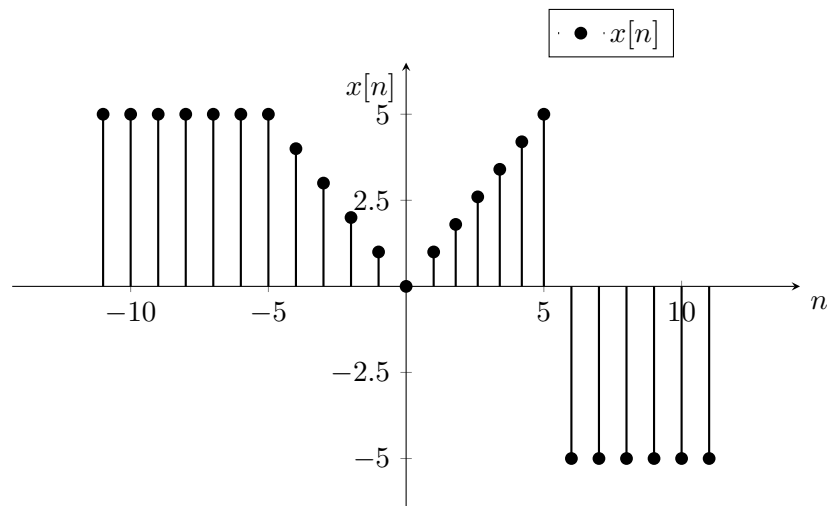
$$\text{für } n = 1: x[1] = 2 \cdot x_g[1] - x[-1] = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

$$\text{für } n = 2: x[2] = 2 \cdot x_g[2] - x[-2] = 2 \cdot 2 - 2 = 2$$

\vdots

$$\text{für } n = 20: x[20] = 2 \cdot x_g[20] - x[-20] = 2 \cdot 0 - 5 = -5$$

Siehe tabelle 1.2 auf Seite 11.



3. Schritt: Nun besitzen wir bereits das Signal $x[n]$ und wir müssen nur noch den ungeraden Anteil des Signals bestimmen.

Die Formel für $x_u[n]$ lautete: (siehe Definition 1.1 auf Seite 5)

$$x_u[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n])$$

$$x_u[-20] = \frac{1}{2}(x[-20] - x[20]) = \frac{1}{2}(5 + 5) = 5$$

$$\vdots$$

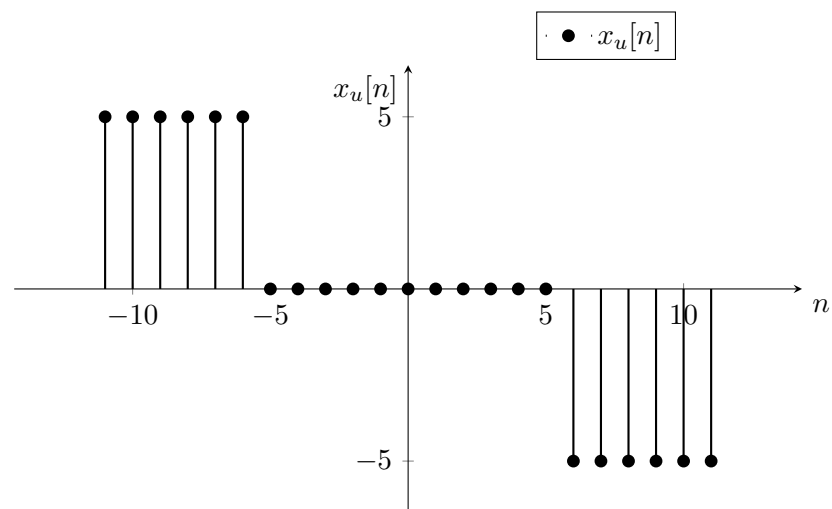
$$x_u[-5] = \frac{1}{2}(x[-5] - x[5]) = \frac{1}{2}(5 - 5) = 0$$

$$x_u[-4] = \frac{1}{2}(x[-4] - x[4]) = \frac{1}{2}(4 - 4) = 0$$

$$\vdots$$

$$x_u[20] = \frac{1}{2}(x[20] - x[-20]) = \frac{1}{2}(-5 - 5) = -5$$

Siehe tabelle 1.3 auf Seite 12.



n	-20	-19	-18	-17	-16	-15	-14	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$x_1[n]$	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0
$x_g[n]$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	4	3	2	1
$x[n+5]$	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	4	3	2	1	0				
$x[n]$	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	4	3	2	1

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$x_1[n]$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x_g[n]$	0	1	2	3	4	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x[n+5]$																					
$x[n]$	0																				

Tabelle 1.1: Berechnen von $x[n]$ im Intervall $-\infty < x \leq 0$

11

n	-20	-19	-18	-17	-16	-15	-14	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$x_1[n]$	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0
$x_g[n]$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	4	3	2	1
$x[n+5]$	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	4	3	2	1	0				
$x[n]$	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	4	3	2	1

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$x_1[n]$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x_g[n]$	0	1	2	3	4	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x[n+5]$																					
$x[n]$	0	1	2	3	4	5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5

Tabelle 1.2: Berechnen von $x[n]$ im Intervall $1 \leq x < \infty$

n	-20	-19	-18	-17	-16	-15	-14	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	
$x_1[n]$	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	
$x_g[n]$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	4	3	2	1	
$x[n+5]$	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	4	3	2	1	0					
$x[n]$	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	4	3	2	1
$x_u[n]$	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	0	0	0	0	0

	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	$x_1[n]$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$x_g[n]$	0	1	2	3	4	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$x[n+5]$																					
	$x[n]$	0	1	2	3	4	5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5
	$x_u[n]$	0	0	0	0	0	0	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5

Tabelle 1.3: Berechnen von $x_u[n]$

Beispiel 1.3

Jedes Signal $x[n]$ kann in ein gerades Signal $x_g[n]$ und in ein ungerades Signal $x_u[n]$ zerlegt werden. Zeigen Sie allgemein, dass

a) das Produkt $x_g[n]x_u[n]$ ein ungerades Signal ist.

b) für das ungerade Signal gilt:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_u[n] = 0$$

c) die Signalenergie gegeben ist durch

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_g^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_u^2[n].$$

Lösung zu Beispiel 1.3

a) z.z.: das Produkt $x_g[n] \cdot x_u[n]$ ist ein ungerades Signal:

Definition 1.4 Ein Signal heißt **gerade**, wenn gilt:

$$x[-n] = x[n]$$

und ein Signal heißt **ungerade**, wenn gilt:

$$x[-n] = -x[n]$$

In Definition 1.1 auf Seite 5 wurde der gerade und der ungerade Anteil eines Signals definiert:

$$x_g[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n])$$

$$x_u[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n])$$

somit müssen wir folgendes berechnen:

$$\begin{aligned}
 x_g[n] \cdot x_u[n] &= \frac{1}{2}(x[n] + x[-n]) \cdot \frac{1}{2}(x[n] - x[-n]) \\
 &= \frac{1}{4}(x[n] + x[-n]) \cdot (x[n] - x[-n]) \\
 x_g[n] \cdot x_u[n] &= \frac{1}{4}(x[n]^2 - x[-n]^2) \\
 \text{Setzen wir nun } n = -n: \\
 x_g[-n] \cdot x_u[-n] &= \underbrace{\frac{1}{4}(x[-n]^2 - x[n]^2)}_{x[-n]} = - \underbrace{\left(\frac{1}{4}(x[n]^2 - x[-n]^2)\right)}_{-x[n]}
 \end{aligned}$$

Somit erhalten wir: $x[-n] = -x[n]$ und gerade das ist die Definition der ungeraden Funktion (siehe Definition 1.4 auf der vorherigen Seite). q.e.d.

b) z.z.: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_u[n] = 0$ Als erstes spalten wir die Summe auf:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_u[n] = \sum_{n=-\infty}^{-1} x_u[n] + \sum_{n=1}^{\infty} x_u[n] + x_u[0]$$

Laut Definition 1.4 auf der vorherigen Seite gilt: $x[-n] = -x[n]$ formt man jedoch um, erhält man: $-x[-n] = x[n]$.

Ersetzt man somit in der linken Summenformel n durch $-n$, muss zusätzlich die linke Summenformel noch mit -1 multipliziert werden, damit wieder Gleichheit herrscht.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_u[n] = - \sum_{n=-\infty}^{-1} x_u[-n] + \sum_{n=1}^{\infty} x_u[n] + x_u[0]$$

Dreht man nun die Vorzeichen der linken Summe um, bekommt man das folgende:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_u[n] = - \cancel{\sum_{n=1}^{\infty} x_u[n]} + \cancel{\sum_{n=1}^{\infty} x_u[n]} + x_u[0]$$

Somit heben sich beide Summen auf und übrig bleibt:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_u[n] = x_u[0]$$

Da es sich um eine ungerade Funktion handelt, muss jedoch gelten: $x_u[0] = 0$ sonst wäre die Funktion nicht ungerade. (siehe Wikipedia Gerade und ungerade Funktionen)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_u[n] = x_u[0] = 0$$

q.e.d.

- c) z.z. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_g^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_u^2[n]$.
Zuerst schreiben wir die Linke Seite um:

Jedes Signal besteht aus einem geraden und ungeraden Anteil (siehe Definition 1.1 auf Seite 5:

$$x[n] = x_g[n] + x_u[n]$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_g[n] + x_u[n])^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_g^2[n] + 2x_u[n]x_g[n] + x_u^2[n]) \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_u^2[n] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_g^2[n] + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2x_u[n]x_g[n]}_{\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_u[n]} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_u^2[n] \end{aligned}$$

Wie unter Punkt a bereits bewiesen, ist die Multiplikation von einem geraden und einem ungeraden Signal wieder ein ungerades Signal ($2x_u[n]x_g[n] = y_u[n] \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2x_u[n]x_g[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_u[n]$). Somit erhalten wir:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_u^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_g^2[n] + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_u[n]}_{=0} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_u^2[n]$$

In Punkt b haben wir bereits bewiesen, dass $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_u[n] = 0$, somit gilt:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_u^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_g^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_u^2[n]$$

q.e.d.

Beispiel 1.4

Welche Grundperiode hat das zeitdiskrete Signal

$$x[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

in Abhängigkeit von den ganzzahligen Größen k und N ?

Lösung zu Beispiel 1.4

Ein Signal heißt **Periodisch**, mit der Periodendauer $N \in \mathbb{Z}$, wenn gilt: (bei beliebigem $m \in \mathbb{N}$)

$$x[n] = x[n + mN]$$

Die Grundperiode ist definiert, als die kleinste Periode unter der Menge aller möglichen Perioden von $x[n]$.

Ich definiere am Anfang ein $m = 1$.

Weiters definiere ich, dass $N = m \cdot N_x$ und $k = m \cdot k_x$. Wobei in beiden Gleichungen ebenfalls ersichtlich ist, dass $N_x, k_x \in \mathbb{Z}$. (denn laut Angabe ist auch $k \in \mathbb{N}$ und $N \in \mathbb{N}$. Somit lautet der Exponent:

$$x[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = e^{j\frac{2\pi}{N_x \cdot m}nk_x \cdot m}$$

Dass dies gilt, ist ersichtlich, denn $m = 1$ ist ein gemeinsamer Teiler aller Zahlen \mathbb{N} .

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir nun einen Schritt weiter gehen und m als den gemeinsamen Teiler von N und k definieren. Somit können wir sagen:

$$e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = e^{j\frac{2\pi}{N_x \cdot m}nk_x \cdot m}$$

Somit bekommen wir eine neue e -Funktion:

$$e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = e^{j\frac{2\pi}{N_x \cdot \text{ggT}(N,k)}nk_x \cdot \text{ggT}(N,k)}$$

Da gilt:

$$N = m \cdot N_x = \text{ggT}(N, k)N_x$$

Folgt:

$$N_x = \frac{N}{\text{ggT}(N, k)}$$

Für den Zusammenhang zwischen ggT und kgV gilt in diesem Fall:

$$\text{ggT} \cdot \text{kgV} = k \cdot N \Rightarrow N_x = \frac{\text{kgV}(N, k)}{k}$$

kurzes Beispiel 1.1 $k = 70$, $N = 120$, die Primfaktorzerlegung ergibt folgendes:

	$k = 70$	$N = 120$
2	1	3
3	0	1
5	1	1
7	1	0

D.h. $k = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$ und $N = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$ Somit berechnet sich der ggT als das kleinere der beiden Zahlen in der Tabelle:

$$ggT(N, k) = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^0 = 10$$

Und das kgV als das größere der beiden Zahlen in der Tabelle:

$$kgV(N, k) = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 840$$

Hinweis 1.1 Der Weg vom Tutor war der folgende:

$$\begin{aligned} e^{j\frac{2\pi}{N}nk} &= e^{j\frac{2\pi}{N}(n+N_x)k} \\ e^{j\frac{2\pi}{N}nk} &= e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}N_xk} \\ 1 &= e^{j\frac{2\pi}{N}N_xk} \end{aligned}$$

Wobei hier ersichtlich sein sollte, dass $\frac{1}{N}N_xk \in \mathbb{N}$ ist.

$$N_x \cdot \frac{\frac{k}{N}}{ggT(k, N)}$$

TODO: keine ahnung was das bringt, hab aber auch keinen bock mehr!!!

Beispiel 1.5

Das Signal $x[n]$ sei periodisch mit der Periode N . Prüfen Sie, ob das Signal $y[n] = x[Mn]$ (M ganzzahlig) ebenfalls periodisch ist. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Periode von $y[n]$.

Lösung zu Beispiel 1.5

Ein Signal heißt **Periodisch**, mit der Periodendauer $N \in \mathbb{Z}$, wenn gilt: (bei beliebigem $m \in \mathbb{Z}$)

$$x[n] = x[n + mN]$$

Angenommen, wir definieren 2 Variablen:

$n \in \mathbb{N}$ und $o = 2n$, dann ist klar, dass $o \in \mathbb{Z}$ ebenfalls gilt.

Nehmen wir nun allgemein die Variable $M \in \mathbb{Z}$ und definieren $l = Mn$, dann gilt auch $l \in \mathbb{Z}$.

Somit gilt folgendes: (denn die gesamten Variablen n , o und l liegen ja im Zahlenbereich von \mathbb{Z} .)

$$x[n] = x[n + m_x N_x] \quad \text{und} \quad x[o] = x[o + m_x N_x] \quad \text{und} \quad x[l] = x[l + m_x N_x]$$

Das bedeutet, dass $x[n]$, $x[o]$ und $x[l]$ periodische Signale sind.

Somit muss $y[n]$ auch ein periodisches Signal sein, denn es gilt:

$$x[l] = x[Mn] = y[n] = y[n + m_y N_y]$$

Zum Bestimmen der Periode überlegen wir uns folgendes:

$$x[Mn + m_x N_x] = y[n + m_y N_y]$$

TODO: fucking shit, ich hab keinen bock mehr!!!

Ist laut tutor aber auch noch nie zum test gekommen!!!

Beispiel 1.6

Die Fourierreihendarstellungen der periodischen Signale $x[n]$ und $y[n]$ sind gegeben durch

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \Leftrightarrow c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

und

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} d_k e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \Leftrightarrow d_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Berechnen Sie den Zusammenhang zwischen den Fourierreihenkoeffizienten d_k und c_k für die folgenden Signalbeziehungen:

- a) $y[n] = x\left[n - \frac{N}{2}\right]$, N gerade
- b) $y[n] = x[N - n]$
- c) $y[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[N - n])$
- d) $y[n] = x[2n]$
- e) $y[n] = x[n] \cos \frac{2\pi L}{M}n$, L und M ganzzahlig
- f) $y[n] = x^2[n]$

Lösung zu Beispiel 1.6

- a) $y[n] = x\left[n - \frac{N}{2}\right]$, N gerade

Definition 1.5 (Eulersche Formel)

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi)$$

Mit der Eulerschen Formel können wir uns folgedes herleiten:

$$e^{j\cdot\pi} = \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + \underbrace{j \sin(\pi)}_{=0} = -1$$

$$\begin{aligned}
y[n] &= x\left[n - \frac{N}{2}\right] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}\left(n - \frac{N}{2}\right)k} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}\left(\frac{N}{2}\right)k} \\
y[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \cdot \underbrace{(e^{-j\pi})^k}_{-1} = \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk}}_{x[n]} \cdot (-1)^k = (-1)^k \cdot x[n] \\
\sum_{k=0}^{N-1} d_k e^{j\frac{2\pi}{N}nk} &= (-1)^k \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \Rightarrow \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} d_k}_{N \cdot d_k} = (-1)^k \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} c_k}_{N \cdot c_k} \\
\mathcal{N} \cdot d_k &= (-1)^k \mathcal{N} \cdot c_k \Rightarrow \underline{\underline{d_k = c_k (-1)^k}}
\end{aligned}$$

Hinweis 1.2 Hier gibts in der Formelsammlung (Fourierreihen zeitdiskreter periodischer Signale) eine nette Formel, die besagt:

$$x[n - N_0] \Leftrightarrow e^{-j\frac{2\pi k}{N}N_0} \cdot c_k$$

Somit kann man das ganze etwas abkürzen, indem man sagt:

$$x\left[n - \frac{N}{2}\right] \Leftrightarrow e^{-j\frac{2\pi k}{N}\frac{N}{2}} \cdot c_k = \underbrace{e^{-j\pi k}}_{=(-1)^k} \cdot c_k = c_k \cdot (-1)^k$$

b) $y[n] = x[N - n]$

Mit der Eulerschen Formel können wir uns folgedes herleiten:

$$e^{j \cdot 2 \cdot \pi} = \underbrace{\cos(2 \cdot \pi)}_{=1} + j \underbrace{\sin(2 \cdot \pi)}_{=0} = 1$$

$$\begin{aligned}
y[n] &= x[N-n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}(N-n)k} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k \cdot n} \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}N \cdot k} \\
y[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k \cdot n} \cdot \underbrace{(e^{j \cdot 2\pi})^k}_{=1} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k \cdot n} \quad \boxed{\text{subst: } k = -k} \\
y[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} c_{-k} \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}k \cdot n} \\
\sum_{k=0}^{N-1} d_k e^{j\frac{2\pi}{N}nk} &= \sum_{k=0}^{N-1} c_{-k} \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}k \cdot n} \Rightarrow \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} d_k}_{N \cdot d_k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} c_{-k}}_{N \cdot c_{-k}} \Rightarrow N \cdot d_k = N \cdot c_{-k} \\
&\Rightarrow \underline{\underline{d_k = c_{-k}}}
\end{aligned}$$

Hinweis 1.3 In Formelsammlung(Fourierreihen zeitdiskreter periodischer Signale) steht:

$$x[-n] \Leftrightarrow c_{-k}$$

Somit hätte man sich die ganze Berechnung erspart, wenn man erkannt hätte, dass

$$x[-n] = x[N-n] \Leftrightarrow c_{-k}$$

denn das Signal ist ja sowieso N -Periodisch.

