Analysis für Informatik und Wirtschaftsinformatik, Test 1 - Definitionen und Sätze

Maximilian Frühschütz, 01525654*

November 3, 2019

Inhaltsverzeichnis

*maximilian.fruehschuetz@student.tuwien.ac.at

1 Vorwort

Die Definitionen und Sätze stammen größtenteils aus dem Buch "Mathematik für Informatik" (4. erw. Auflage) von M. Drmota et al.

2 Rechtliches

3 Folgen

3.1 Grenzwert

Eine reelle Zahl a heißt **Grenzwert** (oder **Limes**) der Folge $(\mathrm{a_n})_{\mathrm{n}\geq 0}$, falls in jeder ϵ-Umgebung von a fast aslle Folgenglieder a_n liegen, d.h., falls

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists N(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon$$

gilt.

3.2 Konvergenz / Divergenz, Nullfolgen

Eine Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ heißt **konvergent**, falls sie einen Grenzwert a besitzt. In diesem Falle konvergiert die Folge gegen a, und man schreibt

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

oder

$$a_n \longrightarrow a$$

.

Besitzt die Folge $(\mathrm{a_n})_{\mathrm{n}\geq 0}$ keinen Grenzwert, so heißt sie **divergent**.

Eine Folge, die 0 als Grenzwert besitzt, nennt man auch **Nullfolge**.

3.3 Uneigentlicher Grenzwert

Eine Folge $(\mathrm{a_n})_{\mathrm{n}\geq 0}$, deren Glieder beliebig groß werden, d.h. für die gilt

$$\forall K > 0 \, \exists N(K) \in \mathbb{N} \, \forall n > N(K) : a_n > K$$

, heißt **uneigentlich konvergent** und man schreibt

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$$

.
Analog definiert man

$$\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$$

und nennt solche Folgen ebenfalls uneigentlich konvergent.
Der Wert $+\infty$ / -∞ wird dann als **uneigentlicher Grenzwert** bezeichnet.

3.4 Häufungswerte

Wenn in jeder ϵ-Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder liegen, so ist a ein **Häufungswert** von $(\mathrm{a_n})_{\mathrm{n}\geq 0}$.

Analog zum uneigentlichen Grenzwert werden **uneigentliche Häufungswerte** definiert.
Der größte Häufungswert (uneigentliche mit eingeschlossen) heißt **Limes superior**

$$\limsup_{n \to \infty} a_n$$

, der kleinste Häufungswert **Limes inferior**

$$\liminf_{n\to\infty} a_n$$

.

3.5 Monotonie

Eine Folge $(\mathrm{a_n})_{\mathrm{n}\geq 0}$ heißt **monoton fallend**, wenn $\mathrm{a_{n+1}} \leq \mathrm{a_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gilt sogar die strikte Ungleichung $\mathrm{a_{n+1}} < \mathrm{a_n}$, so spricht man von einer **streng monoton fallenden** Folge.

Falls $\mathrm{a_{n+1}} \geq \mathrm{a_n}$ / $\mathrm{a_{n+1}} > \mathrm{a_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so heißt die Folge **monoton steigend**.

3.6 Beschränktheit

Eine Folge $(\mathrm{a_n})_{\mathrm{n}\geq 0}$ heißt **nach oben beschränkt**, wenn es eine reelle Zahl S gibt, so dass $\mathrm{a_n} \leq \mathrm{S}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Jede solche Zahl S heißt **obere Schranke** von $(\mathrm{a_n})_{\mathrm{n}\geq 0}$.
Die kleinste obere Schranke wird das **Supremum** genannt. Das Supremum $\sup a_n$ ist somit jene reelle Zahl S_0, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. Es gilt $\mathrm{a_n} \leq \mathrm{S_0}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
2. Aus $\mathrm{a_n} \leq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $\mathrm{S_0} \leq \mathrm{S}$.

Analog definiert man Beschränktheit nach unten und untere Schranken. Die größte untere Schranke wird **Infimum** genannt und $\inf a_n$ geschrieben.

Falls die Folge nicht nach oben / unten beschränkt ist, setzt man $\sup a_n = \infty$ / $\inf a_n = -\infty$.

3.7 Vollständigkeitssatz für die reellen Zahlen

Jede nach oben (unten) beschränkte, nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum (Infimum).

Jede nach oben (unten) beschränkte relle Folge besitzt ein Supremum (Infimum).

