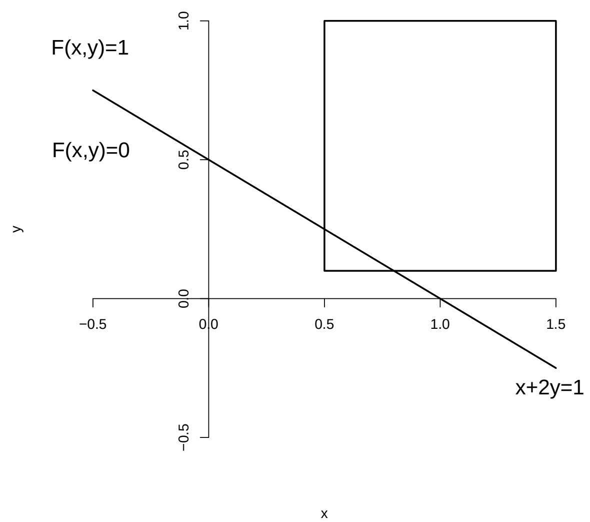
2. Dazu genügt es, vier Zahlen, $a < b$, $c < d$, zu finden, sodaß:

$$F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c) < 0$$

Wählt man beispielsweise $a = 0.5$, $b = 1.5$, $c = 0.1$, $d = 1$, so liegt die linke untere Ecke des Rechtecks $(a,c), (b,c), (b,d), (a,d)$ im Bereich $x + 2y < 1$, die anderen Eckpunkte liegen im Bereich $x + 2y > 1$. Aus der Definition von F folgt daher:

$$F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c) = 1 - 1 - 1 + 0 = -1$$



6. (a) Verallgemeinerte hypergeometrische Verteilung:

$$p(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{\binom{4}{x_1}\binom{4}{x_2}\binom{4}{x_3}\binom{4}{x_4}\binom{36}{12-\sum_{i=1}^4 x_i}}{\binom{52}{12}}$$

(b) Multinomialverteilung:

$$p(x_1,x_2,x_3,x_4) = \binom{12}{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ 12-\sum_{i=1}^4 x_i}\left(\frac{1}{13}\right)^{\sum_{i=1}^4 x_i}\left(\frac{9}{13}\right)^{12-\sum_{i=1}^4 x_i}$$

10. (a) Das Volumen unter der Dichte ist Eins:

$$c\int_0^2\int_0^x xy\,dy\,dx = c\int_0^2 x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{x} dx = c\int_0^2 \frac{x^3}{2}\,dx = c\,\frac{x^4}{8}\Bigg|_0^2 = 2c = 1 \quad\Longrightarrow\quad c = \frac{1}{2}$$

(b) Dies berechnet man analog zu (a) wie folgt:

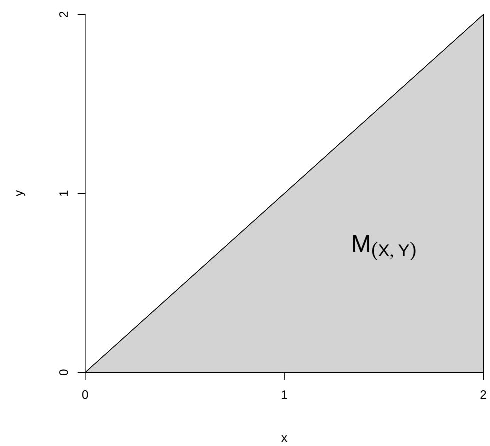
$$W\{X \le 1, Y \le 1\} = F(1,1) = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^x xy\,dy\,dx = \frac{x^4}{16}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{16}$$

(c) Randdichte von X:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\int_0^x xy\,dy = \frac{x}{2}\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{x} = \frac{x^3}{4}, \quad 0 < x < 2$$