c) $y[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[N-n])$

$x^*[n]$ ist ein konjugiert komplexes Signal:

$$c_{-k}^* = c_k$$

Da gilt: $x[-n] = x[-n + mN] \quad \forall m \in \mathbb{Z}$ folgt:

$$y[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[N-n]) \Rightarrow y[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n])$$

Lt. Formel in Formelsammlung(Fourierreihen zeitdiskreter periodischer Signale) gilt:

$$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n]) \Leftrightarrow \Re\{c_k\}$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} d_k e^{j\frac{2\pi}{N}nk} &= \sum_{k=0}^{N-1} \Re\{c_k\} \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \Rightarrow \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} d_k}_{N \cdot d_k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} \Re\{c_k\}}_{N \cdot \Re\{c_k\}} \\ \Rightarrow \mathcal{N} \cdot d_k &= \mathcal{N} \cdot \Re\{c_k\} \Rightarrow \underline{\underline{d_k = \Re\{c_k\}}} \end{aligned}$$

Hinweis 1.4 Hier gibts in der Formelsammlung (Fourierreihen zeitdiskreter periodischer Signale) eine nette Formel, die besagt:

$$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n]) \Leftrightarrow \Re\{c_k\}$$

Somit kann man das ganze etwas abkürzen, indem man sagt:

$$y[n] = \frac{1}{2}(x[n] + \underbrace{x^*[N-n]}_{x^*[-n]}) = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n]) \Leftrightarrow \Re\{c_k\}$$

Da die Funktion $y[n]$ sowieso N -periodisch ist.

e) $y[n] = x[n] \cos \frac{2\pi L}{M}n$, L und M ganzzahlig

Nicht vergessen auf folgende Beziehung:

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx})$$

$$\begin{aligned}
y[n] &= x[n] \cdot \cos \frac{2\pi L}{M} n = x[n] \cdot \frac{1}{2} \left(e^{j\frac{2\pi L}{M} n} + e^{-j\frac{2\pi L}{M} n} \right) \\
\Rightarrow d_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y[n] e^{-j\frac{2\pi}{N} nk} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \frac{1}{2} \left(e^{j\frac{2\pi L}{M} n} + e^{-j\frac{2\pi L}{M} n} \right) e^{-j\frac{2\pi}{N} nk} \\
d_k &= \frac{1}{2} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \left(e^{j\frac{2\pi L}{M} n} + e^{-j\frac{2\pi L}{M} n} \right) e^{-j\frac{2\pi}{N} nk} \\
d_k &= \frac{1}{2} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \left(e^{j2\pi n \left(\frac{L}{M} - \frac{k}{N} \right)} + e^{-j2\pi n \left(\frac{L}{M} + \frac{k}{N} \right)} \right) \\
d_k &= \frac{1}{2} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{j2\pi n \left(\frac{L}{M} - \frac{k}{N} \right)} + \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j2\pi n \left(\frac{L}{M} + \frac{k}{N} \right)} \\
d_k &= \frac{1}{2} \left(\underbrace{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi n}{N} \left(k - \frac{LN}{M} \right)}}_{c_{k - \frac{LN}{M}}} + \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi n}{N} \left(k + \frac{LN}{M} \right)}}_{c_{k + \frac{LN}{M}}} \right) \\
\Rightarrow d_k &= \underline{\underline{\frac{1}{2} \left(c_{k - \frac{LN}{M}} + c_{k + \frac{LN}{M}} \right)}}
\end{aligned}$$

f) $y[n] = x^2[n]$

$$\begin{aligned}
y[n] &= x^2[n] = x[n] \cdot x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \left(c_k e^{j\frac{2\pi}{N} nk} \right) \cdot \sum_{l=0}^{N-1} \left(c_l e^{j\frac{2\pi}{N} nl} \right) = \\
y[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \left(c_k e^{j\frac{2\pi}{N} nk} \right) \cdot \left(c_l e^{j\frac{2\pi}{N} nl} \right) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} c_k \cdot c_l \cdot e^{j\frac{2\pi}{N} n(k+l)}
\end{aligned}$$

Wenn wir nun $k+l$ durch m substituieren: ($k+l = m$) und diese Formel auf k umstellen ($k = m-l$): Nicht vergessen, auch die Limits der Summen müssen angepasst werden:

Unteres Limit: $k = m-l \Rightarrow 0 = m-l \Rightarrow l = m$

Oberes Limit: $k = m-l \Rightarrow N-1 = m-l \Rightarrow N-1+l = m$

$$\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{m=l}^{N-1+l} \sum_{l=0}^{N-1} c_{m-l} \cdot c_l \cdot e^{j\frac{2\pi}{N} n \cdot m} \\
\sum_{m=0}^{N-1} d_m e^{j\frac{2\pi}{N} nm} &= \sum_{m=l}^{N-1+l} \sum_{l=0}^{N-1} c_{m-l} \cdot c_l \cdot e^{j\frac{2\pi}{N} n \cdot m} \Rightarrow \sum_{m=0}^{N-1} d_m = \sum_{m=l}^{N-1+l} \sum_{l=0}^{N-1} c_{m-l} \cdot c_l \\
\Rightarrow d_m &= \underline{\underline{\sum_{l=0}^{N-1} c_{m-l} \cdot c_l}}
\end{aligned}$$

Beispiel 1.7

Für die gegebenen periodischen Signale bestimme man die Fourierreihenkoeffizienten c_k :

a) $x[n] = 1 - \cos \frac{\pi}{4}n$

b) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n, -2 \leq n \leq 3$ und $x[n+6] = x[n]$.

c) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-3k]$

Lösung zu Beispiel 1.7

a) $x[n] = 1 - \cos \frac{\pi}{4}n$

Zuerst bestimmen wir uns die Periodendauer $N = T$: Da unser Signal aus $\cos \frac{\pi}{4}$ besteht, ist unsere Kreisfrequenz wie folgt definiert:

$$\cos[\omega \cdot n + \varphi] \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{4}, \varphi = 0$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow T = N = \frac{2 \cdot \pi \cdot 4}{\pi} = 2 \cdot 4 = 8$$

Der Fourierkoeffizient c_k ist wie folgt definiert:

$$c_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad \forall k \leq N-1 \text{ und } k \geq 0$$

$$c_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{n=0}^7 \left(1 - \cos \frac{\pi}{4}n\right) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}kn}$$

$$c_k = \frac{1}{8} \cdot \sum_{n=0}^7 \left(1 - \cos \frac{\pi}{4}n\right) \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}kn}$$

Nicht vergessen auf folgende Beziehung:

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{jx} + e^{-jx})$$

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{8} \cdot \sum_{n=0}^7 \left(1 - \frac{1}{2} \left(e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{-j\frac{\pi}{4}n} \right) \right) \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}kn} \\
c_k &= \frac{1}{8} \cdot \left(\sum_{n=0}^7 e^{-j\frac{\pi}{4}kn} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^7 \left(e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{-j\frac{\pi}{4}n} \right) \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}kn} \right) \\
c_k &= \frac{1}{8} \cdot \left(\sum_{n=0}^7 e^{-j\frac{\pi}{4}kn} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^7 \left(e^{j\frac{\pi}{4}n(1-k)} + e^{-j\frac{\pi}{4}n(k+1)} \right) \right)
\end{aligned}$$

Es gilt auch folgender Zusammenhang: (Dirac-Kamm)

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[k + nN]$$

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{8} \cdot \left(8 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[k + 8n] + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^7 \left(e^{j\frac{\pi}{4}n(1-k)} + e^{-j\frac{\pi}{4}n(k+1)} \right) \right) \\
c_k &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[k + 8n] + \frac{1}{2} \left(\underbrace{\frac{1}{8} \sum_{n=0}^7 e^{-j\frac{\pi}{4}n(k-1)}}_{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[k-1+8n]} + \underbrace{\frac{1}{8} \sum_{n=0}^7 e^{-j\frac{\pi}{4}n(k+1)}}_{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[k+1+8n]} \right) \\
c_k &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[k + 8n] + \frac{1}{2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[k-1+8n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[k+1+8n] \right)
\end{aligned}$$

Mit dem N -periodischen δ -Puls $\delta_N[k]$ kann man auch schreiben:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[k + nN] = \delta_N[k]$$

$$c_k = \delta_8[k] + \frac{1}{2} (\delta_8[k-1] + \delta_8[k+1])$$

b) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $-2 \leq n \leq 3$ und $x[n+6] = x[n]$.

Zuerst bestimmen wir uns die Periodendauer $N = T$:

Da für unser Signal gilt: $x[n+6] = x[n]$, ist unsere Periodendauer $N = T = 6$.

$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{n=-2}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot e^{-j\frac{2\pi}{6}kn} = \\
 c_k &= \frac{1}{6} \cdot \sum_{n=0}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{6}k(n-2)} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{n=0}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{6}kn} \cdot e^{j\frac{4\pi}{6}k} \\
 c_k &= \frac{1}{6} \cdot e^{j\frac{4\pi}{6}k} \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{6}kn}}_{\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 2^2} = \frac{1}{6} \cdot e^{j\frac{4\pi}{6}k} \cdot \sum_{n=0}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 2^2 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{6}kn} \\
 c_k &= \frac{4}{6} \cdot e^{j\frac{4\pi}{6}k} \cdot \sum_{n=0}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot e^{-j\frac{2\pi}{6}kn} = \frac{4}{6} \cdot e^{j\frac{4\pi}{6}k} \cdot \sum_{n=0}^5 \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}k}\right)^n =
 \end{aligned}$$

Die Summenformel der unendlichen Geometrischen Reihe:

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1 - q^N}{1 - q}$$

$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{2}{3} \cdot e^{j\frac{4\pi}{6}k} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}k}\right)^6}{1 - \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}k}\right)} = \frac{2}{3} \cdot e^{j\frac{4\pi}{6}k} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot e^{-j\frac{6\pi}{3}k}}{1 - \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}k}\right)} \\
 c_k &= \frac{2}{3} \cdot e^{j\frac{4\pi}{6}k} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \overbrace{e^{-j2\pi k}}^{=1}}{1 - \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}k}\right)} = \frac{2}{3} \cdot e^{j\frac{4\pi}{6}k} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}k}\right)}
 \end{aligned}$$

c) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - 3k]$

Zuerst bestimmen wir uns die Periodendauer $N = T$:

Da unser Signal so aufgebaut ist: $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - 3k]$, ist unsere Periodendauer $N = T = 3$.

Laut der Formelsammlung (Fourierreihen zeitdiskreter periodischer Signale → Einige Fourierreihen) gilt:

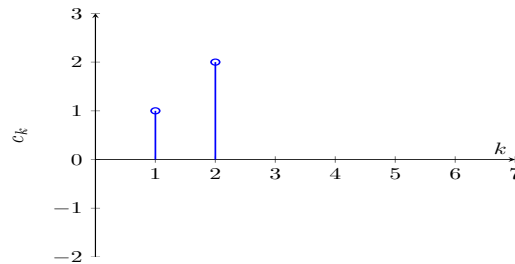
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n - mN] \Leftrightarrow \frac{1}{N} \forall k$$

Das schwierigste ist somit bereits geschafft, denn das N ist bei uns 3:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n - m3] \Leftrightarrow \frac{1}{3} \forall k$$

Beispiel 1.8

Gegeben ist ein unvollständiges Spektrum eines *reellen, periodischen, mittelwertfreien (ohne Gleichanteil) Signals* mit Periode $N = 4$.



Bestimmen Sie aus diesen Angaben das Zeitsignal $x[n]$, sowie die fehlenden Fourierreihen-koeffizienten c_0 und c_3 .

Lösung zu Beispiel 1.8

Unser Signal hat offensichtlich die gerade Periode $N = 4$. Aus dem Buch (Seite 23-25) wissen wir:

Hinweis 1.5 Damit $x[n]$ reell ist, muss c_k daher die folgenden Eigenschaften besitzen:
Gerade Periodendauer N :

$$c_0, c_{N/2}, \text{ reell}$$

$$c_k = c_{N-k}^*, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

Als vereinfachte **Fourierreihendarstellung für reellwertige Signale** $x[n]$ erhalten wir

$$x[n] = c_0 + c_{N/2}(-1)^n + 2\Re \left\{ \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right\}$$

Für unser Signal gilt:

$$\begin{aligned} x[n] &= c_0 + c_{\frac{4}{2}}(-1)^n + 2\Re \left\{ \sum_{k=1}^{\frac{4}{2}-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right\} \\ &= \underbrace{c_0}_{\text{Gleichanteil}} + c_2(-1)^n + 2\Re \left\{ c_1 e^{j\frac{2\pi}{4}n} \right\} \\ &= 2(-1)^n + 2\Re \left\{ e^{j\frac{\pi}{2}n} \right\} \end{aligned}$$

Da unser Signal periodisch ist, müssen wir nur die Werte für $n = 0, 1, \dots, 3$ berechnen:

n	0	1	2	3
x[n]	4	-2	0	-2

c_0 ist der Gleichanteil und somit 0. Für c_3 gilt bezüglich der Symmetrie $c_3 = c_1 = 1$.

2 Kapitel

Beispiel 2.1

Beweisen Sie für jedes der durch Eingangs/Ausgangsbeziehungen gegebenen Systeme die Gültigkeit oder Ungültigkeit der Systemeigenschaften *Linearität*, *Zeitinvarianz*, *Kausalität*, *Stabilität*. Wo es möglich ist, geben Sie die Impulsantwort $h[n]$ des Systems an.

a) $y[n] = x[n] - x[n-1]$

b) $y[n] = x[n]x[n-1]$

c) $y[n] = \sum_{k=n-2}^{n+4} x[k]$

d) $y[n] = x[n] + x[-n]$

e) $y[n] = x[2n]$

f) $y[n] = \frac{1}{n+0.5}x[n]$

g) $y[n] = x[n-1] + x[n] - x[n+1]$

Lösung zu Beispiel 2.1

Theorie

Hinweis 2.1 Für lineare Systeme gilt das **Superpositionsprinzip**.

$$y[n] = \mathcal{T}\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = a\mathcal{T}\{x_1[n]\} + b\mathcal{T}\{x_2[n]\} \quad \forall n, a, b$$

Hinweis 2.2 Ein System heißt dann *zeitinvariant*, wenn für jede beliebige Zeitverschiebung um n_0 gilt:

$$\mathcal{T}\{x[n - n_0]\} = y[n - n_0]$$

Für die Zeitinvarianz muss das Ausgangssignal den Zeitbezug zum Eingangssignal beibehalten und identisch reagieren. Dieses Prinzip wird auch als *Verschiebungsprinzip* bezeichnet.

Hinweis 2.3 Bei **kausalen Systemen** eilt die Systemantwort der Systemanregung nicht voraus. Die Systemantwort für jeden Zeitindex n_0 hängt nur von Signalwerten $x[n]$ zu Zeitpunkten $n \leq n_0$, also von vergangenen Eingangssignalwerten, ab. Daraus folgt mit der Faltungssumme:

$$y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \underbrace{x[n_0 - k]}_{\leq n_0}$$

als Konsequenz für die **Impulsantwort kausaler Systeme**

$$h[n] = 0 \quad \text{für} \quad n < 0$$

Hinweis 2.4 Ein System, für das folgende Gleichung erfüllt ist, wird **BIBO-stabiles System** (BIBO = Bounded Input Bounded Output) genannt.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

Filter mit einer Impulsantwort endlicher Dauer sind daher immer stabil.

Beispiel

a) $y[n] = x[n] - x[n-1]$

Zuerst testen wir die Linearität mit dem Superpositionsprinzip. Das Eingangs/Ausgangsverhältnis ist definiert mit:

$$y[n] = \mathcal{T}\{x[n]\} = x[n] - x[n-1]$$

Für die **Linearität** muss also gelten:

$$y[n] = \mathcal{T}\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = a\mathcal{T}\{x_1[n]\} + b\mathcal{T}\{x_2[n]\} \quad \forall n, a, b$$

Wenden wir das auf unser Verhältnis an:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\{ax[n] + bx[n]\} &= a\mathcal{T}\{x[n]\} + b\mathcal{T}\{x[n]\} \\ ax[n] + bx[n] - ax[n-1] - bx[n-1] &= a(x[n] - x[n-1]) + b(x[n] - x[n-1]) \\ ax[n] - ax[n-1] + bx[n] - bx[n-1] &= ax[n] - ax[n-1] + bx[n] - bx[n-1] \\ &= q.e.d. \end{aligned}$$

Für die **Zeitinvarianz** überprüfen wir das Verschiebungsprinzip:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\{x[n - n_0]\} &= y[n - n_0] \\ x[n - n_0] - x[n - n_0 - 1] &= y[n - n_0] \\ &= q.e.d. \end{aligned}$$

Bei **kausalen Systemen** hängt die Systemantwort nur von vergangenen Eingangssignalwerten ab. Diese Eigenschaften können wir direkt herauslesen.

Die Impulsantwort $h[n]$ bekommen wir, indem wir als Eingangssignal $x[n] = \delta[n]$ den Dirac-Impuls verwenden.

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

Die Impulsantwort hat eine endliche Dauer und ist **immer stabil**.

b) $y[n] = x[n]x[n-1]$

Linearität

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\{ax[n] + bx[n]\} &= a\mathcal{T}\{x[n]\} + b\mathcal{T}\{x[n]\} \\ (ax[n] + bx[n])(ax[n-1] + bx[n-1]) &\neq ax[n]x[n-1] + bx[n]x[n-1] \\ x[n]x[n-1](a^2 + 2ab + b^2) &\neq x[n]x[n-1](a + b)\end{aligned}$$

Das System ist somit nicht linear.

Zeitinvarianz

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\{x[n - n_0]\} &= y[n - n_0] \\ x[n - n_0]x[n - n_0 - 1] &= y[n - n_0] \\ & q.e.d.\end{aligned}$$

Das System ist zeitinvariant.

Kausalität

Die Kausalität ergibt sich aus der Definition.

Stabilität

Für die Impulsantwort gilt:

$$h[n] = \delta[n]\delta[n-1]$$

Sie hat endliche Dauer und ist stabil.

c) $y[n] = \sum_{k=n-2}^{n+4} x[k]$

Linearität

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\{ax[n] + bx[n]\} &= a\mathcal{T}\{x[n]\} + b\mathcal{T}\{x[n]\} \\ \sum_{k=n-2}^{n+4} (ax[k] + bx[k]) &= a \sum_{k=n-2}^{n+4} x[k] + b \sum_{k=n-2}^{n+4} x[k] \\ a \sum_{k=n-2}^{n+4} x[k] + b \sum_{k=n-2}^{n+4} x[k] &= a \sum_{k=n-2}^{n+4} x[k] + b \sum_{k=n-2}^{n+4} x[k] \\ & q.e.d.\end{aligned}$$

Das System ist linear.

Zeitinvarianz

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\{x[n - n_0]\} &= y[n - n_0] \\ \sum_{k=n-n_0-2}^{n-n_0+4} x[k] &= y[n - n_0]\end{aligned}$$

Das System ist zeitinvariant.

Kausalität

Die Kausalität ist hier nicht gegeben, da $y[n]$ unter anderem von $x[n - 2]$ abhängt.

