1.) $a_0 = a_1 = 0$

$$a_{n,\, n\geq 2} = \begin{cases} 0 & \text{falls } a_{n-1} = \max\{a_0 \ldots a_{n-2}\} + 1 \\ a_{n-1} + 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

4.) $a_n = (-1)^n + \cos \frac{n\pi}{2} \quad (n \geq 0)$

1° $2 \mid n$

Sei $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$

$$a_{n=2k} = (-1)^{2k} + \cos \frac{2k\pi}{2}$$

$$= 1 + \cos(k\pi)$$

$$= \begin{cases} 2, & \text{falls } 2 \mid k \\ 0, & \text{falls } 2 \nmid k \end{cases}$$

2° $2 \nmid n$

Sei $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$

$$a_{n=2k+1} = (-1)^{2k+1} + \cos \frac{(2k+1)\pi}{2}$$

$$= -1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

$$= -1$$

Daher sind die Häufungspunkte: $-1, 0, 2$.

12.) $a_n = \frac{n}{4^n}$

· zu zeigen: $n < 2^n$

◦ I.A.: $n = 0$: $0 < 2^0 \iff 0 < 1$ ✓

◦ I.S.: $n < 2^n \overset{?}{\Rightarrow} n+1 \Rightarrow 2^{n+1}$

$$(n+1) - 2^{n+1} = n + 1 - 2^n - 2^n =$$

$$= \underbrace{(n - 2^n)}_{<0} + \underbrace{(1 - 2^n)}_{\leq 0} < 0 \iff n+1 < 2^{n+1} \quad \blacksquare$$

Wir wissen sofort:

$1 < n < 2^n$, für $n \geq 2$ (aber es interessieren uns sehr große n) $\quad / : 4^n$

$$\frac{1}{4^n} < \frac{n}{4^n} < \frac{2^n}{4^n} \quad \wedge \lim_{n \to \infty} \frac{1}{4^n} = 0 \quad \wedge \lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{4^n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

$$\Big\Downarrow \text{ Sanwich - Theorem}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{4^n} = 0$$

Es gilt dann:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N(\varepsilon) : \left|\frac{n}{4^n} - 0\right| < \varepsilon$$

Da $\frac{2^n}{4^n} > \frac{n}{4^n}$ und so auch $\left|\frac{2^n}{4^n} - 0\right| > \left|\frac{n}{4^n} - 0\right|$ gilt, dann gilt auch

$\left|\frac{2^n}{4^n} - 0\right| < \varepsilon \quad \left(\lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{4^n} = 0\right)$.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < 2^n$$

$$n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon} = -\log_2 \varepsilon$$

$$\Rightarrow N(\varepsilon) = \lfloor -\log_2 \varepsilon \rfloor + 1$$

14.) zu zeigen:

$$\forall (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} : c_n = \frac{a_n}{b_n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

(a_n, b_n sind Nullfolgen)

Seien:

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{falls } |c_n| > 1 \\ \frac{c_n}{n} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$b_n := \begin{cases} \frac{1}{n\cdot c_n} & \text{falls } |c_n| > 1 \\ \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$$

sodaß a_n, b_n Nullfolgen sind und c_n eine beliebige reelle Folge ist.

Dann gilt:

1° $|c_n| > 1$:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n\cdot c_n}{1} = c_n$$

2° $|c_n| \leq 1$:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{c_n}{n} \cdot \frac{n}{1} = c_n \quad \blacksquare$$

Seien:

$$a_n = \frac{c_n}{n\cdot(|c_n|+1)}, \qquad |a_n| = \frac{1}{n} \cdot \overbrace{\frac{|c_n|}{|c_n|+1}}^{0 \leq \quad \leq 1} \leq \frac{1}{n}$$

$$b_n = \frac{1}{n\cdot(|c_n|+1)},$$

sodaß a_n, b_n Nullfolgen sind.

Dann gilt:

$$c_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{c_n}{n\cdot(|c_n|+1)} \cdot \frac{n\cdot(|c_n|+1)}{1} = \frac{c_n}{1} = c_n \quad \blacksquare$$

16.) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

$(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (3a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

zu zeigen: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c = 3a - b$

1.) Für gegebenes $\varepsilon > 0$ gibt es N, sodaß

$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{3} \quad / \cdot 3 \quad$ für $n > N$

$3|a_n - a| < \varepsilon$

$\Updownarrow$

$|3a_n - 3a| < \varepsilon$

2.) Für gegebenes $\varepsilon > 0$ gibt es N_1, N_2, sodaß

$|3a_n - 3a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n > N_1$

$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n > N_2$

$\Rightarrow |3a_n - b_n - (3a - b)| \leq |3a_n - 3a| + |b_n - b| \leq \varepsilon, \ \forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$ ∎

Rechenregel für konv. Folgen

a_n, b_n

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

$c_n : \alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n$ es läßt sich zeigen

c_n konvergiert

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$

16.) $\to (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$

$(c_n)_{n\in\mathbb{N}} : c_n = (3a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

zu zeigen: $\lim_{n\to\infty} c_n = c = 3a - b$

$\to \forall \varepsilon > 0 \; \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N_1(\varepsilon) : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{6}$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N_2(\varepsilon) : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

o.B.d.A.

$\to \forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N(\varepsilon) : |(3a_n - b_n) - (3a - b)| < \varepsilon$ (zu zeigen)

$|3a_n - b_n - (3a - b)| < |3a_n - 3a| + |b_n - b| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ■

$\forall n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$

57.) $$a_n = \frac{\overbrace{n^2 \cos\frac{n\pi}{2}}^{=\pm 1 \vee = 0} + 1}{n+1} + \underbrace{\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}}_{=\pm 1}$$

1° $\cos\frac{n\pi}{2} = -1 \Rightarrow n \in \{\dots, 2, 6, 10, \dots\}$

$\Rightarrow \sin\frac{(2n+1)\pi}{2} = 1$

$$a_n = -\frac{n^2-1}{n+1} + 1 = -(n-1)+1 = -n+2$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

2° $\cos\frac{n\pi}{2} = 0 \Rightarrow n \in \{\dots, 1, 3, 5, \dots\}$

$\Rightarrow \sin\frac{(2n+1)\pi}{2} = -1$

$\lim_{n\to\infty} a_n = -1$

Häufungspunkte: ~~±1 ± 1, also 0 und 2~~ -1

3° $\cos\frac{n\pi}{2} = 1 \Rightarrow n \in \{\dots, 0, 4, 8, \dots\}$

$\Rightarrow \sin\frac{(2n+1)\pi}{2} = -1$

$$a_n = \frac{n^2+1}{n+1} - 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

$\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (uneigentlich)

$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$ (uneigentlich)

58.) $a_n = \frac{n^3+1}{n-1} = \frac{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)} = n^2 \frac{1+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{1}{n}}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^2 \frac{1+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$$

Es soll gelten:

$a_n > A$

$\frac{n^3+1}{n-1} > A$

Vereinfachung - Annahme:

$\frac{n^3+1}{n-1} > \frac{n^3}{n} > A$

$n^2 > A$

$n > \sqrt{A}$

$N(A) = \lfloor \sqrt{A} \rfloor + 1$