Randdichte von Y:

$$f_2(y) = \frac{1}{2}\int_y^2 xy\,dx = \frac{y}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{x=y}^{2} = \frac{y}{2}\left(2 - \frac{y^2}{2}\right) = y - \frac{y^3}{4}, \quad 0 < y < 2$$



13. (a) Aus der Angabe folgt, daß $\sigma_x = \sqrt{196} = 14$, $\sigma_y = \sqrt{169} = 13$ und $\rho = -91/(14 \cdot 13) = -1/2$:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{2\pi 14 \cdot 13\sqrt{1-1/4}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-1/4)}\left[\left(\frac{x-26}{14}\right)^2 + \left(\frac{x-26}{14}\right)\left(\frac{y+12}{13}\right) + \left(\frac{y+12}{13}\right)^2\right]\right\} \\ &= \frac{1}{182\pi\sqrt{3}} \exp\left\{-\frac{2}{3}\left[\frac{(x-26)^2}{196} + \frac{(x-26)(y+12)}{182} + \frac{(y+12)^2}{169}\right]\right\}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

(b) Die Dichte ist maximal für $(x,y) = (\mu_x, \mu_y) = (26, -12)$; das Maximum beträgt:

$$f(\mu_x, \mu_y) = \frac{1}{182\pi\sqrt{3}} \doteq 0.001$$

(c) Randdichte von X:

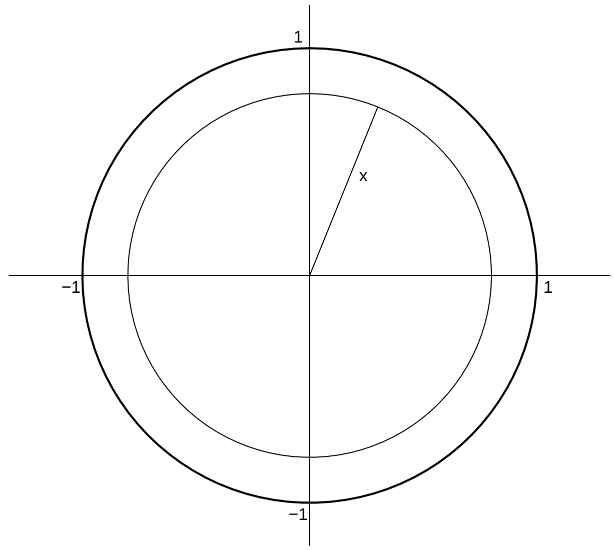
$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2\right] = \frac{1}{14\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-26}{14}\right)^2\right], \quad x \in \mathbb{R}$$

Randdichte von Y:

$$f_2(y) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right] = \frac{1}{13\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y+12}{13}\right)^2\right], \quad y \in \mathbb{R}$$

17. (a) Der Abstand eines zufällig gewählten Punktes ist genau dann kleiner oder gleich x, wenn der Punkt im Kreis mit dem Radius x liegt:

$$F_D(x) = W\{D \le x\} = \frac{x^2\pi}{\pi} = x^2, \quad 0 < x < 1 \quad \Longrightarrow \quad f_D(x) = F'(x) = 2xI_{(0,1)}(x)$$



(b) Auf Basis von (a) gilt:

$$\mathbb{E}(D) = \int_0^1 x f_D(x)\,dx = 2\int_0^1 x^2\,dx = \frac{2x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{2}{3}$$

(c) Berechnung mittels SvuStat:

$$\mathbb{E}(D) = \iint\limits_{\text{Kreis}} \sqrt{x^2+y^2} f_{(X,Y)}(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\text{Kreis}} \sqrt{x^2+y^2}\frac{1}{\pi} I_{\{x^2+y^2\le 1\}}(x,y)\,dxdy$$

Transformiert man auf Polarkoordinaten, $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, so gilt für die Funktionaldeterminante:

$$\begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) = r\big[\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\big] = r$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(D) &= \iint\limits_{\text{Kreis}} \sqrt{x^2+y^2}\frac{1}{\pi} I_{\{x^2+y^2\le 1\}}(x,y)\,dxdy = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\,drd\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^3}{3}\bigg|_{r=0}^{r=1} d\theta = \frac{1}{3\pi}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{3\pi}2\pi = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