Stabilität

Die Impulsantwort ist:

$$h[n] = \sum_{k=n-2}^{n+4} \delta[k] = \delta[n - 2] + \delta[n - 1] + \delta[n] + \delta[n + 1] + \delta[n + 2] + \delta[n + 3] + \delta[n + 4]$$

Laut Beispielsammlung-Lösung wäre dies:

$$h[n] = \sigma[n + 4] - \sigma[n - 2]$$

Meiner Meinung nach wäre

$$h[n] = \sigma[n + 4] - \sigma[n - 2]$$

genauso korrekt.

d) $y[n] = x[n] + x[-n]$

Linearität

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\{ax[n] + bx[n]\} &= a\mathcal{T}\{x[n]\} + b\mathcal{T}\{x[n]\} \\ ax[n] + bx[n] + ax[-n] + bx[-n] &= a(x[n] + x[-n]) + b(x[n] + x[-n]) \\ a(x[n] + x[-n]) + b(x[n] + x[-n]) &= a(x[n] + x[-n]) + b(x[n] + x[-n]) \\ & q.e.d.\end{aligned}$$

Zeitinvarianz

$$\begin{aligned}y[n] &= x[n] + x[-n] = \mathcal{T}\{x[n]\} \\ \mathcal{T}\{x[n - n_0]\} &= x[n - n_0] + x[-n + n_0] \neq y[n - n_0] = x[n - n_0] + x[-n - n_0]\end{aligned}$$

Das System ist nicht zeitinvariant.

Kausalität

Setzen wir für n Werte < 0 ein, würde unser Ausgangssignal $y[n]$ von Werten $n_0 > n$ abhängen. Das System ist nicht kausal.

Stabilität

Wenn $|x[n]| < M$, dann gilt auch $|x[n] + x[-n]| < M$ und somit $|y[n]| < M$. Das System ist stabil.

e) $y[n] = x[2n]$

Linearität

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\{ax[n] + bx[n]\} &= a\mathcal{T}\{x[n]\} + b\mathcal{T}\{x[n]\} \\ ax[2n] + bx[2n] &= ax[2n] + bx[2n] \\ & q.e.d.\end{aligned}$$

Zeitinvarianz

$$\begin{aligned}y[n] &= x[2n] = \mathcal{T}\{x[n]\} \\ \mathcal{T}\{x[n - n_0]\} &= x[2n - 2n_0] \neq y[n - n_0] = x[2n - n_0]\end{aligned}$$

Das System ist nicht zeitinvariant.

Kausalität

Das System ist offensichtlich nicht kausal.

Stabilität

Wenn $|x[n]| < M$, dann gilt auch $|x[2n]| < M$ und somit $|y[n]| < M$. Das System ist stabil.

f) $y[n] = \frac{1}{n+0.5}x[n]$

Linearität

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\{ax[n] + bx[n]\} &= a\mathcal{T}\{x[n]\} + b\mathcal{T}\{x[n]\} \\ \frac{1}{n+0.5}(ax[n] + bx[n]) &= \frac{a}{n+0.5}x[n] + \frac{b}{n+0.5}x[n] \\ \frac{a}{n+0.5}x[n] + \frac{b}{n+0.5}x[n] &= \frac{a}{n+0.5}x[n] + \frac{b}{n+0.5}x[n] \\ & q.e.d.\end{aligned}$$

Zeitinvarianz

$$\begin{aligned}y[n] &= \frac{1}{n+0.5}x[n] = \mathcal{T}\{x[n]\} \\ \mathcal{T}\{x[n-n_0]\} &= \frac{1}{n-n_0+0.5}x[n-n_0] \neq y[n-n_0] = \frac{1}{n+0.5}x[n-n_0]\end{aligned}$$

Das System ist nicht zeitinvariant.

Kausalität

Da das Ausgangssignal nur von gleichen oder vergangenen Eingangswerten besteht, ist das System kausal.

Stabilität

Wenn $|x[n]| < M$, dann gilt auch $|\frac{1}{n+0.5}x[n]| < M$ und somit $|y[n]| < M$. Das System ist stabil.

g) $y[n] = x[n-1] + x[n] - x[n+1]$

Linearität

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\{ax[n] + bx[n]\} &= a\mathcal{T}\{x[n]\} + b\mathcal{T}\{x[n]\} \\ ax[n-1] + bx[n-1] + ax[n] + bx[n] - ax[n+1] - bx[n+1] \\ &= a(x[n-1] + x[n] - x[n+1]) + b(x[n-1] + x[n] - x[n+1])\end{aligned}$$

$$(x[n-1] + x[n] - x[n+1])(a+b) = (x[n-1] + x[n] - x[n+1])(a+b)$$

q.e.d.

Zeitinvarianz

$$y[n] = x[n-1] + x[n] - x[n+1] = \mathcal{T}\{x[n]\}$$

$$\mathcal{T}\{x[n-n_0]\} = x[n-n_0-1] + x[n-n_0] - x[n-n_0+1] = y[n-n_0]$$

Das System ist zeitinvariant.

Kausalität

$y[n]$ hängt von $x[n+1]$ ab, das System ist nicht kausal.

Stabilität

Wenn $|x[n]| < M, \forall n$, dann ist auch $|x[n-1] + x[n] - x[n+1]| < M$ und somit auch $|y[n]| < M$.

Impulsantwort

Die Impulsantwort ist gegeben mit:

$$h[n] = \delta[n-1] + \delta[n] - \delta[n+1]$$

Beispiel 2.2

Ein lineares, zeitinvariantes System (LTI-System) habe eine Impulsantwort $h[n] = \alpha^n \sigma[n]$. Berechnen Sie die Systemantworten $y[n]$ auf folgende Eingangssignale:

- a) $x[n] = \sigma[n]$
- b) $x[n] = \sigma[-n], \quad |\alpha| < 1$
- c) $x[n] = \sigma[n] + \sigma[-n + N] - 1$
- d) $x[n] = \sigma[n + N]\sigma[-n + N]$
- e) $x[n] = \beta^n \sigma[n]$, auch für $\beta = \alpha, \quad |\alpha| < 1, |\beta| < 1$

Lösung zu Beispiel 2.2

Theorie

Hinweis 2.5 Bei zeitinvarianten Systemen tritt bei Verschiebung des Eingangssignals, lediglich eine Verschiebung des Ausgangssignals aus. Für lineare, zeitinvariante Systeme gilt deshalb die grundlegende Eingangs/Ausgangsrelation (Faltungssumme):

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k]$$

Hinweis 2.6 Die Sprungfunktion $\sigma[n]$ ist definiert mit:

$$\sigma[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Hinweis 2.7 Wichtige Summenformeln von Reihen

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} N & a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a} & \text{sonst} \end{cases}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, \quad |a| < 1$$

Lösung

- a) $x[n] = \sigma[n]$

Für das Ausgangssignal $y[n]$ müssen wir das Eingangssignal $x[n]$ mit der Impulsantwort

$h[n]$ falten. Wir können dabei zwischen folgenden zwei Varianten wählen:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k]$$

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma[n-k] \underbrace{\alpha^k}_{\substack{0 \text{ für } k < 0}} \underbrace{\sigma[k]}_{\substack{1 \text{ für } k \leq n}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sigma[n-k]}_{\substack{1 \text{ für } k \leq n}} \alpha^k \\ &= \sum_{k=0}^n \alpha^k = \begin{cases} (n+1)\sigma[n] & \alpha = 1 \\ \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\sigma[n] & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Das $\sigma[n]$ kommt daher, dass das Eingangssignal nur für positive n Werte definiert ist.

b) $x[n] = \sigma[-n]$, $|\alpha| < 1$

Ich wähle dieses mal die erste Variante:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\sigma[-k]}_{\substack{1 \text{ für } k \leq 0}} \alpha^{n-k} \sigma[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^0 \alpha^{n-k} \sigma[n-k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{n+k} \sigma[n+k] \end{aligned}$$

Wir unterscheiden nun die zwei Fälle $n < 0$ und $n \geq 0$. Für $n \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{n+k} \underbrace{\sigma[n+k]}_{=1} \\ &= \alpha^n \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \\ &= \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \end{aligned}$$

Für $n < 0$ wird $y[n]$:

$$\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{n+k} \underbrace{\sigma[n+k]}_{=1 \text{ für } k \geq -n} \\
&= \sum_{k=-n}^{\infty} \alpha^{n+k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{n+k} - \sum_{k=0}^{-n-1} \alpha^{n+k} \\
&= \frac{\alpha^n}{1-\alpha} - \alpha^n \frac{1-\alpha^{-n}}{1-\alpha} \\
&= \frac{\alpha^n}{1-\alpha} - \frac{\alpha^n - 1}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}
\end{aligned}$$

c) $x[n] = \sigma[n] + \sigma[-n+N] - 1$

$$\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma[n-k]\alpha^k \underbrace{\sigma[k]}_{1 \text{ für } k \geq 0} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma[-n+k+N]\alpha^k \underbrace{\sigma[k]}_{1 \text{ für } k \geq 0} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k \underbrace{\sigma[k]}_{1 \text{ für } k \geq 0} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sigma[n-k]\alpha^k + \sum_{k=0}^{\infty} \sigma[-n+k+N]\alpha^k - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k
\end{aligned}$$

Wir benötigen erneut die Fallunterscheidung $n < 0$ und $n \geq 0$. Für $n \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sigma[n-k]}_{1 \text{ für } k \leq n} \alpha^k + \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sigma[-n+k+N]}_{1 \text{ für } k \geq n-N} \alpha^k - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \\
&= \sum_{k=0}^n \alpha^k + \sum_{k=n-N}^{\infty} \alpha^k - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \\
&= \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k - \sum_{k=0}^{n-N-1} \alpha^k - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \\
&= \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} - \frac{1-\alpha^{n-N}}{1-\alpha}
\end{aligned}$$

Für den Fall $n < 0$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sigma[n-k]}_{=0} \alpha^k + \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sigma[-n+k+N]}_{=1} \alpha^k - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = 0
\end{aligned}$$

Nur für positive n wird auch ein Ausgang erzeugt. Schlussendlich müssen wir nur noch die Ausgangskomponenten auf die Eingangskomponenten beschränken. $\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$ gilt nur für $n \geq 0$ und $\frac{1-\alpha^{n-N}}{1-\alpha}$ nur für $n \leq N$.

$$y[n] = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\sigma[n] - \frac{1-\alpha^{n-N}}{1-\alpha}\sigma[-n+N]$$

Achtung! Die eigentliche Lösung lautet $\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\sigma[n] - \frac{1-\alpha^{n-N}}{1-\alpha}\sigma[n-N-1]$. Wieso ist das so?

d) $x[n] = \sigma[n+N]\sigma[-n+N]$

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\sigma[n-k+N]}_{1 \text{ für } k \leq n+N} \underbrace{\sigma[-n+k+N]}_{1 \text{ für } k \geq N-n} \alpha^k \underbrace{\sigma[k]}_{1 \text{ für } k \geq 0} \\ &= \sum_{k=\max[N-n, 0]}^{n+N} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+N+1}}{1-\alpha} \end{aligned}$$

Achtung! Die richtige Lösung ist

$$\frac{1}{1-\alpha}((1-\alpha^{n+1+N})\sigma[n+N] - (1-\alpha^{n-N})\sigma[n-N-1])$$

e) $x[n] = \beta^n \sigma[n]$, auch für $\beta = \alpha$, $|\alpha| < 1, |\beta| < 1$

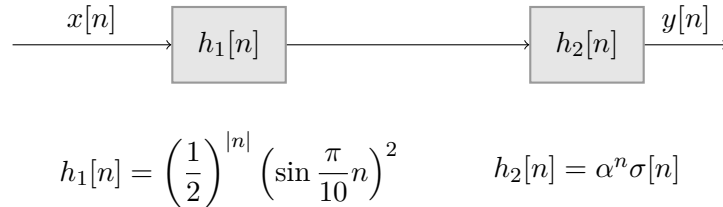
$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta^k \underbrace{\sigma[k]}_{1 \text{ für } k \geq 0} \alpha^{n-k} \underbrace{\sigma[n-k]}_{1 \text{ für } k \leq n} \\ &= \alpha^n \sum_{k=0}^n \beta^k \alpha^{-k} \\ &= \alpha^n \frac{\alpha - \alpha^{n+1} \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \sigma[n] \\ &= \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \sigma[n] = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha} \sigma[n] \end{aligned}$$

Für den Fall $\beta = \alpha$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k \underbrace{\sigma[k]}_{1 \text{ für } k \geq 0} \alpha^{n-k} \underbrace{\sigma[n-k]}_{1 \text{ für } k \leq n} \\ &= \alpha^n \sum_{k=0}^n 1 = \alpha^n (n+1) \sigma[n] \end{aligned}$$

Beispiel 2.3

Das abgebildete System besteht aus zwei LTI-Systemen mit den Impulsantworten $h_1[n]$ und $h_2[n]$. Berechnen Sie die Antwort $y[n]$ des Gesamtsystems auf das Eingangssignal $x[n] = \delta[n] - \alpha\delta[n-1]$, $|\alpha| < 1$.



Lösung zu Beispiel 2.3

Definition 2.1 (δ -Einsimpuls)

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

Definition 2.2 (σ -Sprungfunktion)

$$\sigma[n] = \begin{cases} 0 & \text{für } n < 0 \\ 1 & \text{für } n \geq 0 \end{cases}$$

Das Ausgangssignal $y[n]$ eines linearen, zeitinvarianten Systems mit der Sprungantwort $h[n]$ und dem Eingangssignal $x[n]$ kann mit folgender Formel berechnet werden:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k]$$

Ein System heißt BIBO(Bounded Input, Bounded Output)-Stabil, wenn gilt:

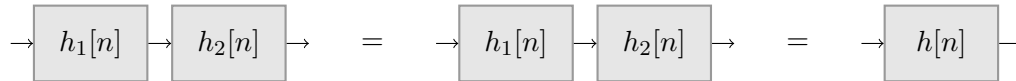
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

\Rightarrow Systeme mit endlich langer Impulsantwort sind immer stabil.

Bei der Kettenschaltung (Kaskadenschaltung (Reihenschaltung)) 2-er stabiler LTI-Systeme mit Impulsantworten $h_1[n]$ und $h_2[n]$ folgt:

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[k]h_2[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[n-k]h_2[k]$$

⇒ Es ist die Reihenfolge der Systeme egal:



Im folgenden muss oft die folgende (oder eine ähnliche) Gleichung gelöst werden:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k]x[n-k]$$

Es ist ersichtlich, dass $\delta[k]$ nur an der Stelle $k = 0$ den Wert 1 annimmt, ansonsten ist sie immer 0.

Somit kann man das Summenzeichen vereinfachen, denn alle Summanden außer dem, bei dem $k = 0$, sind 0.

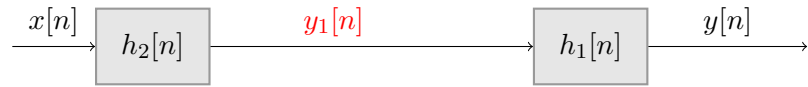
$$y[n] = \sum_{k=0}^0 \delta[k]x[n-k] = \delta[k]x[n-k]|_{k=0} = \underbrace{\delta[0]}_{=1} x[n-0] = x[n]$$

i) Prüfen, ob alle Systeme BIBO-Systeme sind:

$$\begin{aligned} x[n] &= \delta[n] - \alpha\delta[n-1] \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \underbrace{\delta[k]}_{=1 \text{ für } k=0} - \alpha \underbrace{\delta[k-1]}_{=1 \text{ für } k=1} \right| \quad \boxed{\Rightarrow \text{ mit } k=0 \\ &\quad \text{bzw. } k=1 \Rightarrow} \\ &\Rightarrow |1 - \alpha| < \infty \quad \forall |\alpha| < 1 \\ h_1[n] &= \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \left(\sin \frac{\pi}{10} n\right)^2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} h_1[n] = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} \left(\sin \frac{\pi}{10} k\right)^2 \right| < \infty \\ h_2[n] &= \alpha^n \sigma[n] \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} h_2[n] = 0 \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha^n \sigma[n]| < \infty \end{aligned}$$

D.h. alle Systeme sind BIBO-Systeme.

ii) Umstellen der Reihenfolge auf folgende Form: (Ist möglich, da alles BIBO-Systeme sind)



$$h_2[n] = \alpha^n \sigma[n]$$

$$h_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \left(\sin \frac{\pi}{10} n\right)^2$$

iii) Berechnen von $y_1[n]$:

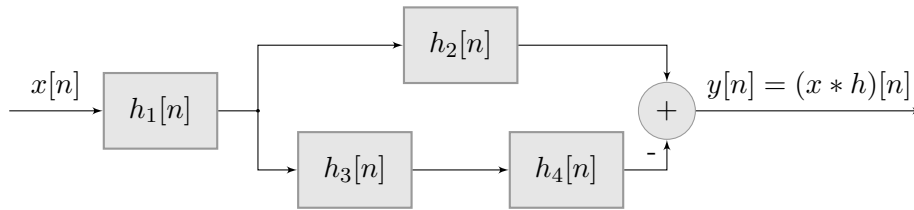
$$\begin{aligned} y_1[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x[k] h_2[n-k]) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta[k] - \alpha \delta[k-1]) \alpha^{n-k} \sigma[n-k] \\ y_1[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\delta[k]}_{=1 \text{ für } k=0} \alpha^{n-k} \sigma[n-k] - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha \underbrace{\delta[k-1]}_{=1 \text{ für } k=1} \alpha^{n-k} \sigma[n-k] \\ y_1[n] &= \alpha^n \sigma[n] - \alpha \cdot \alpha^{n-1} \sigma[n-1] = \alpha^n \underbrace{(\sigma[n] - \sigma[n-1])}_{\delta[n]} = \alpha^n \cdot \underbrace{\delta[n]}_{=1 \text{ für } n=0} \\ y_1[n] &= \alpha^0 \cdot \delta[n] = \delta[n] \end{aligned}$$

iv) Berechnen von $y[n]$:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (y_1[k] h_1[n-k]) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\delta[k]}_{=1 \text{ für } k=0} h_1[n-k] \quad \boxed{\Rightarrow \text{mit } k=0 \text{ folgt:}} \\ y[n] &= h_1[n-0] = h_1[n] \end{aligned}$$

Beispiel 2.4

Berechnen Sie die Gesamtimpulsantwort $h[n]$ des abgebildeten Systems, das aus einzelnen LTI-Systemen zusammengesetzt ist.