3.8 Beschränktheit von konvergenten Folgen

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

3.9 Hauptsatz über monotone Folgen

Eine monotone Folge ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

3.10 Rechenregeln für konvergente Folgen

Seien $(\mathrm{a_n})_{\mathrm{n}\geq 0}$ und $(\mathrm{b_n})_{\mathrm{n}\geq 0}$ konvergente Folgen mit $\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{a_n} = \mathrm{a}$ und $\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{b_n} = \mathrm{b}$.
Dann gilt:

- $\lim_{\mathrm{n}\to\infty} (\mathrm{a_n} \pm \mathrm{b_n}) = \mathrm{a} \pm \mathrm{b}$,
- $\lim_{\mathrm{n}\to\infty} (\lambda * \mathrm{a_n}) = \lambda * \mathrm{a}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$,
- $\lim_{\mathrm{n}\to\infty} (\mathrm{a_n} * \mathrm{b_n}) = \mathrm{a} * \mathrm{b}$,
- $\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ falls $\mathrm{b_n} \neq 0$, für alle $n \in \mathbb{N}$, und $\mathrm{b} \neq 0$.

3.11 Rechenregeln für uneigentlich konvergente Folgen

Sei $(\mathrm{a_n})_{\mathrm{n}\geq 0}$ eine uneigentlich konvergente Folge und $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gelte $\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{a_n} = \infty$ und $\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{b_n} = \mathrm{b}$.
Dann gilt:

- $\lim_{\mathrm{n}\to\infty} (\mathrm{a_n} + \mathrm{b_n}) = \infty$, falls $b \in \mathbb{R}$ oder $\mathrm{b} = \infty$,
- $\lim_{\mathrm{n}\to\infty} = \begin{cases} \infty & \text{falls } \lambda > 0, \\ -\infty & \text{falls } \lambda < 0 \end{cases}$,
- $\lim_{\mathrm{n}\to\infty} (\mathrm{a_n} * \mathrm{b_n}) = \infty$, falls $\mathrm{b} > 0$,
- $\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$, falls $b \in \mathbb{R}$.

3.12 Bernoulli'sche Ungleichung

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit n $\geq$ 2 und x $\geq$ -1, mit x $\neq$ 0. Dann gilt:

$$(1+x)^n > 1 + nx$$

3.13 Sandwich-Theorem

Seien $(\mathrm{a_n})_{\mathrm{ngeq0}}$ und $(\mathrm{b_n})_{\mathrm{n}\geq 0}$ konvergente Folgen, deren Grenzwerte übereinstimmen, also $\mathrm{lim_{n\,\to\,\infty}\ a_n = lim_{n\,\to\,\infty}\ b_n = a}$. Sei $(\mathrm{c_n})_{\mathrm{n}\geq 0}$ eine Folge mit $\mathrm{a_n \leq c_n \leq b_n}$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt die Konvergenz von $(\mathrm{c_n})_{\mathrm{n}\geq 0}$, und es gilt $\mathrm{lim_{n\,\to\,\infty}\ c_n = a}$.

3.14 Teilfolgen

Seien $(\mathrm{a_n})_{\mathrm{n}\geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen und $\mathrm{n_0 < n_1 < n_2 < \ldots}$ natürliche Zahlen. Dann nennt man die Folge $(a_{n_m})_{m\in\mathbb{N}} = (\mathrm{a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots})$ eine **Teilfolge** von $(\mathrm{a_n})_{\mathrm{n}\geq 0}$.

3.15 Konvergierende Teilfolgen

Sei $(\mathrm{a_n})_{\mathrm{n}\geq 0}$ eine Folge, die den Häufungspunkt a besitzt. Dann gibt es eine gegen a konvergierende Teilfolge.

Falls umgekehrt $(\mathrm{a_n})_{\mathrm{n}\geq 0}$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert a enthält, so ist a ein Häufungswert von $(\mathrm{a_n})_{\mathrm{n}\geq 0}$.

3.16 Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge $(\mathrm{a_n})_{\mathrm{n}\geq 0}$ enthält einen Häugungspunkt.

3.17 Cauchyfolge

Eine reelle Folge heißt **Cauchyfolge**, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $\mathrm{N}(\epsilon)$ exsitiert, sodass $|\mathrm{a_n - a_m}| < \epsilon$ für alle n, m $> \mathrm{N}(\epsilon)$.