21. (a) Zunächst bestimmt man die Erwartungswerte der Randverteilungen:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^2 x\,\frac{x^3}{4}\,dx = \frac{8}{5}, \qquad \mathbb{E}(Y) = \int_0^2 y\left(y - \frac{y^3}{4}\right)dy = \frac{16}{15}$$

Die Kovarianz bestimmt man mittels Verschiebungssatz:

$$\mathbb{E}(XY) = \int_0^2 \int_0^x xy\,\frac{xy}{2}\,dy\,dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2} \underbrace{\left(\int_0^x y^2 dy \right)}_{x^3/3} dx = \int_0^x \frac{x^5}{6}\,dx = \frac{16}{9}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{16}{9} - \frac{8}{5} \cdot \frac{16}{15} = \frac{16}{225}$$

(b) Dazu benötigt man noch die Varianzen der Randverteilungen:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^2 x^2\,\frac{x^3}{4}\,dx = \frac{8}{3}, \qquad \mathbb{E}(Y^2) = \int_0^2 y^2 \left(y - \frac{y^3}{4} \right) dy = \frac{4}{3}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{8}{3} - \left(\frac{8}{5} \right)^2 = \frac{8}{75}, \qquad \mathrm{Var}(Y) = \frac{4}{3} - \left(\frac{16}{15} \right)^2 = \frac{44}{225}$$

Damit folgt:

$$\rho_{X,Y} = \frac{16/225}{\sqrt{8/75}\,\sqrt{44/225}} = \frac{4}{\sqrt{6}\,\sqrt{11}} \doteq 0.4924$$

23. (a)

$$\mathrm{Var}(X) = 196, \qquad \mathrm{Var}(Y) = 169$$

(b)

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = -91 \quad \Longrightarrow \quad \rho_{X,Y} = \frac{-91}{\sqrt{196}\,\sqrt{169}} = \frac{-91}{14 \cdot 13} = \frac{-91}{182} = -\frac{1}{2}$$

(c)

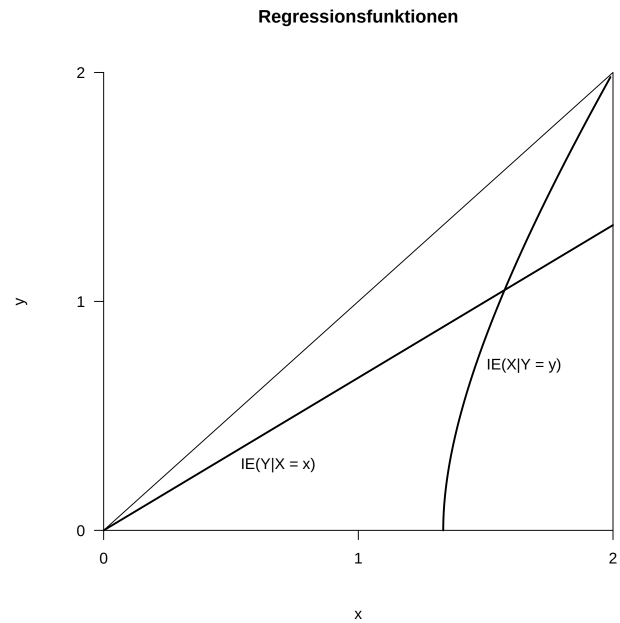
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X+Y) &= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 26 - 12 = 14 \\
\mathbb{E}(X-Y) &= \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) = 26 + 12 = 38 \\
\mathrm{Var}(X+Y) &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) = 196 + 169 - 2 \cdot 91 = 183 \\
\mathrm{Var}(X-Y) &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) - 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) = 196 + 169 + 2 \cdot 91 = 547
\end{aligned}$$