Dabei sei:

$$\begin{aligned}h_1[n] &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma[n] \\h_2[n] &= (n+1)\sigma[n] \\h_3[n] &= h_2[n] \\h_4[n] &= \delta[n-1]\end{aligned}$$

Lösung zu Beispiel 2.4

Definition 2.3 (δ -Einsimpuls)

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

Definition 2.4 (σ -Sprungfunktion)

$$\sigma[n] = \begin{cases} 0 & \text{für } n < 0 \\ 1 & \text{für } n \geq 0 \end{cases}$$

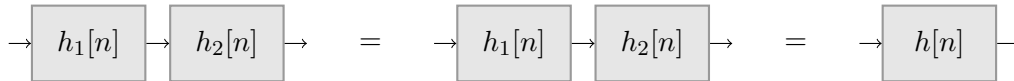
Das Ausgangssignal $y[n]$ eines linearen, zeitinvarianten Systems mit der Sprungantwort $h[n]$ und dem Eingangssignal $x[n]$ kann mit folgender Formel berechnet werden:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k]$$

Bei der Kettenschaltung (Kaskadenschaltung (Reihenschaltung)) 2-er stabiler LTI-Systeme mit Impulsantworten $h_1[n]$ und $h_2[n]$ folgt:

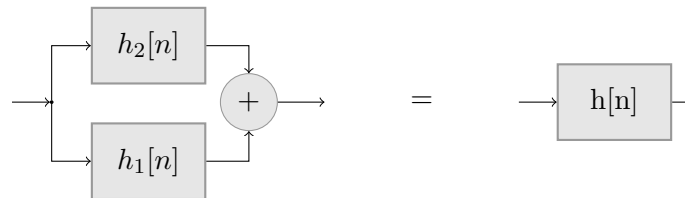
$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[k]h_2[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[n-k]h_2[k]$$

⇒ Es ist die Reihenfolge der Systeme egal:



Bei der Parallelschaltung 2-er LTI-Systeme mit Impulsantworten $h_1[n]$ und $h_2[n]$ folgt:

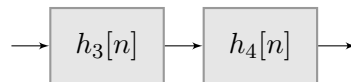
$$h[n] = h_1[n] + h_2[n]$$



TODO: wieso ist h_3 und h_4 stabil?

Am besten man zerlegt das gesamte System in kleine Teile:

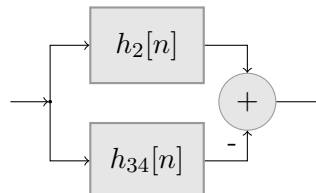
i) Zusammenfassen und Berechnen der Serienschaltung von $h_3[n]$ und $h_4[n]$ als $h_{34}[n]$:



Aus der Formel für die Reihenschaltung folgt:

$$\begin{aligned} h_{34}[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_3[k]h_4[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k+1)\sigma[k] \cdot \underbrace{\delta[n-k-1]}_{=1 \text{ für } k=n-1} \\ h_{34}[n] &= (n-1)\sigma[n-1] = n\sigma[n-1] \end{aligned}$$

ii) Zusammenfassen und Berechnen der Parallelschaltung von $h_2[n]$ und $h_{34}[n]$ als $h_{2||34}[n]$:

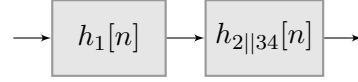


Aus der Formel für die Reihenschaltung folgt:

$$h_{2||34}[n] = h_2[n] - h_{34}[n] = (n+1)\sigma[n] - n\sigma[n-1] = \underbrace{n\sigma[n] - n\sigma[n-1]}_{n\delta[n]} + \sigma[n]$$

$$h_{2||34}[n] = n\delta[n] + \sigma[n]$$

iii) Zusammenfassen und Berechnen der Serienschaltung von $h_1[n]$ und $h_{2||34}[n]$ als $h[n]$:



Definition 2.5 (Geometrische Reihe)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \quad \forall |a| < 1 \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} N & a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a} & \text{sonst } \forall N \geq 0 \end{cases}$$

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[k] h_{2||34}[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \sigma[k] ((n-k)\delta[n-k] + \sigma[n-k])$$

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \sigma[k] (n-k) \underbrace{\delta[n-k]}_{=1 \text{ für } k=n} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \sigma[k] \sigma[n-k]$$

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma[n] \underbrace{(n-n)}_{=0} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \underbrace{\sigma[k]}_{=1 \text{ für } k \geq 0} \underbrace{\sigma[n-k]}_{=1 \text{ für } n \geq k} \quad \boxed{\text{Somit geht } \sum \text{ von } k=0 \text{ bis } n}$$

$$h[n] = \underbrace{\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k}_{\text{Geom. Reihe}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 2 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$h[n] = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n \geq 0 \quad \Rightarrow \quad h[n] = \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \sigma[n]$$

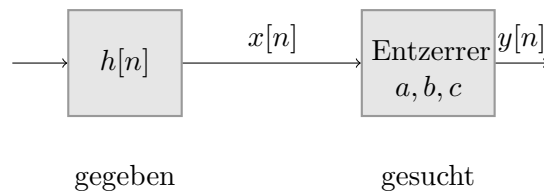
Beispiel 2.5

Gegeben ist ein LTI-System mit der Impulsantwort

$$h[n] = 12 \left(\left(-\frac{1}{3} \right)^n - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right) \sigma[n].$$

- a) Berechnen und skizzieren Sie die Sprungantwort $a[n]$ des Systems.
- b) Zur Vermeidung von Überschwingen der Sprungantwort $a[n]$ wird nun zum gegebenen System ein System in Kette geschaltet. Dieses Entzerrersystem wird durch die folgende Eingangs/Ausgangsbeziehung beschrieben:

$$y[n] = ax[n] + bx[n-1] + cx[n-2].$$



Wie sind die Koeffizienten a, b, c zu wählen, so dass das Gesamtsystem kein Überschwingen zeigt, d.h. die Sprungantwort des entzerrten Gesamtsystems ist $\tilde{a}[n] = \sigma[n - n_0]$?

- c) Wie groß sollte zweckmäßigerweise die Zeitverzögerung n_0 gewählt werden?

Lösung zu Beispiel 2.5

- a) Berechnen und skizzieren Sie die Sprungantwort $a[n]$ des Systems:

Das Ausgangssignal $y[n]$ eines linearen, zeitinvarianten Systems mit der Sprungantwort $h[n]$ und dem Eingangssignal $x[n]$ kann mit folgender Formel berechnet werden:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] \quad (2.1)$$

Ist das Eingangssignal eines Systems mit der Sprungantwort $h[n]$ die Sprungfunktion $\sigma[n]$, dann erhält man am Ausgang die Sprungantwort:

(Eingesetzt für $x[n] = \sigma[n]$ in equation (2.1) erhält man somit)

$$a[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma[n-k]h[k]$$

Definition 2.6 (Geometrische Reihe)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \quad \forall |a| < 1 \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} N & a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a} & \text{sonst } \forall N \geq 0 \end{cases}$$

$$a[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma[n-k] h[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma[n-k] 12 \left(\left(-\frac{1}{3} \right)^k - \left(-\frac{1}{2} \right)^k \right) \sigma[k]$$

$$a[n] = 12 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\sigma[k]}_{=1 \text{ für } k \geq 0} \underbrace{\sigma[n-k]}_{=1 \text{ für } n \geq k} \left(\left(-\frac{1}{3} \right)^k - \left(-\frac{1}{2} \right)^k \right) \right) \quad \boxed{\text{Somit geht } \sum \text{ von } k=0 \text{ bis } n}$$

$$a[n] = 12 \left(\underbrace{\sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{3} \right)^k}_{\text{Geom. Reihe}} - \underbrace{\sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2} \right)^k}_{\text{Geom. Reihe}} \right)$$

$$a[n] = 12 \left(\frac{1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{3}} - \frac{1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{2}} \right) \quad \forall n \geq 0 \Rightarrow \boxed{\text{Mit } \sigma[n] \text{ multiplizieren}}$$

$$a[n] = 12 \left(\frac{1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^{n+1}}{\frac{4}{3}} - \frac{1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1}}{\frac{3}{2}} \right) \sigma[n]$$

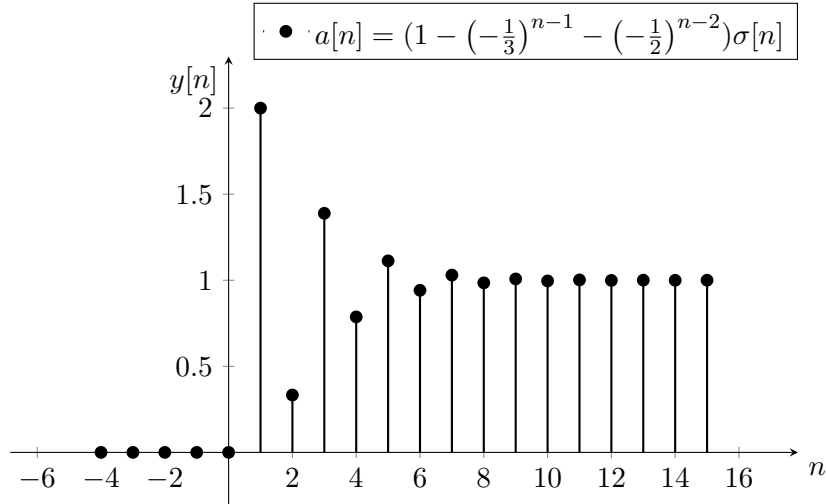
$$a[n] = 12 \left(\frac{3}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^{n+1} \right) - \frac{2}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right) \right) \sigma[n]$$

$$a[n] = 12 \left(\frac{9 \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^{n+1} \right) - 8 \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right)}{12} \right) \sigma[n]$$

$$a[n] = \left(1 - 9 \left(-\frac{1}{3} \right)^{n+1} + 8 \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right) \sigma[n]$$

$$a[n] = \left(1 - 9 \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} \frac{1}{9} + 8 \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-2} \left(-\frac{1}{8} \right) \right) \sigma[n]$$

$$a[n] = \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-2} \right) \sigma[n]$$



b) Berechnen der Koeffizienten a , b , c , um Überschwüngen zu vermeiden ($\tilde{a}[n] = \sigma[n - n_0]$)

$$\begin{aligned}
 y[n] &= \tilde{a}[n] = \sigma[n - n_0] = ax[n] + bx[n - 1] + cx[n - 2] \\
 \sigma[n - n_0] &= a \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-2} \right) \sigma[n] + b \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-2} - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-3} \right) \sigma[n - 1] \\
 &\quad + c \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-3} - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-4} \right) \sigma[n - 2]
 \end{aligned}$$

Das Problem sind nun die lästigen σ -Sprünge, die zu den Zeitpunkten $n = 0, 1, 2$ und n_0 auftreten.

Wenn wir jedoch ein sehr großes n betrachten ($n > n_0$ und $n > 2$), dann muss logischerweise die Gleichung noch genauso gelten, jedoch haben wir den Vorteil, dass wir uns das σ wegdenken können, denn es besitzen bereits alle σ -Sprünge den Wert 1.

Somit gilt $\forall n > n_0$ und $\forall n > 2$ folgendes:

$$\begin{aligned}
 1 &= a \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-2} \right) \cdot 1 + b \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-2} - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-3} \right) \cdot 1 \\
 &\quad + c \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-3} - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-4} \right) \cdot 1 \\
 1 &= a + b + c - a \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-3} \frac{1}{3^2} - b \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-3} \left(-\frac{1}{3} \right) - c \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-3} \\
 &\quad - a \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-4} \frac{1}{2^2} - b \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-4} \left(-\frac{1}{2} \right) - c \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-4} \\
 1 &= a + b + c - \left(\frac{a}{9} - \frac{b}{3} + c \right) \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-3} - \left(\frac{a}{4} - \frac{b}{2} + c \right) \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-4}
 \end{aligned}$$

Nun können wir mittels Koeffizientenvergleich die Werte für a , b und c bestimmen (das geht allerdings nur, weil $\left(-\frac{1}{3} \right)^{n-3}$ und $\left(-\frac{1}{2} \right)^{n-4}$ linear unabhängig sind)

i) $1 = a + b + c$

$$\text{ii) } 0 = \left(\frac{a}{9} - \frac{b}{3} + c\right) \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-3} \Rightarrow 0 = \left(\frac{a}{9} - \frac{b}{3} + c\right) \Rightarrow b = 3\left(\frac{a}{9} + c\right)$$

$$\text{iii) } 0 = \left(\frac{a}{4} - \frac{b}{2} + c\right) \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-4} \Rightarrow 0 = \left(\frac{a}{4} - \frac{b}{2} + c\right) \Rightarrow b = 2\left(\frac{a}{4} + c\right)$$

Somit erhalten wir:

$$2\left(\frac{a}{4} + c\right) = 3\left(\frac{a}{9} + c\right) \Rightarrow \frac{a}{2} + 2c = \frac{a}{3} + 3c \Rightarrow \frac{3a}{6} - \frac{2a}{3} = c \Rightarrow \frac{a}{6} = c \Rightarrow a = 6c$$

Somit können wir c berechnen:

$$1 = a + \underbrace{\frac{b}{2} + 2c}_{3c} = a + \underbrace{\frac{a}{2}}_{3c} + 2c + c = 6c + 3c + 3c = 12c \Rightarrow c = \frac{1}{12}$$

Somit können wir a berechnen:

$$a = 6c = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Somit können wir b berechnen:

$$b = \frac{a}{2} + 2c = \frac{1}{4} + \frac{2}{12} = \frac{5}{12}$$

Somit erhalten wir als neue Gleichung:

$$\sigma[n - n_0] = \frac{1}{2} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right) \cdot \sigma[n] \quad (2.2)$$

$$+ \frac{5}{12} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3} \right) \cdot \sigma[n - 1] \quad (2.3)$$

$$+ \frac{1}{12} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-3} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-4} \right) \cdot \sigma[n - 2] \quad (2.4)$$

c) Gesucht ist nun die Zeitverzögerung n_0 : Durch $\sigma[n]$, $\sigma[n - 1]$ und $\sigma[n - 2]$ folgt, dass $n_0 \geq 0$ sein muss. Wenn wir uns nun die Komponenten in equation (2.4) ansehen:

$$A = \frac{1}{2} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right) \cdot \sigma[n]$$

$$B = \frac{5}{12} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3} \right) \cdot \sigma[n - 1]$$

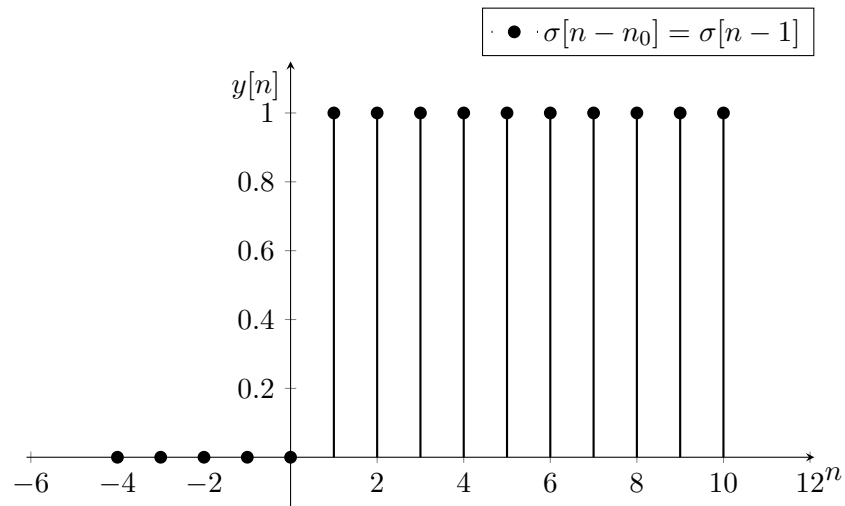
$$C = \frac{1}{12} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-3} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-4} \right) \cdot \sigma[n - 2]$$

Dann können wir uns die ersten paar Werte berechnen:

n	0	1	2	3	4	...
A	0	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{85}{216}$...
B	0	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{125}{216}$...
C	0	0	0	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{216}$...
Σ	0	1	1	1	1	...

Somit sieht man gut, dass $\Sigma = (A + B + C)$ ab $n \geq 1$ immer 1 ergibt.

Folglich muss $n_0 = 1$ sein.



TODO: Wie kommt man darauf, dass der Entzerrer aus 3 Komponenten besteht? Kann er auch aus 2 oder 1er Komponente bestehen?

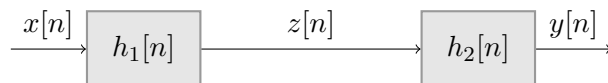
Beispiel 2.6

Ein System sei als Kettenschaltung zweier Teilsysteme realisiert. Das erste Teilsystem ist durch die Eingangs/Ausgangsbeziehung

$$z[n] = \sum_{k=n-N+1}^n x[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[n-k]x[k]$$

charakterisiert. Vom zweiten System ist die Impulsantwort bekannt:

$$h_2[n] = 2 \sin \frac{\pi}{N} \sin \frac{2\pi n}{N} \sigma[n]$$



- a) Berechnen und skizzieren Sie:
 - a) die Impulsantwort $h_1[n]$ des ersten Teilsystems,
 - b) die Impulsantwort $h[n]$ des Gesamtsystems,
- b) Berechnen Sie die Antwort $y[n]$ des Gesamtsystems auf das Eingangssignal $x[n] = \sin \frac{2\pi n}{N}$, $-\infty < n < \infty$.
- c) Vertauschen Sie jetzt die Reihenfolge der beiden Teilsysteme und wiederholen Sie Punkt b: Warum erhält man dabei ein anderes Ergebnis, obwohl doch beide Teilsysteme LTI-Systeme sind und die Faltungsoperation normalerweise assoziativ ist?

Lösung zu Beispiel 2.6

- a) Berechnen und skizzieren Sie:
 - a) die Impulsantwort $h_1[n]$ des ersten Teilsystems,

$$z[n] = \sum_{k=n-N+1}^n x[k]$$

Will man aus einer Summe mit Grenzen eine unendliche Summe erzeugen, die mit den Sprungfunktionen σ arbeitet, berechnet man anhand der Grenzen der Summe die Argumente der σ -Funktion:

Die untere Grenze lautet: $k = n - N + 1$, d.h. wir brauchen folgende Funktion:

$$f[k] = \begin{cases} 1 & k \geq n - N + 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \Rightarrow \sigma[k - n + N - 1]$$

Die obere Grenze lautet: $k = n$, d.h. wir brauchen folgende Funktion:

$$f[k] = \begin{cases} 1 & k \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \Rightarrow \sigma[-k + n]$$

$k - n$ das Argument der σ -Funktion: $\sigma[k - n]$.

Anschließend müssen wir nur noch beide Grenzen miteinander multiplizieren:

$$z[n] = \sum_{k=n-N+1}^n x[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\sigma[n - k] \cdot \sigma[-n + N - 1 + k])x[k]$$

Wird am Eingang der Dirac-Impuls $\delta[n]$ angelegt, erhält man am Ausgang die Impulsantwort $h[n]$.

Um die Impulsantwort zu berechnen, ersetzen wir in der Eingangs-/Ausgangsbeziehung das $x[n]$ durch $\delta[n]$:

$$\begin{aligned} h_1[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\sigma[-n + N - 1 + k] \cdot \sigma[n - k]) \underbrace{\delta[k]}_{=1 \text{ für } k=0} \\ h_1[n] &= \sigma[-n + N - 1] \cdot \sigma[n] \end{aligned}$$

Somit brauchen wir eine Fallunterscheidung: Dazu zerlegen wir die Funktion h_1 :

$\sigma[n] = 1$ für $n \geq 0$ und

$\sigma[-n + N - 1] = 1$ für $n \leq N - 1$.

