

Beispiel 110 (MA2 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 10, 08.06.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 05/2006

1 Angabe

Man bestimme die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n \geq 0}$:

$$a_n = n \cdot (n - 1) + (1)^n$$

2 Theoretische Grundlagen: Erzeugende Funktionen

Wenn $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge (Elemente $\in \mathbb{R}$ oder $\in \mathbb{C}$) ist, dann kann man dieser die formale Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ zuordnen.

Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ den Konvergenzradius $R > 0$ besitzt, dann ist $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ ($|x| < R$) auch eine Funktion dar, welche die Folge $\langle a_n \rangle$ eindeutig bestimmt. $A(x)$ ist dann die (**gewöhnliche**) **erzeugende Funktion** der Folge $\langle a_n \rangle$.

Es gilt also:

$$\underbrace{\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}}_{\text{Folge}} \quad \overset{1-1}{\longleftrightarrow} \quad \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n}_{\text{Formale Potenzreihe}} \quad \overset{1-1 \text{ wenn } R>0}{\longleftrightarrow} \quad \underbrace{A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n}_{\text{Erzeugende Funktion}}$$

Mit erzeugenden Funktionen kann man **wichtige Operationen mit Folgen** vornehmen:

• Linearkombinationen

Die Folgen $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ haben die erzeugenden Funktionen $A(x)$ bzw. $B(x)$. Wenn $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $\langle \lambda \cdot a_n + \mu \cdot b_n \rangle$ ist, dann ist die erzeugende Funktion $\lambda \cdot A(x) + \mu \cdot B(x)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda \cdot a_n + \mu \cdot b_n) \cdot x^n = \lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n + \mu \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$$

• Cauchy-Produkt

Die Folgen $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ haben die erzeugenden Funktionen $A(x)$ bzw. $B(x)$. $A(x) \cdot B(x)$ ist die erzeugende Funktion zur Folge $\langle \sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k} \rangle$:

$$A(x) \cdot B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n$$

- Wenn $\langle a_n \rangle$ die erzeugende Funktion $A(x)$ hat, dann hat $\langle n \cdot a_n \rangle$ die erzeugende Funktion $x \cdot A'(x)$:

$$x \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$$

- Wenn $\langle a_n \rangle$ die erzeugende Funktion $A(x)$ hat, so gilt:

$$\begin{aligned} \langle a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, \dots \rangle \quad \text{EF} &= \frac{A(x) + A(-x)}{2} \\ \frac{A(x) + A(-x)}{2} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1 + (-1)^n}{2} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} \\ \langle 0, a_1, 0, a_3, 0, a_5, \dots \rangle \quad \text{EF} &= \frac{A(x) - A(-x)}{2} \\ \frac{A(x) - A(-x)}{2} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1 - (-1)^n}{2} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} \end{aligned}$$

Wichtige Identitäten sind:

- $\sum_{n=0}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n = \frac{1}{1-az}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{c}{n} z^n = (1+z)^c$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{c+n-1}{n} a^n z^n = \frac{1}{(1-az)^c}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n = \ln \frac{1}{1-z}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = e^z$

3 Lösung des Beispiels

$$\begin{aligned} a_n &= n \cdot (n-1) + (1)^n \quad | \cdot z^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n(n-1) + (-1)^n) \cdot z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n n(n-1) + \sum_{n=0}^{\infty} z^n (-1)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n (n^2 - n) + \sum_{n=0}^{\infty} z^n (-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n n^2 - \sum_{n=0}^{\infty} n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n (-1)^n \end{aligned}$$

Wir betrachten zunächst $\langle n^2 \rangle = \langle n \cdot n \cdot 1 \rangle$. Die erzeugende Funktion von $\langle 1 \rangle$ ist

$$A(x) = \frac{1}{1-x}$$

Die erzeugende Funktion von $\langle n \cdot 1 \rangle$ ist

$$B(x)x \cdot (A(x))' = x \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Die erzeugende Funktion von $\langle n \cdot n \cdot 1 \rangle$ ist

$$x \cdot (B(x))' = x \cdot \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

Die erzeugende Funktion von $\langle n \cdot (-1)^n \rangle$ wird im Hinblick auf die geometrische Reihe definiert als:

$$\frac{1}{1+z}$$

Wir rechnen nun weiter und erhalten:

$$\frac{z(1+z)}{(1-z)^3} - \frac{z}{(1-z)^2} + \frac{1}{1+z} = \frac{2z^2}{(1-z)^3} + \frac{1}{1+z}$$