29. (a)

$$\begin{aligned}
f(y|x) &= \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{xy/2}{x^3/4} = \frac{2y}{x^2} I_{(0,x)}(y) \\
f(x|y) &= \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{xy/2}{y - y^3/4} = \frac{2x}{4-y^2} I_{(y,2)}(x)
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y|X=x) &= \int_0^x y\,\frac{2y}{x^2}\,dx = \int_0^x \frac{2y^2}{x^2}\,dx = \left.\frac{2y^3}{3x^2}\right|_0^x = \frac{2x}{3}, \quad 0 < x < 2 \\
\mathbb{E}(X|Y=y) &= \int_y^2 x\,\frac{2x}{4-y^2}\,dx = \int_y^2 \frac{2x^2}{4-y^2}\,dx = \left.\frac{2x^3}{3(4-y^2)}\right|_y^2 = \frac{2(8-y^3)}{3(4-y^2)}, \quad 0 < y < 2
\end{aligned}$$



31. (a) Für die Randverteilung von Y gilt $Y \sim N(1, 25)$; damit folgt:

$$W\{3 < Y < 8\} = \Phi\left(\frac{8-1}{5}\right) - \Phi\left(\frac{3-1}{5}\right) = 0.2638$$

(b) Für die bedingte Verteilung von $Y|X = 7$ gilt:

$$Y|X = 7 \sim N\left(1 + \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{4}\cdot(7-3), \left(1 - \frac{9}{25}\right)\cdot 25\right) = N(4, 16)$$

Damit folgt:

$$W\{3 < Y < 8|X = 7\} = \Phi\left(\frac{8-4}{4}\right) - \Phi\left(\frac{3-4}{4}\right) = 0.4401$$

(c) Für die Randverteilung von X gilt $X \sim N(3, 16)$; damit folgt:

$$W\{-3 < X < 3\} = \Phi\left(\frac{3-3}{4}\right) - \Phi\left(\frac{-3-3}{4}\right) = 0.4332$$

(d) Für die bedingte Verteilung von $X|Y = -4$ gilt:

$$X|Y = -4 \sim N\left(3 + \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot(-4-1), \left(1 - \frac{9}{25}\right)\cdot 16\right) = N\left(\frac{3}{5}, \left(\frac{16}{5}\right)^2\right)$$

Damit folgt:

$$W\{-3 < X < 3|Y = -4\} = \Phi\left(\frac{3-3/5}{16/5}\right) - \Phi\left(\frac{-3-3/5}{16/5}\right) = 0.6431$$

36. Bezeichnet X_i die Lebensdauer der i–ten Komponente und F_i die zugehörige Verteilungsfunktion, so gilt laut Angabe:

$$F_i(x) = 1 - e^{-x}, \quad x > 0$$

Damit folgt für die Verteilungsfunktion der Lebensdauer X des Systems:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= W(X \le x) = W\big(\max\big\{\min\{X_1, X_2\}, X_3\big\} \le x\big) \\ &= \big[1 - \big(1 - F_1(x)\big)\big(1 - F_2(x)\big)\big] F_3(x) \\ &= \big(1 - e^{-2x}\big)\big(1 - e^{-x}\big) \\ &= 1 - e^{-x} - e^{-2x} + e^{-3x}, \quad x > 0 \end{aligned}$$

Die Dichte bekommt man durch Ableiten:

$$f_X(x) = F_X^{'}(x) = e^{-x} + 2e^{-2x} - 3e^{-3x}, \quad x > 0$$

Mittelwert von X:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty x f_X(x)\,dx = \int_0^\infty x\big[e^{-x} + 2e^{-2x} - 3e^{-3x}\big]\,dx = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$$

Bem.: Bei der Berechnung des Mittelwerts wurde wiederholt verwendet, daß:

$$\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda} \quad (= \text{Mittelwert einer } Ex_{1/\lambda}\text{–Verteilung})$$