Somit gilt:

$$h_1[n] = \begin{cases} 1 & \forall(n) \in [0, N - 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Und wir können $h_1[n]$ auch schreiben, als

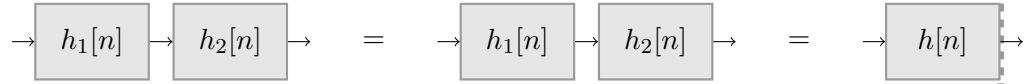
$$h_1[n] = \sigma[n] - \sigma[n - (N - 1)] = \sigma[n] - \sigma[n - N + 1]$$

b) die Impulsantwort $h[n]$ des Gesamtsystems,

Bei der Kettenschaltung (Kaskadenschaltung (Reihenschaltung)) 2-er stabiler LTI-Systeme mit Impulsantworten $h_1[n]$ und $h_2[n]$ folgt:

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[k]h_2[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[n-k]h_2[k]$$

⇒ Es ist die Reihenfolge der Systeme egal:



Somit können wir die Impulsantwort des Gesamtsystems wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} h[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[k]h_2[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[n-k]h_2[k] \\ h[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\sigma[n-k] - \sigma[n-k-N+1]) 2 \sin \frac{\pi}{N} \sin \frac{2\pi k}{N} \sigma[k] \\ h[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2 \sin \frac{\pi}{N} \sin \frac{2\pi k}{N} (\sigma[n-k] - \sigma[n-k-N+1]) \underbrace{\sigma[k]}_{=1 \text{ für } k \geq 0} \\ &\Rightarrow \boxed{\text{Somit ist ersichtlich, dass } h[n] = 0 \text{ für } k < 0} \\ h[n] &= \sum_{k=0}^{\infty} 2 \sin \frac{\pi}{N} \sin \frac{2\pi k}{N} (\sigma[n-k] - \sigma[n-k-N+1]) \underbrace{\sigma[k]}_{=1 \text{ für } k \geq 0} \\ h[n] &= \sum_{k=0}^{\infty} 2 \sin \frac{\pi}{N} \sin \frac{2\pi k}{N} \underbrace{\sigma[n-k]}_{=1 \text{ für } k \leq n} - \sum_{k=0}^{\infty} 2 \sin \frac{\pi}{N} \sin \frac{2\pi k}{N} \underbrace{\sigma[n-k-N+1]}_{=1 \text{ für } k \leq n-N+1} \\ h[n] &= \sum_{k=0}^n 2 \sin \frac{\pi}{N} \sin \frac{2\pi k}{N} - \sum_{k=0}^{n-N+1} 2 \sin \frac{\pi}{N} \sin \frac{2\pi k}{N} \\ h[n] &= 2 \sin \frac{\pi}{N} \left(\sum_{k=0}^n \sin \frac{2\pi k}{N} - \sum_{k=0}^{n-N+1} \sin \frac{2\pi k}{N} \right) \end{aligned}$$

Definition 2.7 (Eulersche Formel)

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi).$$

Außerdem gilt:

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \quad \text{bzw.} \quad \cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

Wir ziehen nun beide Summen aus der Gleichung raus:

$$\sum_{k=0}^n \sin \frac{2\pi k}{N} = \sum_{k=0}^n \frac{e^{j\frac{2\pi k}{N}} - e^{-j\frac{2\pi k}{N}}}{2j} = \frac{1}{2j} \left(\sum_{k=0}^n e^{j\frac{2\pi k}{N}} - \sum_{k=0}^n e^{-j\frac{2\pi k}{N}} \right)$$

$$\sum_{k=0}^{n-N+1} \sin \frac{2\pi k}{N} = \sum_{k=0}^{n-N+1} \frac{e^{j\frac{2\pi k}{N}} - e^{-j\frac{2\pi k}{N}}}{2j} = \frac{1}{2j} \left(\sum_{k=0}^{n-N+1} e^{j\frac{2\pi k}{N}} - \sum_{k=0}^{n-N+1} e^{-j\frac{2\pi k}{N}} \right)$$

Definition 2.8 (Geometrische Reihe)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \quad \forall |a| < 1 \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} N & a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a} & \text{sonst } \forall N \geq 0 \end{cases}$$

Mit der Geometrischen Reihe erhalten wir:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \sin \frac{2\pi k}{N} &= \frac{1}{2j} \left(\sum_{k=0}^n e^{j\frac{2\pi k}{N}} - \sum_{k=0}^n e^{-j\frac{2\pi k}{N}} \right) = \frac{1}{2j} \left(\sum_{k=0}^{j\frac{2\pi n}{N}} e^k - \sum_{k=0}^{-j\frac{2\pi n}{N}} e^k \right) \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1 - e^{j\frac{2\pi(n+1)}{N}}}{1 - e^{j\frac{2\pi(1)}{N}}} - \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi(n+1)}{N}}}{1 - e^{-j\frac{2\pi(1)}{N}}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-N+1} \sin \frac{2\pi k}{N} &= \frac{1}{2j} \left(\sum_{k=0}^{n-N+1} e^{j\frac{2\pi k}{N}} - \sum_{k=0}^{n-N+1} e^{-j\frac{2\pi k}{N}} \right) \\ &= \frac{1}{2j} \left(\sum_{k=0}^{j\frac{2\pi(n-N+1)}{N}} e^k - \sum_{k=0}^{-j\frac{2\pi(n-N+1)}{N}} e^k \right) \\ &= \frac{1}{2j} \left(\sum_{k=0}^{j\frac{2\pi(n-N+1)}{N}} e^k - \sum_{k=0}^{-j\frac{2\pi(n-N+1)}{N}} e^k \right) \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1 - e^{j\frac{2\pi(n+2)}{N}}}{1 - e^{j\frac{2\pi(1)}{N}}} - \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi(n+2)}{N}}}{1 - e^{-j\frac{2\pi(1)}{N}}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h[n] &= 2 \sin \frac{\pi}{N} \left(\sum_{k=0}^n \sin \frac{2\pi k}{N} - \sum_{k=0}^{n-N+1} \sin \frac{2\pi k}{N} \right) \\
h[n] &= 2 \sin \frac{\pi}{N} \left(\frac{1}{2j} \left(\frac{1 - e^{j \frac{2\pi(n+1)}{N}}}{1 - e^{j \frac{2\pi(1)}{N}}} - \frac{1 - e^{-j \frac{2\pi(n+1)}{N}}}{1 - e^{-j \frac{2\pi(1)}{N}}} \right) - \frac{1}{2j} \left(\frac{1 - e^{j \frac{2\pi(n+2)}{N}}}{1 - e^{j \frac{2\pi(1)}{N}}} - \frac{1 - e^{-j \frac{2\pi(n+2)}{N}}}{1 - e^{-j \frac{2\pi(1)}{N}}} \right) \right) \\
&\Rightarrow \boxed{\text{Mit Wolfram Alpha folgt:}} \\
h[n] &= 2 \sin \frac{\pi}{N} \left(\frac{1}{\cancel{2j}} \left(\cancel{2j} \csc \left(\frac{\pi}{N} \right) \sin \left(\frac{\pi n}{N} \right) \sin \left(\frac{\pi(n+1)}{N} \right) \right) - \frac{1}{\cancel{2j}} \left(\cancel{2j} \csc \left(\frac{\pi}{N} \right) \sin \left(\frac{\pi(n+1)}{N} \right) \sin \left(\frac{\pi(n+2)}{N} \right) \right) \right) \\
h[n] &= 2 \sin \frac{\pi}{N} \left(\left(\csc \left(\frac{\pi}{N} \right) \sin \left(\frac{\pi n}{N} \right) \sin \left(\frac{\pi(n+1)}{N} \right) \right) - \left(\csc \left(\frac{\pi}{N} \right) \sin \left(\frac{\pi(n+1)}{N} \right) \sin \left(\frac{\pi(n+2)}{N} \right) \right) \right) \\
&\Rightarrow \boxed{\text{Mit } \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)} \text{ folgt:}} \\
h[n] &= \cancel{2 \sin \frac{\pi}{N}} \left(\left(\frac{1}{\cancel{\sin \left(\frac{\pi}{N} \right)}} \sin \left(\frac{\pi n}{N} \right) \sin \left(\frac{\pi(n+1)}{N} \right) \right) - \left(\frac{1}{\cancel{\sin \left(\frac{\pi}{N} \right)}} \sin \left(\frac{\pi(n+1)}{N} \right) \sin \left(\frac{\pi(n+2)}{N} \right) \right) \right) \\
h[n] &= 2 \left(\left(\sin \left(\frac{\pi n}{N} \right) \sin \left(\frac{\pi(n+1)}{N} \right) \right) - \left(\sin \left(\frac{\pi(n+1)}{N} \right) \sin \left(\frac{\pi(n+2)}{N} \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

- b) Berechnen Sie die Antwort $y[n]$ des Gesamtsystems auf das Eingangssignal $x[n] = \sin \frac{2\pi n}{N}$, $-\infty < n < \infty$.
- c) Vertauschen Sie jetzt die Reihenfolge der beiden Teilsysteme und wiederholen Sie Punkt b: Warum erhält man dabei ein anderes Ergebnis, obwohl doch beide Teilsysteme LTI-Systeme sind und die Faltungsoperation normalerweise assoziativ ist?

Beispiel 2.9

Sie sollen ein zeitdiskretes System untersuchen, von dem die Beziehung zwischen Eingangssignal $x[n]$ und Ausgangssignal $y[n]$ gegeben ist:

$$y[n] = \sum_{k=n-1}^{n+1} (x[k+1] - x[k] + x[k-1])$$

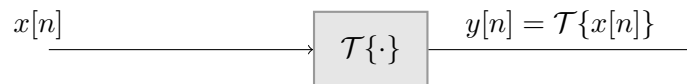
- a) Prüfen Sie (mit Beweis), ob das System die folgenden Eigenschaften besitzt:
 - 1) Linearität,
 - 2) Kausalität,
 - 3) Stabilität,
 - 4) Zeitinvarianz.
- b) Berechnen und skizzieren Sie die Impulsantwort und die Übertragungsfunktion des Systems.
- c) Welches Ausgangssignal liefert das System für $x[n] = (-1)^n \quad \forall n$?
- d) Nun wird das System mit dem Signal $x[n] = \lambda^n$ angeregt. Wie ist λ zu wählen, damit $y[n] \equiv 0$ ist?
- e) Geben Sie eine Realisierung des Systems an.

Lösung zu Beispiel 2.9

Als erstes werde ich die Formel für $y[n]$ etwas vereinfachen:

$$\begin{aligned}
 y[n] &= \sum_{k=n-1}^{n+1} (x[k+1] - x[k] + x[k-1]) \\
 y[n] &= x[n-1+1] - \cancel{x[n-1]} + x[n-1-1] + \cancel{x[n+1]} - x[n] + \cancel{x[n-1]} \\
 &\quad + x[n+1+1] - \cancel{x[n+1]} + x[n+1-1] \\
 y[n] &= x[n] + x[n-2] - \cancel{x[n]} + x[n+2] + \cancel{x[n]} \\
 y[n] &= x[n-2] + x[n] + x[n+2]
 \end{aligned}$$

Ein zeitdiskretes System verarbeitet das Eingangssignal $x[n]$ durch Anwendung eines zeitdiskret arbeitenden Algorithmus $\mathcal{T}\{\cdot\}$ zu einem Ausgangssignal $y[n]$.



a) Prüfen Sie (mit Beweis), ob das System die folgenden Eigenschaften besitzt:

Generell gilt lt. Tutor: sobald die Impulsantwort berechenbar ist, handelt es sich um ein LTI-System, somit sind die 2 Bedingungen Linearität und Zeitinvarianz immer erfüllt, wenn die Impulsantwort berechenbar ist. (siehe Punkt **b** auf Seite 58)

1) Linearität,

Definition 2.9 (Linearität(Superpositionsprinzip)) :

Bei einem linearen System ist die Antwort auf eine Summe von Eingangssignalen gleich der Summe der Einzelantworten:

$$y[n] = \mathcal{T} \left\{ \sum_i a_i x_i[n] \right\} = \sum_i a_i \mathcal{T} \{x_i[n]\} = \sum_i a_i y_i[n]$$

$$x[n] = \sum_i a_i x_i[n] \Rightarrow y[n] = \sum_i a_i y_i[n]$$

Zusätzlich besitzen lin. Systeme noch folgende Eigenschaft:

$$x[n] \equiv 0 \Rightarrow y[n] \equiv 0$$

Wir ersetzen einfach überall $x[n]$ durch $\sum_i a_i x_i[n]$:

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n-2] + x[n] + x[n+2] \Rightarrow \boxed{\text{setze } x[n] = \sum_i a_i x_i[n]} \\ y[n] &= \sum_i a_i x_i[n-2] + \sum_i a_i x_i[n] + \sum_i a_i x_i[n+2] \\ y[n] &= \sum_i a_i \underbrace{(x_i[n-2] + x_i[n] + x_i[n+2])}_{y_i[n]} \\ y[n] &= \sum_i a_i y_i[n] \Rightarrow \boxed{\text{linear}} \end{aligned}$$

Da $y[n] = \sum_i a_i y_i[n]$ das Ergebnis ist, das rauskommen muss, wenn es sich um ein lineares System handelt, muss es folglich linear sein.

2) Kausalität,

Definition 2.10 (Kausalität) :

Bei kausalen Systemen eilt die Systemantwort der Systemanregung nicht voraus. Die Systemantwort hängt nur von den vergangenen Eingangssignalwerten ab.

$$h[n] = 0 \quad \forall \quad n < 0$$

Wobei $h[n]$ die Impulsantwort darstellt.

Da die Impulsantwort folgende ist: (Berechnung und Plot, siehe Punkt **b** auf Seite 58)

$$h[n] = \delta[n-2] + \delta[n] + \delta[n+2]$$

Ist leicht ersichtlich, dass $h[n] \neq 0$ für $n < 0$: z.B: Einschalten zum Zeitpunkt n , dann müsste gelten: $h[n] = 0 \quad \forall n < 0$. Das ist aber nicht erfüllt, siehe Plot. \Rightarrow Akausal

3) Stabilität,

Definition 2.11 (Stabilität) :

Ein System heißt stabil, wenn es auf ein amplitudenbegrenztes Eingangssignal mit einem amplitudenbegrenzten Ausgangssignal antwortet. (BIBO...Bounded Input - Bounded Output)

Für zeitdiskrete LTI-Systeme gilt:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

\Rightarrow Systeme mit endlich langer Impulsantwort sind immer stabil.

Wobei $h[n]$ die Impulsantwort darstellt.

Da die Impulsantwort folgende ist: (Berechnung und Plot, siehe Punkt **b** auf der nächsten Seite)

$$h[n] = \delta[n-2] + \delta[n] + \delta[n+2]$$

folgt:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\delta[k-2]}_{=1 \text{ für } k=2} + \underbrace{\delta[k]}_{=1 \text{ für } k=0} + \underbrace{\delta[k+2]}_{=1 \text{ für } k=-2} = 3 < \infty \Rightarrow \text{BIBO-stab.}$$

4) Zeitinvarianz.

Definition 2.12 (Zeitinvarianz) :

Bei zeitinvarianten Systemen ändert sich die Form des Ausgangssignals nicht, wenn das Eingangssignal zu verschiedenen Zeitpunkten angelegt wird. (Es tritt nur eine Zeitverschiebung auf)

$$\mathcal{T}\{\delta[n-k]\} = h[n-k]$$

$$\mathcal{T}\{x[n-k]\} = y[n-k]$$

Im folgenden werden wir zuerst $x[n]$ durch $x[n-k]$ ersetzen, dann werden wir dieses $x[n-k]$ in die Formel von $y[n]$ anstatt dem $x[n]$ einsetzen.

Als nächstes müssen wir in der Formel von $y[n]$ das n durch $n-k$ ersetzen und mit dem obigen Ergebnis vergleichen.

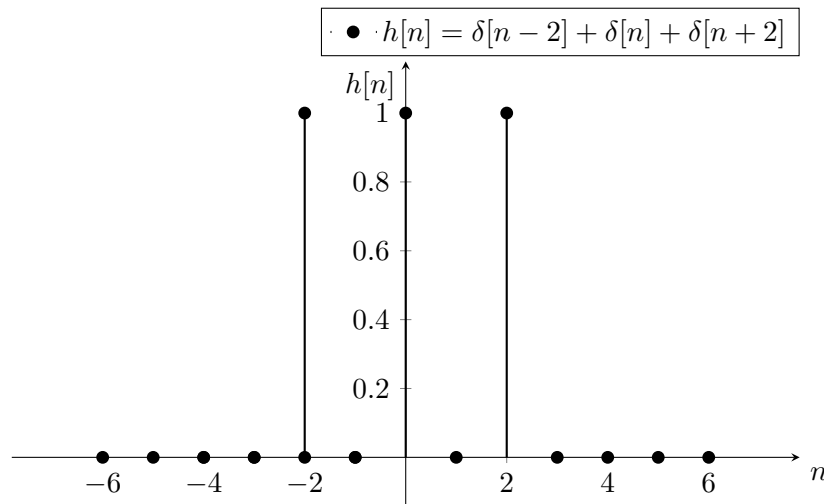
$$\begin{aligned} \mathcal{T}\{x[n-k]\} &= x[n-k-2] + x[n-k] + x[n-k+2] \\ y[n-k] &= x[n-k-2] + x[n-k] + x[n-k+2] \\ \Rightarrow \mathcal{T}\{x[n-k]\} &= y[n-k] \Rightarrow \text{zeitinvariant, da beide gleich.} \end{aligned}$$

b) Berechnen und skizzieren der Impulsantwort und der Übertragungsfunktion:

Wird am Eingang der Der Dirac-Impuls $\delta[n]$ angelegt, erhält man am Ausgang die Impulsantwort $h[n]$.

