(1) [8 Punkte] Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Gültigkeit der folgenden Summenformel für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$:

7/8

ZZ: $4 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)\,(k+2)} = 1 - \frac{2}{(n+1)\,(n+2)}$.

IA: $n=1$ LHS: $4 \cdot \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = 4 \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$

2 ✓

RHS: $1 - \frac{2}{2 \cdot 3} = \frac{6}{6} - \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$ LHS = RHS ✓

Induktionsvoraussetzung fehlt! (−1)

1 ✓ IS: $n \to n+1$

$$4 \cdot \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = 4 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)\cdot(k+2)} + 4 \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} =$$

2

$$\overset{(IS)}{=} 1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)} + \frac{4}{(n+1)(n+2)(n+3)} \cancel{= 1 - \frac{2(n+3)+4}{(n+1)(n+2)(n+3)} =}$$

$$\cancel{= 1 - \frac{2n+10}{(n+1)(n+2)(n+3)} =} = 1 + \frac{4}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{2(n+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)} =$$

$$= 1 + \frac{4-2n-6}{(n+1)(n+2)(n+3)} = 1 + \frac{-2n-2}{(n+1)(n+2)(n+3)} = 1 + \frac{-2\cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}(n+2)(n+3)}$$

$$= 1 + \frac{-2}{(n+2)(n+3)} = 1 - \frac{2}{((n+1)+1)+((n+1)+2)}$$ 2 ✓

□

(2) [8 Punkte]

(a) Mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus bestimme man den ggT(93, 36).

(b) Unter Benützung von Punkt (a) ermittle man ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ (diese müssen explizit angegeben werden!), sodass:

$$93\,a + 36\,b = 3.$$

7/8

a) ggT(93,36):

$93 = 36 \cdot 2 + 21$

$36 = 21 \cdot 1 + 15$

$21 = 15 \cdot 1 + 6$

$15 = 6 \cdot 2 + 3 \Rightarrow \underline{ggT(93,36) = 3}$

$6 = 3 \cdot 2 + 0$

4/4

b) ~~$3 = 15 - 6 \cdot 2 = 15 - ((21-15) \cdot 6$~~

~~$3 = 15 - (6 \cdot 2) = 15 - ((21-15) \cdot 2) =$~~

~~$= (36-21) - ((21-(36-21)) \cdot 2) =$~~

~~$= (36-(93-36 \cdot 2)) - (((93-36 \cdot 2) - (36-(93-36 \cdot 2))) \cdot 2) =$~~

~~$= 36 - 93 + 36 \cdot 2 - 93 + 36 \cdot 2 + (36 - 93 + 36 \cdot 2) \cdot 2 =$~~

~~$= 36 - 93 + 36 \cdot 2 - 93 + 36 \cdot 2 + 36 \cdot 2 - 93 \cdot 2 + 36 \cdot 4 =$~~

~~$= 36 \cdot \underline{11} - 93 \cdot \underline{4}$~~

~~Probe: $\frac{36 \cdot 11}{360} - \frac{93 \cdot 4}{372} \hat{=} 396 - 372 = \frac{36 \cdot 13}{360}$~~

~~$\frac{36}{396}$~~

~~$\frac{108}{468}$~~

Probe

$\frac{93 \cdot 5}{465}$ −

$\frac{36 \cdot 3}{108} + \frac{36 \cdot 10}{360} = 468$

$468 - 465 = 3$ ✓

CHAEL HUBER

Institut für Diskrete Mathematik
und Geometrie
Technische Universität Wien
A-1040 Wien, Wiedner Hauptstr. 8-10

2b, $3 = 15 - (6 \cdot 2) = 15 - ((21-15) \cdot 2) =$

$= (36-21) - (((21-(36-21)) \cdot 2) = 36-21 - 21 \cdot 2 + 36 \cdot 2 - 21 \cdot 2 = *$

3/4

$\cancel{= 36 \cdot 3 - 21 \cdot 4 = 36 \cdot 3 - (93 - 36 \cdot 2) \cdot 4 = 36 \cdot 3 - 93 \cdot 4 + 36 \cdot 8 =}$

$\cancel{= 36 \cdot 11 - 93 \cdot 4}$

$* = 36 \cdot 3 - 21 \cdot 5 = 36 \cdot 3 - (93 - 36 \cdot 2) \cdot 5 = 36 \cdot 3 - 93 \cdot 5 + 36 \cdot 10 =$

$36 \cdot \underline{13} - 93 \cdot \underline{5}$ $\qquad 3 = 93 \cdot \underline{5} + 36 \cdot \underline{13}$

$a = 5 \qquad b = 13$

Vorzeichenfehler -1

(3) [4 Punkte] Gegeben sei folgende im Allgemeinen falsche Mengeninklusion:

$$A \setminus (B \setminus C) \subseteq (A \setminus B) \,\Delta\, C.$$

3/4

Für die vier nachfolgend angegebenen Situationen kreuze man an, ob für solch ein Element x die Mengeninklusion wahr oder falsch ist (dabei soll natürlich $\in$ bzw. $\notin$ bedeuten, dass das Element x in der entsprechenden Menge enthalten ist bzw. nicht enthalten ist):

	A	B	C	Aussage		
1	$\in$	$\in$	$\in$	☒ wahr	○ falsch	✓
2	$\in$	$\notin$	$\in$	○ wahr	☒ falsch	✓
3	$\notin$	$\in$	$\in$	☒ wahr	☒ falsch	✗
4	$\notin$	$\notin$	$\notin$	☒ wahr	○ falsch	✓

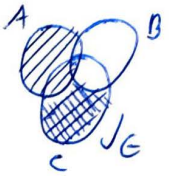
Anmerkung: Sie können selbstverständlich Nebenrechnungen machen, um dieses Beispiel zu lösen, aber für die Benotung dieser Frage ist nur relevant, was Sie hier in dieser Tabelle angekreuzt haben!

A	B	C	$A \setminus$	$(B \setminus C)$	$(A \setminus B)$	ΔC
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

$B \setminus C$

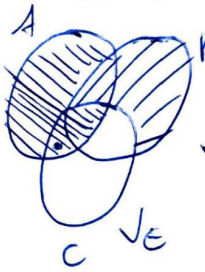
1. LS

1. RS



4. RS

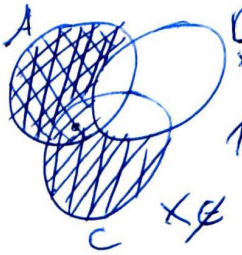
2. LS



$B \setminus C$

$A \setminus (B \setminus C)$

2. RS



$A \setminus B$

$(A \setminus B) \Delta C$

3. LS

$B \setminus C$

$A \setminus (B \setminus C)$

$(A \setminus B) \Delta C$

4. LS:

4. RS