3. Gegeben sei die quadratische Form $q(\vec{x}) = q(x, y) = 4x^2 + 2bxy + 25y^2$ mit $b \in \mathbb{R}$. Wie lautet die zugehörige symmetrische Matrix A, sodass $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A\vec{x}$. Für welche Werte von b ist die Form positiv definit?

$$q(\vec{x}) = q(x, y) = 4x^2 + 2bxy + 25y^2 \text{ mit } b \in R$$

$$q(x, y) = 4x^2 + 2bxy + 25y^2 \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & b \\ b & 25 \end{pmatrix}$$

$$q(\vec{x}) = \vec{x}^T A\vec{x} = (x, y)\begin{pmatrix} 4 & b \\ b & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (4x + by, bx + 25y)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4x^2 + byx + bxy + 25y^2$$

Eine quadratische Form $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A\vec{x}$ bzw. die dazugehörige Systemmatrix A heißt positiv definit, falls $q(\vec{x}) > 0 \ \forall \vec{x} \neq \vec{0}$. Eine reelle symmetrische Matrix $A = (a_{ij})$ ist genau dann positiv definit, wenn $|A| > 0$. Für n = 2: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ ist positiv definit

$$\Leftrightarrow a > 0, |A| = ac - b^2 > 0$$

Für unseren Fall gilt: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & b \\ b & 25 \end{pmatrix}$ und daraus ergibt sich:

$$a > 0,\ |A| = ac - b^2 > 0 \Rightarrow 4 > 0, |A| = 4 \cdot 25 - b^2 > 0$$

$$100 > b^2 \rightarrow 10 > |b| \Rightarrow -10 < b < +10$$