Um die Impulsantwort zu berechnen, ersetzen wir in der bereits vereinfachten Formel das Eingangssignal $x[n]$ durch den Impuls $\delta[n]$:

$$y[n] = x[n-2] + x[n] + x[n+2] \Rightarrow h[n] = \delta[n-2] + \delta[n] + \delta[n+2]$$



Nun wenden wir uns der Übertragungsfunktion zu:

Die Übertragungsfunktion $H(e^{j\theta})$ ist die Fouriertransformierte der Impulsantwort:

$$H(e^{j\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\theta k} = \mathcal{FT}\{h[n]\}$$

Wir setzen somit die vorher berechnete Impulsantwort $h[n]$ in die Summe ein:

$$\begin{aligned} H(e^{j\theta}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\theta k} \\ H(e^{j\theta}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\underbrace{\delta[n-2]}_{=1 \text{ für } k=2} + \underbrace{\delta[n]}_{=1 \text{ für } k=0} + \underbrace{\delta[n+2]}_{=1 \text{ für } k=-2} \right) e^{-j\theta k} \\ H(e^{j\theta}) &= e^{-j\theta-2} + \underbrace{e^{-j\theta 0}}_{=1} + e^{-j\theta 2} = e^{-j\theta 2} + 1 + e^{j\theta 2} \end{aligned}$$

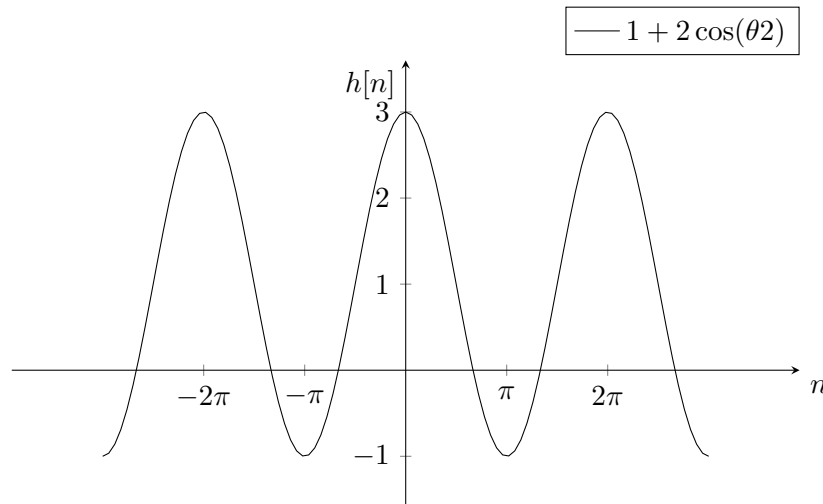
Definition 2.13 (Eulersche Formel)

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$$

Mit der eulerschen Formel folgt:

$$H(e^{j\theta}) = e^{-j\theta/2} + 1 + e^{j\theta/2} = 1 + \underbrace{\cos(-\theta/2)}_{=\cos(\theta/2)} + j \underbrace{\sin(-\theta/2)}_{=-\sin(\theta/2)} + \cos(\theta/2) + j \sin(\theta/2)$$

$$H(e^{j\theta}) = 1 + \cos(\theta/2) - \cancel{j \sin(\theta/2)} + \cos(\theta/2) + \cancel{j \sin(\theta/2)} = 1 + 2 \cos(\theta/2)$$



- c) Welches Ausgangssignal liefert das System für $x[n] = (-1)^n \quad \forall n$? Einsetzen von $(-1)^n$ für $x[n]$ in die vereinfachte Formel:

$$y[n] = x[n-2] + x[n] + x[n+2] = (-1)^{n-2} + (-1)^n + (-1)^{n+2}$$

Man kann $(-1)^n$ auch als \cos darstellen: $\cos(n\pi) = (-1)^n$

Mit dem \cos kann man zeigen, dass gilt:

$$\cos((n+2z)\pi) = \cos(n\pi) \Rightarrow (-1)^{n+2z} = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{Z}$$

Da gilt: $(-1)^{n+2z} = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{Z}$ folgt:

$$y[n] = (-1)^{n-2} + (-1)^n + (-1)^{n+2} = (-1)^n + (-1)^n + (-1)^n = 3 \cdot (-1)^n$$

- d) Nun wird das System mit dem Signal $x[n] = \lambda^n$ angeregt. Wie ist λ zu wählen, damit

$y[n] \equiv 0$ ist? Einsetzen von λ^n für $x[n]$ in die vereinfachte Formel:

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n-2] + x[n] + x[n+2] = \lambda^{n-2} + \lambda^n + \lambda^{n+2} = 0 \\ 0 &= \lambda^n(\lambda^{-2} + \lambda^0 + \lambda^2) \Rightarrow 0 = \lambda^{-2} + \lambda^0 + \lambda^2 \quad \boxed{\text{Multiplizieren mit: } \lambda^2} \\ 0 &= \lambda^0 + \lambda^2 + \lambda^4 \quad \boxed{\text{Subst.: } \lambda^{2x} = \alpha^x} \\ 0 &= \alpha^0 + \alpha^1 + \alpha^2 = 1 + \alpha + \alpha^2 \end{aligned}$$

Definition 2.14 (Quadratische Lösungsformel)

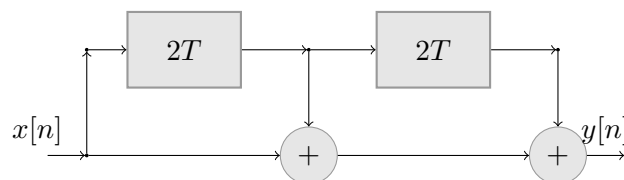
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Eingesetzt in Quadratische Lösungsformel:

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1}{2} \pm \sqrt{\frac{-3}{4}} \\ \alpha_{1,2} &= \frac{-1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \boxed{\text{Rücksubst: } \alpha^x = \lambda^{\frac{x}{2}} = \sqrt{\lambda^x}} \\ \lambda_{1,2,3,4} &= \sqrt{\frac{-1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}} \end{aligned}$$

- e) Geben Sie eine Realisierung des Systems an. Hier haben wir ein Problem: ein reales System kann nur kausal sein, wir haben hier aber ein akausales System: $\Rightarrow h[n]$ muss um 2 Zeiteinheiten verzögert werden und wir erhalten als neue Gleichung:

$$y[n] = x[n] + x[n-2] + x[n-4]$$



3 Kapitel

Beispiel 3.1

Berechnen Sie die Fouriertransformation $X(e^{j\theta})$ der folgenden Signale:

a) $x[n] = \alpha^n \sin \theta_0 n \sigma[n]$ für $|\alpha| < 1$

b) $x[n] = 2^n \sigma[-n]$

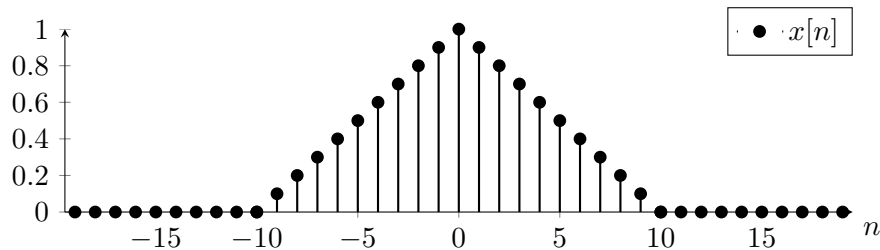
c) $x[n] = \frac{\sin \frac{\pi}{2} n}{\pi n} \frac{\sin \frac{\pi}{4} n}{\pi n}$

d) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$

e) $x[n] = n \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$

f) $x[n] = (-1)^n$

g)



Lösung zu Beispiel 3.1

a) $x[n] = \alpha^n \sin(\theta_0 n) \sigma[n]$ für $|\alpha| < 1$: Mit der Eulerschen Formel kann man den sin in die Exponentialform bringen:

Definition 3.1 (Eulersche Formel)

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$$

Bzw.

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \quad \text{und} \quad \cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$x[n] = \alpha^n \sin(\theta_0 n) \sigma[n] = \underbrace{\alpha^n \sigma[n]}_{=b[n]} \frac{e^{j\theta_0 n} - e^{-j\theta_0 n}}{2j} = \left(\underbrace{e^{j\theta_0 n} b[n]}_{=y[n]} - \underbrace{e^{-j\theta_0 n} b[n]}_{=z[n]} \right) \frac{1}{2j} = (y[n] - z[n]) \frac{1}{2j}$$

Zuerst berechne ich mir die Fouriertransformation von $b[n] = \alpha^n \sigma[n]$:

Aus der Formelsammlung (Fouriertransformationspaare) folgt:

$$a^n \sigma[n], \quad |a| < 1 \quad \frac{1}{1 - ae^{-j\theta}}$$

$$b[n] = \alpha^n \sigma[n] B(e^{j\theta}) = \frac{1}{1 - \alpha \cdot e^{-j\theta}}$$

Anschließend kann man sich die Fouriertransformation von $y[n] = e^{j\theta_0 n} b[n]$ berechnen:

Aus der Formelsammlung (Fouriertransformation zeitdiskreter Signale) folgt:

$$e^{j\theta_0 n} x[n] \quad X(e^{j(\theta - \theta_0)})$$

D.h. eine Multiplikation mit $e^{j\theta_0 n}$ führt dazu, dass das θ durch $\theta - \theta_0$ ersetzt wird:

$$y[n] = e^{j\theta_0 n} b[n] \quad B(e^{j(\theta - \theta_0)}) = \boxed{\text{Subst.: } \theta - \theta_0 = \tilde{\theta}} = B(e^{j\tilde{\theta}}) = \frac{1}{1 - \alpha \cdot e^{-j\tilde{\theta}}}$$

Rücksubstitution ($\tilde{\theta} = \theta - \theta_0$):

$$B(e^{j\tilde{\theta}}) = B(e^{j(\theta - \theta_0)}) = \frac{1}{1 - \alpha \cdot e^{-j(\theta - \theta_0)}} = Y(e^{j\theta})$$

Anschließend kann man sich die Fouriertransformation von $z[n] = e^{-j\theta_0 n} b[n]$ berechnen (funktioniert analog zu $y[n]$):

$$z[n] = e^{-j\theta_0 n} b[n] \quad B(e^{j(\theta + \theta_0)}) = \frac{1}{1 - \alpha \cdot e^{-j(\theta + \theta_0)}} = Z(e^{j\theta})$$

Definition 3.2 (Linearitätseigenschaft der Fouriertransformation)

$$a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \quad a_1 X_1(e^{j\theta}) + a_2 X_2(e^{j\theta})$$

Aus der Linearitätseigenschaft folgt:

$$\begin{aligned}
 x[n] &= (y[n] - z[n]) \frac{1}{2j} - \frac{1}{2j} \left(Y(e^{j\theta}) - Z(e^{j\theta}) \right) = X(e^{j\theta}) \\
 X(e^{j\theta}) &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{1 - \alpha \cdot e^{-j(\theta - \theta_0)}} - \frac{1}{1 - \alpha \cdot e^{-j(\theta + \theta_0)}} \right) \\
 X(e^{j\theta}) &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1 - \alpha \cdot e^{-j(\theta + \theta_0)} - (1 - \alpha \cdot e^{-j(\theta - \theta_0)})}{(1 - \alpha \cdot e^{-j(\theta - \theta_0)})(1 - \alpha \cdot e^{-j(\theta + \theta_0)})} \right) \\
 X(e^{j\theta}) &= \frac{1}{2j} \left(\frac{\cancel{1} - \alpha \cdot e^{-j(\theta + \theta_0)} - \cancel{1} + \alpha \cdot e^{-j(\theta - \theta_0)}}{1 - \alpha \cdot e^{-j(\theta - \theta_0)} - \alpha \cdot e^{-j(\theta + \theta_0)} + \alpha^2 \cdot e^{-j(\theta - \theta_0 + \theta + \theta_0)}} \right) \\
 X(e^{j\theta}) &= \frac{1}{2j} \left(\frac{\alpha e^{-j\theta} (-e^{-j\theta_0}) + e^{j\theta_0}}{1 + \alpha^2 \cdot e^{-j(2\theta)} - \alpha \cdot e^{-j\theta} (e^{j\theta_0} + e^{-j\theta_0})} \right) \\
 X(e^{j\theta}) &= \underbrace{\frac{(e^{j\theta_0}) - e^{-j\theta_0})}{2j}}_{=\sin(\theta_0)} \left(\frac{\alpha e^{-j\theta}}{1 + \alpha^2 \cdot e^{-j(2\theta)} - \frac{2}{2} \alpha \cdot e^{-j\theta} (e^{j\theta_0} + e^{-j\theta_0})} \right) \\
 X(e^{j\theta}) &= \frac{\alpha e^{-j\theta} \sin(\theta_0)}{1 + \alpha^2 \cdot e^{-j(2\theta)} - 2\alpha \cdot e^{-j\theta} \underbrace{\frac{(e^{j\theta_0} + e^{-j\theta_0})}{2}}_{=\cos(\theta_0)}} = \frac{\alpha e^{-j\theta} \sin(\theta_0)}{1 + \alpha^2 \cdot e^{-j(2\theta)} - 2\alpha \cdot e^{-j\theta} \cos(\theta_0)}
 \end{aligned}$$

b) $x[n] = 2^n \sigma[-n]$

Aus der Formelsammlung (Fouriertransformationspaare) folgt:

$$a^n \sigma[n], \quad |a| < 1 \quad \frac{1}{1 - ae^{-j\theta}}$$

$$\begin{aligned}
 x[n] &= 2^n \sigma[-n] = \left(\frac{1}{2} \right)^{-n} \sigma[-n] \quad \boxed{\text{Substituiere: } -n = \hat{n}} \\
 x[-\hat{n}] &= \left(\frac{1}{2} \right)^{\hat{n}} \sigma[\hat{n}]
 \end{aligned}$$

Aus der Formelsammlung (Fouriertransformation zeitdiskreter Signale) folgt:

$$x[-n] \quad X(e^{-j\theta})$$

Aus $x[-\hat{n}]X(e^{-j\hat{\theta}})$ und $\left(\frac{1}{2}\right)^{\hat{n}} \sigma[\hat{n}] \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\hat{\theta}}}$ folgt:

$$\begin{aligned} x[-\hat{n}] &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\hat{n}} \sigma[\hat{n}] \Leftrightarrow \\ X(e^{-j\hat{\theta}}) &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\hat{\theta}}} \quad \boxed{\text{Substituiere: } -\hat{\theta} = \theta} \\ X(e^{j\theta}) &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{j\theta}} \end{aligned}$$

c) $x[n] = \frac{\sin \frac{\pi}{2}n}{\pi n} \frac{\sin \frac{\pi}{4}n}{\pi n}$

$$x[n] = \underbrace{\frac{\sin \frac{\pi}{2}n}{\pi n}}_{y[n]} \underbrace{\frac{\sin \frac{\pi}{4}n}{\pi n}}_{z[n]}$$

Aus der Formelsammlung (Fouriertransformationspaare) folgt:

$$\frac{\sin \alpha n}{\pi n} X(e^{j\theta}) = \begin{cases} 1 & 0 \leq |\theta| \leq \alpha \\ 0 & \alpha < |\theta| < \pi \end{cases}$$

Somit können wir uns $y[n]$ und $z[n]$ berechnen:

$$y[n] = \frac{\sin \frac{\pi}{2}n}{\pi n} Y(e^{j\theta}) = \begin{cases} 1 & 0 \leq |\theta| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < |\theta| < \pi \end{cases}$$

$$z[n] = \frac{\sin \frac{\pi}{4}n}{\pi n} Z(e^{j\theta}) = \begin{cases} 1 & 0 \leq |\theta| \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 & \frac{\pi}{4} < |\theta| < \pi \end{cases}$$

Definition 3.3 (Parsevalschen Beziehung (siehe 4.38 im Buch))

$$x_1[n]x_2[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\eta}) X_2(e^{j(\theta-\eta)}) d\eta$$

Mit der Parsevalschen Beziehung folgt:

$$x[n] = y[n]z[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\eta}) \cdot Z(e^{j(\theta-\eta)}) d\eta$$

Da gilt: $Y(e^{j\eta}) = 1$ für $|\eta| \leq \frac{\pi}{2}$ sonst 0. Somit können wir das Integral etwas vereinfachen und die Grenzen etwas anpassen:

$$X(e^{j(\theta-\eta)}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Z(e^{j(\theta-\eta)}) d\eta$$

Substituiere: $\beta = \theta - \eta \Rightarrow d\beta = -d\eta$

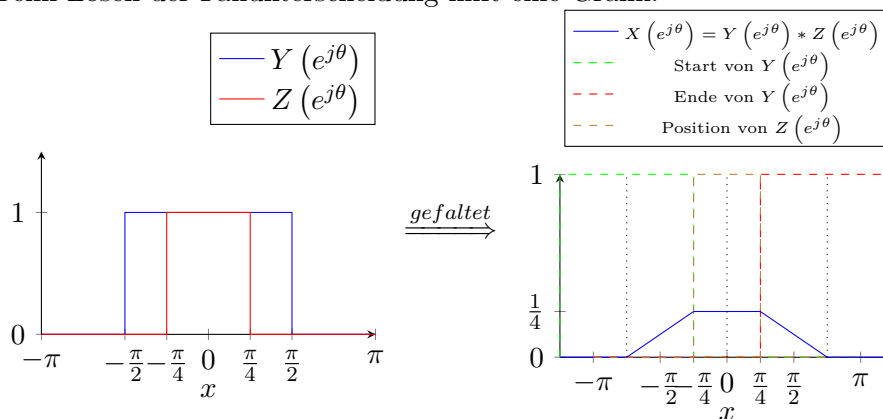
Grenzen substituieren: $\beta = \theta - \frac{\pi}{2}$ bzw. $\beta = \theta + \frac{\pi}{2}$.

$$X(e^{j\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta+\frac{\pi}{2}}^{\theta-\frac{\pi}{2}} Z(e^{j\beta}) (-d\beta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\theta+\frac{\pi}{2}}^{\theta-\frac{\pi}{2}} Z(e^{j\beta}) d\beta$$

wenn man die Grenzen vertauscht, entspricht das einer Multiplikation mit (-1) :

$$X(e^{j\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta-\frac{\pi}{2}}^{\theta+\frac{\pi}{2}} Z(e^{j\beta}) d\beta$$

Beim Lösen der Fallunterscheidung hilft eine Grafik:



Wenn man sich vorstellt, dass $Y(e^{j\theta})$ sich entlang der x-Achse nach rechts bewegt, dann sieht man in der Grafik, dass die Kurve $X(e^{j\theta})$ ansteigt, wenn $Y(e^{j\theta})$ die grüne Position eingenommen hat, dass sie stagniert, wenn der Mittelpunkt von $Y(e^{j\theta})$ den Wert $-\frac{\pi}{4}$ erreicht hat, dass sie wieder fällt, wenn der Mittelpunkt $\frac{\pi}{4}$ erreicht hat und dass sie 0 wird, wenn die rote Position angenommen wurde.

Weiters ist ersichtlich, dass es somit 5 verschiedene Intervalle gibt:

- $-\pi < \theta < -\frac{3\pi}{4}$
- $-\frac{3\pi}{4} < \theta < -\frac{\pi}{4}$
- $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$
- $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$
- $\frac{3\pi}{4} < \theta < \pi$

Somit kann das Integral aufgespalten werden:

$$X(e^{j\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta-\frac{\pi}{2}}^{\theta+\frac{\pi}{2}} Z(e^{j\beta}) d\beta = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{\theta-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} Z(e^{j\beta}) d\beta}_{=0, \text{ wenn } \theta \notin [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \text{ siehe }^a} + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} Z(e^{j\beta}) d\beta}_{=0, \text{ wenn } \theta \notin [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \text{ siehe }^b} + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta+\frac{\pi}{2}} Z(e^{j\beta}) d\beta}_{=0, \text{ wenn } \theta \notin [-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}] \text{ siehe }^c}$$

^aDa $Z(e^{j\theta})$ nur für $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ definiert ist, folgt: $-\frac{\pi}{4} \leq \theta - \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$

^bDa $Z(e^{j\theta})$ nur für $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ definiert ist, folgt: $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

^cDa $Z(e^{j\theta})$ nur für $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ definiert ist, folgt: $-\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq -\frac{\pi}{4}$

Da von dem Integral sowieso immer alle Summanden außer einem 0 sind, hier die Fallunterscheidung:

i) Für $|\theta| \leq \frac{3\pi}{4}$:

a) Für $-\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq -\frac{\pi}{4}$:

$$X(e^{j\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta+\frac{\pi}{2}} \underbrace{Z(e^{j\beta})}_{=1} d\beta = \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta+\frac{\pi}{2}} 1 d\beta = \frac{1}{2\pi} \beta \Big|_{\beta=\frac{\pi}{4}}^{\theta+\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2\pi} \left(\theta + \frac{3\pi}{4} \right)$$

b) Für $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$:

$$X(e^{j\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{Z(e^{j\beta})}_{=1} d\beta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 1 d\beta = \frac{1}{2\pi} \beta \Big|_{\beta=-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{4}$$

c) Für $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$:

$$X(e^{j\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \underbrace{Z(e^{j\beta})}_{=1} d\beta = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} 1 d\beta = \frac{1}{2\pi} \beta \Big|_{\beta=\theta-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2\pi} \left(-\theta + \frac{3\pi}{4} \right)$$

ii) Für $\frac{3\pi}{4} < |\theta| < \pi \Rightarrow Z(e^{j\beta}) = 0$:

d) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$

Da gilt:

$$|n| = \begin{cases} n & \text{für } n > 0 \\ -n & \text{für } n < 0 \end{cases}$$

Somit kann man auch schreiben:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} \cdot \sigma[-n] + \left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma[n] - \delta[n]$$

Das $-\delta[n]$ kommt daher, dass beide σ -Terme den Wert für $n = 0$ enthalten, somit ist der Wert an der Stelle 0 2x addiert worden und wir müssen ihn mit $-\delta[n]$ wieder subtrahieren.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} \cdot \sigma[-n]}_{=a[n]} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma[n]}_{=b[n]} - \underbrace{\delta[n]}_{=c[n]}$$

Aus der Formelsammlung (Fouriertransformationspaare) folgt:

$$a^n \sigma[n] \quad \frac{1}{1 - ae^{-j\theta}} \quad |a| < 1$$

$$a[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} \sigma[-n] A(e^{j\theta}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{j\theta}}$$

$$b[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma[n] B(e^{j\theta}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\theta}}$$

Aus der Formelsammlung (Fouriertransformationspaare) folgt:

$$\delta[n - N_0] \quad e^{-j\theta N_0}$$

$$c[n] = \delta[0] C(e^{j\theta}) = e^{-j\theta \cdot 0} = e^0 = 1$$

$$x[n] = a[n] + b[n] - c[n] \quad X(e^{j\theta}) = A(e^{j\theta}) + B(e^{j\theta}) - C(e^{j\theta})$$

$$\begin{aligned}
X(e^{j\theta}) &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{j\theta}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\theta}} - 1 \\
X(e^{j\theta}) &= \frac{1 - \frac{1}{2}e^{-j\theta} + 1 - \frac{1}{2}e^{j\theta}}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\theta})(1 - \frac{1}{2}e^{j\theta})} - 1 \\
X(e^{j\theta}) &= \frac{2 - \frac{1}{2}e^{-j\theta} - \frac{1}{2}e^{j\theta}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\theta} - \frac{1}{2}e^{j\theta} + \frac{1}{4}e^{j\theta-j\theta}} - 1 \\
X(e^{j\theta}) &= \frac{2 - \frac{1}{2}e^{-j\theta} - \frac{1}{2}e^{j\theta}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\theta} - \frac{1}{2}e^{j\theta} + \frac{1}{4}} - 1
\end{aligned}$$

Definition 3.4 (Eulersche Formel)

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$$

Bzw.

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \quad \text{und} \quad \cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$\begin{aligned}
X(e^{j\theta}) &= \frac{2 - \overbrace{\frac{1}{2}(e^{-j\theta} + e^{j\theta})}^{=\cos \theta}}{\underbrace{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}(e^{-j\theta} + e^{j\theta})}_{=\cos \theta}} - 1 = \frac{2 - \cos \theta}{\frac{5}{4} - \cos \theta} - 1 \\
X(e^{j\theta}) &= \frac{2 - \cancel{\cos \theta} - \frac{5}{4} + \cancel{\cos \theta}}{\frac{5}{4} - \cos \theta} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4} - \cos \theta} = \frac{3}{5 - 4 \cos \theta}
\end{aligned}$$

e) $x[n] = n \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$

lt. Punkt **d** auf der vorherigen Seite gilt:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \frac{3}{5 - 4 \cos \theta}$$

Aus der Formelsammlung (Fouriertransformation zeitdiskreter Signale) folgt:

$$nx[n]j \frac{dX(e^{j\theta})}{d\theta}$$

Setze: $y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$ somit folgt:

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} Y(e^{j\theta}) = \frac{3}{5 - 4 \cos \theta}$$

und

$$ny[n]j \frac{dY(e^{j\theta})}{d\theta} \Rightarrow n \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} j \frac{d \frac{3}{5-4 \cos \theta}}{d\theta} = 3j \frac{d}{d\theta} \frac{1}{5 - 4 \cos \theta} \quad \boxed{\text{mit Kettenregel}} \\ \boxed{u = 5 - 4 \cos \theta}$$

Definition 3.5 (Kettenregel)

$$f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Äußere Ableitung mal innere Ableitung.

$$X(e^{j\theta}) = -3j \frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{d\theta} = -3j \frac{1}{(5 - 4 \cos \theta)^2} \cdot \frac{d(5 - 4 \cos \theta)}{d\theta} = 12j \frac{1}{(5 - 4 \cos \theta)^2} \frac{d \cos \theta}{d\theta} \\ X(e^{j\theta}) = -12j \frac{\sin \theta}{(5 - 4 \cos \theta)^2}$$

f) $x[n] = (-1)^n$

Aus der Formelsammlung (Fouriertransformationspaare) folgt:

$$e^{j\theta_0 n} 2\pi \delta_{2\pi}(\theta - \theta_0)$$

Somit gilt es, dieses $(-1)^n$ in eine $e^{\text{irgendwas}}$ -Form zu bringen: Dazu überlegen wir uns, wann $e^{\text{irgendwas}}$ den Wert (-1) annimmt:

Definition 3.6 (Eulersche Formel)

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$$

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi) = -1 + j \cdot 0 \quad \boxed{\text{Durch Koeffizientenvergleich} \Rightarrow} \\ e^{j\varphi} = \underbrace{\cos(\varphi)}_{=-1} + j \cdot \underbrace{\sin(\varphi)}_{=0} \quad \boxed{\text{Beides ist erfüllt bei } \varphi = \pi} \\ e^{j\pi} = \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + j \cdot \underbrace{\sin(\pi)}_{=0}$$

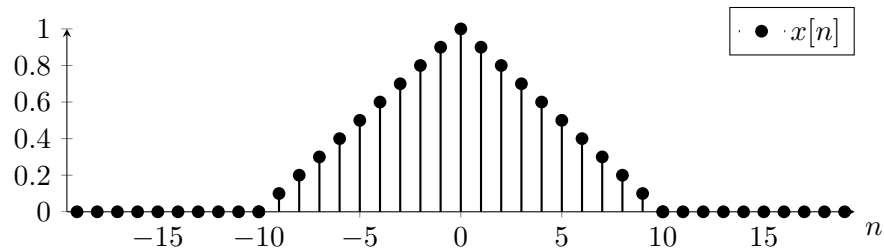
Somit kann man schreiben:

$$x[n] = (e^{j\pi})^n = (e^{j\pi n}) = (-1)^n$$

Die Fouriertransformation $X(e^{j\theta})$ lautet somit:

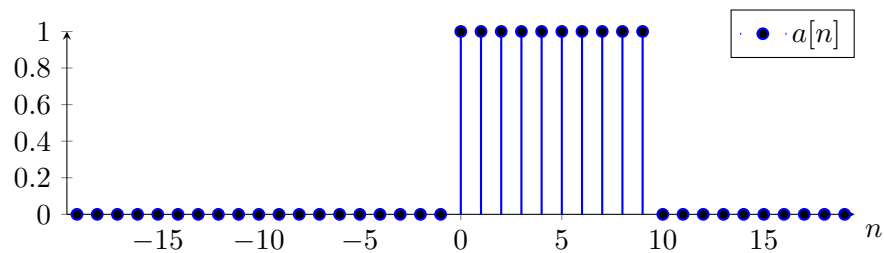
$$x[n] = (e^{j\pi n}) X(e^{j\theta}) = 2\pi\delta_{2\pi}(\theta - \pi)$$

g)



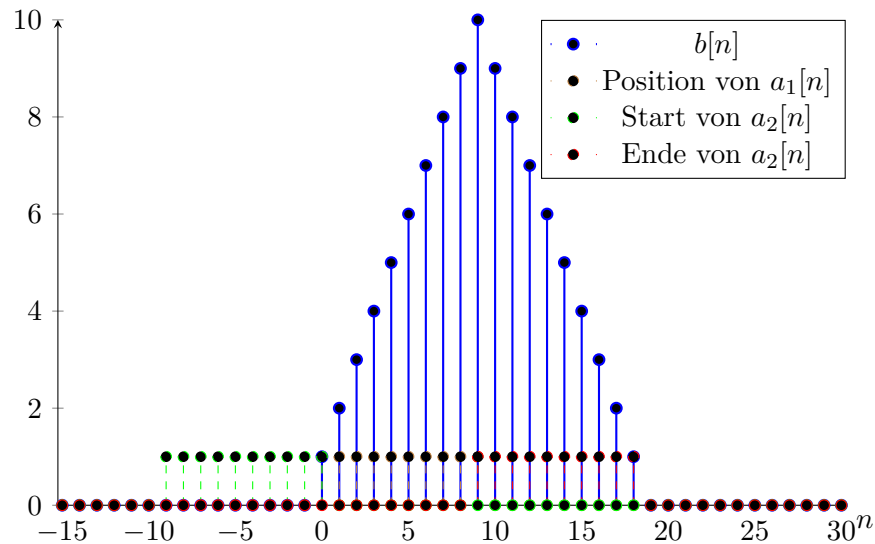
Wenn man sich das Signal ansieht, erkennt man gleich, dass man das Signal auch durch eine Faltung erreichen kann: Dazu definiere ich mir:

$$a[n] = \sigma[n] - \sigma[n - 10] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n < 10 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Die Faltung von $a[n]$ mit sich selbst ergibt folgendes:

$$b[n] = a[n] * a[n]$$



Somit stimmt unsere Zeichnung fast mit der in der Angabe überein. (Bis auf die Amplitude und die Zeitverschiebung)

Um nun unser Signal in der x-Achse zu verschieben, führen wir die Funktion $c[n]$ ein, sie ist die um 9 nach links verschobene Funktion $b[n]$.

$$c[n] = b[n + 9]$$

Um die Amplitude kümmern wir uns später, denn sie ist nur ein Faktor, der bei der Fouriertransformation sowieso erhalten bleibt.

Zuerst transformieren wir $a[n]$:

Aus der Formelsammlung (Fouriertransformationspaare) folgt:

$$\sigma[n] \quad \frac{1}{1 - e^{-j\theta}} + \pi \delta_{2\pi}(\theta)$$

$\delta_{2\pi}(\theta)$ ist die 2π -Periodische Fortsetzung des Dirac-Impulses:

$$\delta_{2\pi}(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta = 2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aus der Formelsammlung (Fouriertransformation zeitdiskreter Signale) folgt:

$$x[n - N_0] \quad e^{-j\theta N_0} X(e^{j\theta})$$

$$a[n] = \sigma[n] - \sigma[n-10] \quad \frac{1}{1-e^{-j\theta}} + \pi\delta_{2\pi}(\theta) - e^{-j\theta \cdot 10} \left(\frac{1}{1-e^{-j\theta}} + \pi\delta_{2\pi}(\theta) \right) = A(e^{j\theta})$$

Da $\delta_{2\pi}$ nur selten den Wert 1 besitzt, versuchen wir zu vereinfachen:

$$\begin{aligned} A(e^{j\theta}) &= \frac{1}{1-e^{-j\theta}} + \pi\delta_{2\pi}(\theta) - e^{-j\theta \cdot 10} \left(\frac{1}{1-e^{-j\theta}} + \pi\delta_{2\pi}(\theta) \right) \\ A(e^{j\theta}) &= (1-e^{-j\theta \cdot 10}) \left(\frac{1}{1-e^{-j\theta}} + \underbrace{\pi\delta_{2\pi}(\theta)}_{=1 \text{ für } \theta=2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}} \right) \\ A(e^{j\theta}) &= \underbrace{(1-e^{-j\theta \cdot 10}) \frac{1}{1-e^{-j\theta}}}_{=A_1} + \underbrace{(1-e^{-j\theta \cdot 10}) \pi\delta_{2\pi}(\theta)}_{=1 \text{ für } \theta=2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad =A_2} \end{aligned}$$

Definition 3.7 (Eulersche Formel)

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$$

Bzw.

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \quad \text{und} \quad \cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$A_1 = (1-e^{-j\theta \cdot 10}) \frac{1}{1-e^{-j\theta}} = \frac{1-e^{-j\theta \cdot 10}}{1-e^{-j\theta}} = \frac{e^0 - e^{-j\theta \cdot 10}}{e^0 - e^{-j\theta}} = \frac{e^{-j\theta \cdot 5} \overbrace{(e^{j\theta \cdot 5} - e^{-j\theta \cdot 5})}^{=2j \cdot \sin 5\theta}}{e^{-j\frac{\theta}{2}} \underbrace{(e^{j\frac{\theta}{2}} - e^{-j\frac{\theta}{2}})}_{=2j \cdot \sin \frac{\theta}{2}}}$$

$$A_1 = \frac{e^{-j\theta \cdot 5} \cancel{2j} \cdot \sin 5\theta}{e^{-j\frac{\theta}{2}} \cancel{2j} \cdot \sin \frac{\theta}{2}} = e^{j\frac{\theta}{2} - j\theta \cdot 5} \frac{\sin 5\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} = e^{-j\theta \frac{9}{10}} \frac{\sin 5\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

$$A_2 = \begin{cases} (1-e^{-j\theta \cdot 10}) & \theta = 2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} (1-e^{-j2k\pi \cdot 10}) & \forall k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$A_2 = \begin{cases} \left(1 - \underbrace{\cos(2\pi k 10)}_{=1} + j \underbrace{\sin(2\pi k 10)}_{=0} \right) & \forall k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} (1-1) & \forall k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = 0$$

$$A(e^{j\theta}) = A_1 + A_2 = A_1 + 0 = e^{-j\theta \frac{9}{10}} \frac{\sin 5\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

Um nun $b[n] = a[n] * a[n]$ zu berechnen, verwenden wir folgenden Zusammenhang:

Aus der Formelsammlung (Fouriertransformation zeitdiskreter Signale) folgt:

$$(x * y)[n] \quad X(e^{j\theta}) \cdot Y(e^{j\theta})$$

$$b[n] = a[n] * a[n] \quad A(e^{j\theta}) \cdot A(e^{j\theta}) = A^2(e^{j\theta}) = B(e^{j\theta})$$

$$B(e^{j\theta}) = \left(e^{-j\theta \frac{9}{10}} \frac{\sin 5\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} \right)^2 = e^{-j\theta \frac{18}{10}} \frac{\sin^2 5\theta}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} = e^{-j9\theta} \frac{\sin^2 5\theta}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

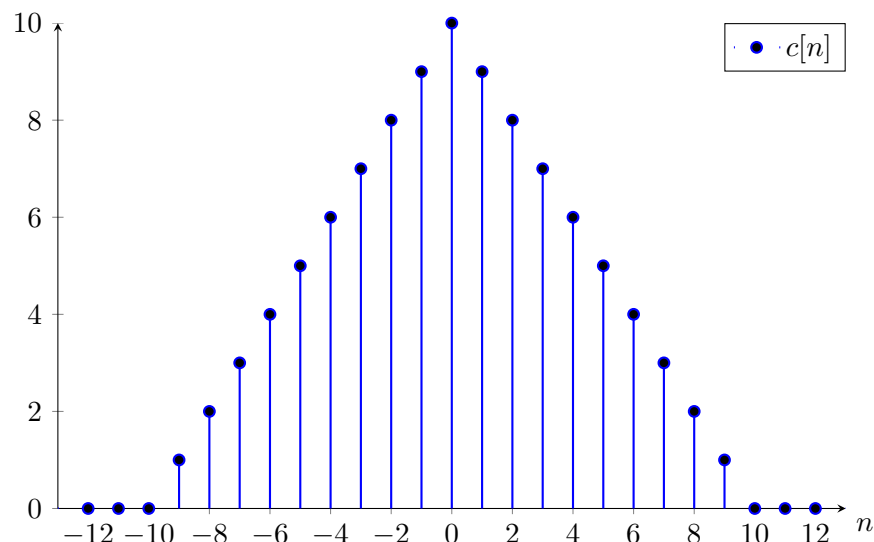
Nun berechnen wir uns noch die x -Verschiebung: $c[n] = b[n + 9]$

Aus der Formelsammlung (Fouriertransformation zeitdiskreter Signale) folgt:

$$x[n - N_0] \quad e^{-j\theta N_0} X(e^{j\theta})$$

$$c[n] = b[n + 9] \quad e^{-j\theta(-9)} B(e^{j\theta}) = \cancel{e^{j9\theta}} e^{-j9\theta} \frac{\sin^2 5\theta}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{\sin^2 5\theta}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} = C(e^{j\theta})$$

Somit sieht unser Signal wie folgt aus:



Abschließend muss noch die Amplitude berücksichtigt werden, denn unser Signal besitzt bei $n = 0$ den Wert 10. Das Signal in der Angabe hatte aber die Amplitude 1, somit muss das gesamte Signal durch 10 dividiert werden.

Definition 3.8 (Linearitätseigenschaft der Fouriertransformation)

$$a_1x_1[n] + a_2x_2[n] \rightarrow a_1X_1(e^{j\theta}) + a_2X_2(e^{j\theta})$$

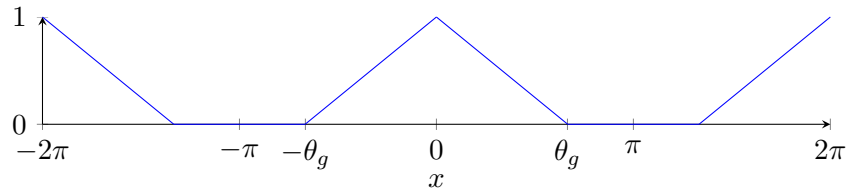
$$x[n] = \frac{c[n]}{10} \quad \frac{1}{10}C(e^{j\theta}) = X(e^{j\theta}) = \frac{1}{10} \frac{\sin^2 5\theta}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

Beispiel 3.2

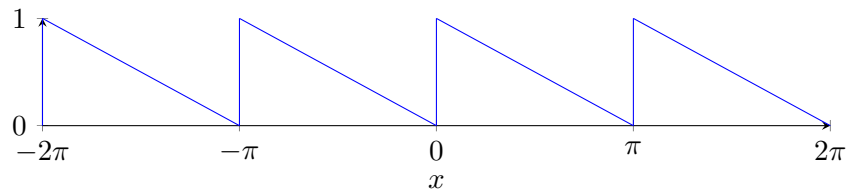
Berechnen Sie das Zeitsignal $x[n]$ für folgende Spektren:

a) $X(e^{j\theta}) = \cos^2 \theta$

b)



c)



d) $X(e^{j\theta}) = \frac{e^{-j\theta}}{1 + \frac{1}{6}e^{-j\theta} - \frac{1}{6}e^{-j2\theta}}$

Lösung zu Beispiel 3.2

a) $X(e^{j\theta}) = \cos^2 \theta$

Als erstes versuchen wir, das \cos^2 zu eliminieren:

Laut [wikipedia](#) gilt:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos(2x))$$

$$X(e^{j\theta}) = \cos^2 \theta = \frac{1}{2} (\cos(2\theta) + 1)$$

Definition 3.9 (Eulersche Formel)

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$$

Bzw.

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \quad \text{und} \quad \cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$X(e^{j\theta}) = \frac{1}{2} (\cos(2\theta) + 1) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{j2\theta} + e^{-j2\theta}}{2} + 1 \right)$$

Aus der Formelsammlung (Fouriertransformationspaare) folgt:

$$\delta[n - N_0] \quad e^{-j\theta N_0}$$

Definition 3.10 (Linearitätseigenschaft der Fouriertransformation)

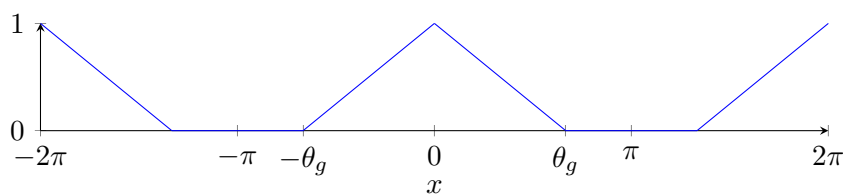
$$a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \quad a_1 X_1(e^{j\theta}) + a_2 X_2(e^{j\theta})$$

Somit versuchen wir nun $X(e^{j\theta})$ als Summe (denn es gilt ja auch die Linearitätseigenschaft) von $e^{\text{irgendwas}}$ darzustellen:

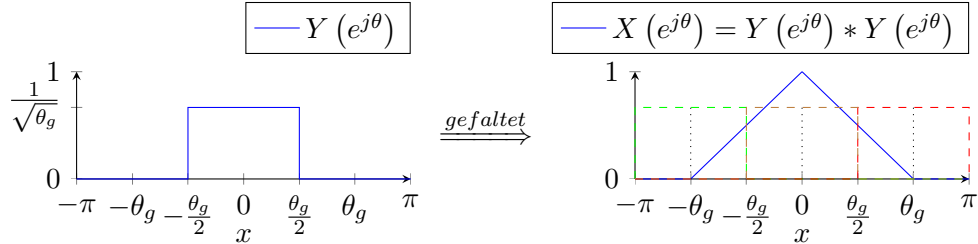
$$X(e^{j\theta}) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{j2\theta} + e^{-j2\theta}}{2} + 1 \right) = \underbrace{e^{j2\theta}}_{\delta[n+2]} \frac{1}{4} + \underbrace{e^{-j2\theta}}_{\delta[n-2]} \frac{1}{4} + \underbrace{e^0}_{\delta[n-0]} \frac{1}{2}$$

$$X(e^{j\theta}) = e^{j2\theta} \frac{1}{4} + e^{-j2\theta} \frac{1}{4} + e^0 \frac{1}{2} \frac{\delta[n+2]}{4} + \frac{\delta[n-2]}{4} + \frac{\delta[0]}{2} = x[n]$$

b)



Beim Lösen der Aufgabe hilft die Faltung:



Wenn

$$Y(e^{j\theta}) = \frac{1}{\sqrt{\theta_g}} \begin{cases} 1 & 0 \leq |\theta| \leq \frac{\theta_g}{2} \\ 0 & \frac{\theta_g}{2} < |\theta| < \pi \end{cases}$$

dann ist die Faltung des Signals mit sich selbst ($\forall \theta_g < \pi$)

$$X(e^{j\theta}) = Y(e^{j\theta}) * Y(e^{j\theta})$$

Nun haben wir das Signal und wir müssen es nur noch umtransformieren, um das Zeit-signal zu erhalten:

Definition 3.11 (Linearitätseigenschaft der Fouriertransformation)

$$a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \rightarrow a_1 X_1(e^{j\theta}) + a_2 X_2(e^{j\theta})$$

Aus der Formelsammlung (Fouriertransformationspaare) folgt:

$$\frac{\sin \alpha n}{\pi n}, \quad 0 < \alpha < \pi \quad X(e^{j\theta}) = \begin{cases} 1 & 0 \leq |\theta| \leq \alpha \\ 0 & \alpha < |\theta| < \pi \end{cases}$$

Somit können wir $Y(e^{j\theta}) \rightarrow y[n]$ berechnen:

$$Y(e^{j\theta}) = \frac{1}{\sqrt{\theta_g}} \begin{cases} 1 & 0 \leq |\theta| \leq \frac{\theta_g}{2} \\ 0 & \frac{\theta_g}{2} < |\theta| < \pi \end{cases} \quad \frac{1}{\sqrt{\theta_g}} \frac{\sin \frac{\theta_g}{2}}{\pi n} = y[n]$$

Aus der Formelsammlung (Fouriertransformation zeitdiskreter Signale) folgt:

$$x[n]y[n] \rightarrow \frac{1}{2\pi} (X(e^{j\theta}) * Y(e^{j\theta}))$$

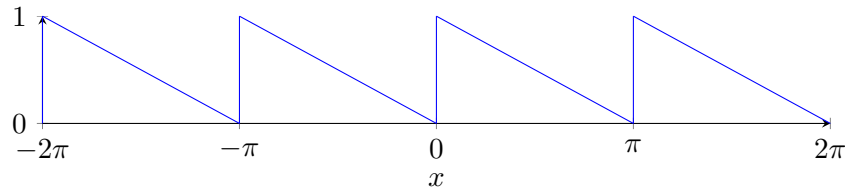
Somit können wir $X(e^{j\theta}) \rightarrow x[n]$ berechnen:

$$X(e^{j\theta}) = \frac{1}{2\pi} (Y(e^{j\theta}) * Y(e^{j\theta})) \quad y[n]y[n] = \frac{x[n]}{2\pi}$$

$$\Rightarrow 2\pi \cdot X(e^{j\theta}) = (Y(e^{j\theta}) * Y(e^{j\theta})) \quad 2\pi (y[n]y[n]) = 2\pi (y^2[n]) = x[n]$$

$$\Rightarrow x[n] = 2\pi \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\theta_g}} \frac{\sin \frac{\theta_g}{2}}{\pi n} \right)^2 = \frac{2\pi \sin^2 \frac{\theta_g}{2}}{\theta_g \cdot \pi^2 n^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{\theta_g}{2}}{\theta_g \cdot \pi n^2}$$

c)



Aufteilung von X in X_{pos} und X_{neg} :

$$X(e^{j\theta}) = X_{pos}(e^{j\theta}) + X_{neg}(e^{j\theta})$$

$$X_{pos} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left(1 - \frac{\theta}{n}\right) e^{j\theta n} d\theta$$

It. Tutor soll das partiell integriert dann das folgende ergeben:

$$\frac{1 + jn\pi}{2\pi^2 n^2} - \frac{(-1)^n}{2\pi^2 n^2}$$

Für die Berechnung von X_{neg} reicht die Verschiebung im Frequenzbereich:

$$X_{neg}[n] = X_{pos}(\theta + \pi) \Rightarrow x[n] = x_{pos}[n] + x_{neg}[n] = \begin{cases} x[n] = -\frac{1+(-1)^n}{j2\pi n} & \text{für } n \neq 0 \\ x[0] = \frac{1}{2} & \text{sonst} \end{cases}$$

ACHTUNG: Bitte frage mich nie wie das genau gerechnet werden muss, denn ich weiß es nicht!!! (Aber scheinbar kommt sowas eh nicht zum Test)

d) $X(e^{j\theta}) = \frac{e^{-j\theta}}{1 + \frac{1}{6}e^{-j\theta} - \frac{1}{6}e^{-j2\theta}}$

Bei diesem Beispiel suchen wir ein Transformationspaar, das ähnlich, wie die Angabe aussieht:

Aus der Formelsammlung (Fouriertransformationspaare) folgt:

$$a^n \sigma[n], \quad |a| < 1 \quad \frac{1}{1 - ae^{-j\theta}}$$

Nun gilt es, unsere Formel so umzuformen, um dieses Transformationspaar verwenden zu können:

$$X(e^{j\theta}) = \frac{e^{-j\theta}}{1 + \frac{1}{6}e^{-j\theta} - \frac{1}{6}e^{-j2\theta}} \Rightarrow \boxed{\text{Substituiere: } e^{-j\theta} = u} \Rightarrow X(u) = \frac{u}{-\frac{1}{6}u^2 + \frac{1}{6}u + 1}$$

Definition 3.12 (Quadratische Lösungsformel)

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Bestimmen der Nullstellen, mittels der Quadratischen Lösungsformel:

$$u_{1,2} = \frac{-\frac{1}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1}}{-2\frac{1}{6}} = \frac{-\frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{4}{6}}}{-\frac{1}{3}} = \frac{-\frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{24}{36}}}{-\frac{1}{3}} = \frac{-\frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36}}}{-\frac{1}{3}}$$

$$u_{1,2} = \frac{-\frac{1}{6} \pm \frac{5}{6}}{-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6} \mp \frac{5}{6}}{\frac{1}{3}} = 3 \left(\frac{1}{6} \mp \frac{5}{6} \right)$$

$$u_1 = 3 \frac{-4}{6} = 3 \frac{-2}{3} = -2 \quad \text{und} \quad u_2 = 3 \frac{6}{6} = 3$$

Nun können wir uns die Faktoren ausdrücken, indem wir in $(u - u_1)$, bzw. $(u - u_2)$ einsetzen:

$$-\frac{1}{6}u^2 + \frac{1}{6}u + 1 = (u + 2)(u - 3)x$$

Berechnen des Korrekturfaktors x :

$$-\frac{1}{6}u^2 + \frac{1}{6}u + 1 = (u + 2)(u - 3)x \Rightarrow \frac{1}{6}(-u^2 + u + 6) = (u^2 - 3u + 2u - 6)x$$

$$-\frac{1}{6}(u^2 - u - 6) = (u^2 - u - 6)x \Rightarrow x = -\frac{1}{6}$$

ACHTUNG: Die Berechnung des Korrekturfaktors ist unbedingt notwendig, denn die Beziehung $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = (x - d)(x - e)$ gilt nur, wenn der Faktor $a = 1$.

Jetzt können wir endlich die neue Form für $X(u)$ darstellen:

$$X(u) = \frac{u}{-\frac{1}{6}u^2 + \frac{1}{6}u + 1} = \frac{u}{(u + 2)(u - 3)(-\frac{1}{6})} = \frac{u}{(u + 2)(u - 3)} \quad (-6)$$

Nun müssen wir mittels Partialbruchzerlegung eine Summe erzeugen:

$$\frac{u}{(u + 2)(u - 3)} = \left(\frac{A}{u + 2} + \frac{B}{u - 3} \right)$$

$$\begin{aligned}\frac{u}{(u+2)(u-3)} &= \frac{A}{u+2} + \frac{B}{u-3} \\ u &= \frac{A(u+2)(u-3)}{u+2} + \frac{B(u+2)(u-3)}{u-3} \\ u &= A(u-3) + B(u+2)\end{aligned}$$

Einsetzen der Nullstelle $u_1 = -2$:

$$u = A(u-3) + B(u+2) \Rightarrow -2 = A(-2-3) + B(-2+2) \Rightarrow -2 = A \cdot (-5) + B \cdot 0 \Rightarrow A = -\frac{2}{5}$$

Einsetzen der Nullstelle $u_2 = 3$:

$$u = A(u-3) + B(u+2) \Rightarrow 3 = A(3-3) + B(3+2) \Rightarrow 3 = B \cdot 5 \Rightarrow B = \frac{3}{5}$$

Einsetzen für A und B und dann besitzen wir endlich eine äquivalente Summendarstellung unseres $X(u)$:

$$\begin{aligned}X(u) &= \frac{u}{-\frac{1}{6}u^2 + \frac{1}{6}u + 1} = \frac{u}{(u+2)(u-3)} (-6) = \left(\frac{-\frac{2}{5}}{u+2} + \frac{\frac{3}{5}}{u-3} \right) (-6) \\ X(u) &= \left(\frac{2}{u+2} + \frac{3}{u-3} \right) \left(-\frac{6}{5} \right) = \left(-\frac{6}{5} \right) \left(\frac{1}{\frac{u}{2}+1} + \frac{1}{\frac{u}{3}-1} \right)\end{aligned}$$

Aus der Formelsammlung (Fouriertransformationspaare) folgt:

$$a^n \sigma[n], \quad |a| < 1 \quad \frac{1}{1 - ae^{-j\theta}}$$

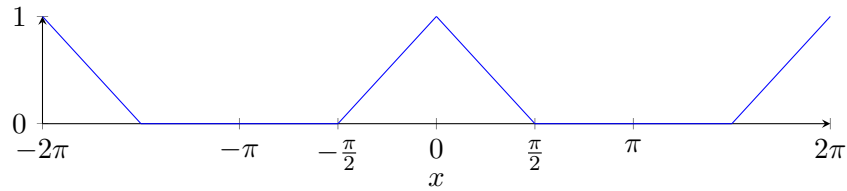
Rücksubstituieren: $u = e^{-j\theta}$

$$\begin{aligned}X(e^{-j\theta}) &= \left(-\frac{6}{5} \right) \left(\frac{1}{\frac{e^{-j\theta}}{2} + 1} + \frac{1}{\frac{e^{-j\theta}}{3} - 1} \right) = \frac{6}{5} \left(\frac{1}{-\frac{e^{-j\theta}}{2} - 1} + \frac{1}{-\frac{e^{-j\theta}}{3} + 1} \right) \\ X(e^{-j\theta}) &= \frac{6}{5} \left(\frac{1}{-1 - \frac{1}{2}e^{-j\theta}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\theta}} \right) = \frac{6}{5} \left(-\frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\theta}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\theta}} \right) \\ X(e^{-j\theta}) &= \frac{6}{5} \left(-\frac{1}{1 - (-\frac{1}{2})e^{-j\theta}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\theta}} \right) = \frac{6}{5} \left(-\left(-\frac{1}{2} \right)^n \sigma[n] + \left(\frac{1}{3} \right)^n \sigma[n] \right) = x[n] \\ x[n] &= \frac{6}{5} \left(\left(\frac{1}{3} \right)^n - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right) \sigma[n]\end{aligned}$$

Beispiel 3.6

Berechnen Sie das Zeitsignal $x[n]$ für folgende Spektren:

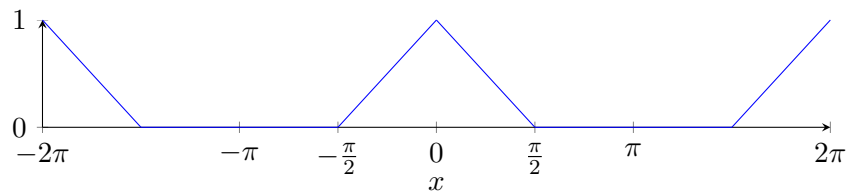
a)



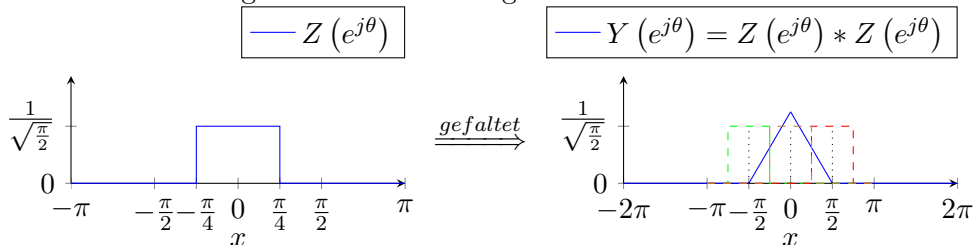
Lösung zu Beispiel 3.6

a)

b)



Beim Lösen der Aufgabe hilft die Faltung:



Wenn

$$Z(e^{j\theta}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cdot \begin{cases} 1 & 0 \leq |\theta| \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 & \frac{\pi}{4} < |\theta| < \pi \end{cases}$$

dann ist die Faltung des Signals mit sich selbst

$$Y(e^{j\theta}) = Z(e^{j\theta}) * Z(e^{j\theta})$$

Nun haben wir das Signal und wir müssen es nur noch umtransformieren, um das Zeitsignal zu erhalten:

Definition 3.13 (Linearitätseigenschaft der Fouriertransformation)

$$a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \quad a_1 X_1(e^{j\theta}) + a_2 X_2(e^{j\theta})$$

Aus der Formelsammlung (Fouriertransformationspaare) folgt:

$$\frac{\sin \alpha n}{\pi n}, \quad 0 < \alpha < \pi \quad X(e^{j\theta}) = \begin{cases} 1 & 0 \leq |\theta| \leq \alpha \\ 0 & \alpha < |\theta| < \pi \end{cases}$$

Somit können wir $Z(e^{j\theta})$ $z[n]$ berechnen:

$$Z(e^{j\theta}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cdot \begin{cases} 1 & 0 \leq |\theta| \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 & \frac{\pi}{4} < |\theta| < \pi \end{cases} \quad \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{4} n}{\pi n} = z[n]$$

Aus der Formelsammlung (Fouriertransformation zeitdiskreter Signale) folgt:

$$x[n]y[n] \quad \frac{1}{2\pi} \left(X(e^{j\theta}) * Y(e^{j\theta}) \right)$$

Somit können wir $Y(e^{j\theta})$ $y[n]$ berechnen:

$$\begin{aligned} Y(e^{j\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \left(Z(e^{j\theta}) * Z(e^{j\theta}) \right) \quad z[n]z[n] = \frac{y[n]}{2\pi} \\ \Rightarrow 2\pi \cdot Y(e^{j\theta}) &= \left(Z(e^{j\theta}) * Z(e^{j\theta}) \right) \quad 2\pi (z[n]z[n]) = 2\pi (z^2[n]) = y[n] \\ \Rightarrow y[n] &= 2\pi \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{4} n}{\pi n} \right)^2 = 2\pi \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\frac{\sin \frac{\pi}{4} n}{\pi n} \right)^2 = 4 \cdot \left(\frac{\sin \frac{\pi}{4} n}{\pi n} \right)^2 \end{aligned}$$