3.18 Cauchykriterium

Eine reelle Folge $(\mathrm{a_n})_{\mathrm{n}\geq 0}$ ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

4 Unendliche Reihen

4.1 Definition

Unter einer unendlichen **Reihe** versteht man eine (formale) unendliche Summe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Dabei ist $(\mathrm{a_n})_{\mathrm{n}\geq 0}$ die Folge der Reihenglieder.

Die Folge $(\mathrm{s_n})_{\mathrm{n}\geq 0}$ mit

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

heißt Folge der **Partialsummen** der Reihe.

Unter dem **Grenzwert** (oder der **Summe**) der Reihe versteht man den Grenzwert ihrer Partialsummenfolge.

Ist die Folge $(\mathrm{s_n})_{\mathrm{n}\geq 0}$ konvergent / divergent so heißt auch die Reihe **konvergent** / **divergent**.

4.2 Satz über konvergente Reihen

Falls die Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$ konvergiert, so ist die Folge der Reihenglieder eine Nullfolge, d.h. $a_n \longrightarrow 0$.

4.3 Alternierende Reihen

Eine Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$ heißt **alternierend**, wenn die Glieder $\mathrm{a_n}$ abwechselnd positiv und negativ sind.

4.4 Absolut / bedingt konvergente Reihen

Eine Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$ heißt **absolut konvergent**, wenn $\$\sum_{\mathrm{n}\geq 0} |\mathrm{a_n}|$ konvergent ist.

Eine konvergente Reihe, welche nicht absolut konvergent ist, nennt man **bedingt konvergent**.

4.5 Satz über absolut konvergente Reihen

Eine absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.

4.6 Riemann'scher Umordnungssatz

Eine bedingt konvergente Reihe lässt sich so umordnen, dass sie gegen eine beliebige Zahl $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ (uneigentlich) konvergiert.

4.7 Konvergenzkriterien

4.7.1 Cauchykriterium

Eine Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$ ist genau dann konvergent, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $\mathrm{N}(\epsilon)$ existiert, so dass

$$|\sum_{k=n}^{m} a_k| < \epsilon \,\forall m \geq n > N(\epsilon)$$

.

4.7.2 Leibnizkriterium

Eine alternierende Reihe $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$, für die $(\mathrm{a_n})_{\mathrm{n}\geq 0}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, ist konvergent.

4.7.3 Majorantenkriterium

Seien $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ zwei Reihen mit $|\mathrm{a_n}| \leq \mathrm{b_n}$ für fast alle n.

Falls $\sum_n b_n$ konvergent ist, so ist $\sum_n a_n$ absolut konvergent.

In diesem Fall nennt man die Reihe $\sum_n b_n$ eine **Majorante** von $\sum_n a_n$.

4.7.4 Minorantenkriterium

Seien $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ zwei Reihen, so dass $0 \leq \mathrm{a_n} \leq \mathrm{b_n}$ für fast alle n.

Falls $\sum_n a_n$ divergent ist, so ist auch die Reihe $\sum_n b_n$ divergent.

Dann nennt man $\mathrm{a_n}$ eine **Minorante** von $\mathrm{b_n}$.

4.7.5 Wurzelkriterium

Falls es eine Zahl q gibt, so dass

$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$ **für fast alle** n,

dann ist $\sum_n a_n$ absolut konvergent.

Falls hingegen

$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ **für unendlich viele** n,

so ist $\sum_n a_n$ divergent.
Für den Fall $\sqrt[n]{|a_n|} = 1$ kann keine Aussage getroffen werden.

4.7.6 Limesform des Wurzelkriteriums

Aus

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

folgt die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_n a_n$ und aus

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

deren Divergenz.
Für den Fall $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ kann keine Aussage getroffen werden.

4.7.7 Quotientenkriterium

Es sei $\mathrm{a_n} \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Falls eine Zahl q existiert, so dass

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q < 1$$

, für fast alle n, so ist $\sum_n a_n$ konvergent.

Gilt hingegen

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$$

, für fast alle n, so divergiert die Reihe $\sum_n a_n$.

Für den Fall $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 0$ kann keine Aussage getroffen werden.

4.7.8 Limesform des Quotientenkriteriums

Aus $\limsup_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$ folgt die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_n a_n$

und aus $\liminf_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ deren Divergenz.

4.8 Rechenregeln für konvergente Reihen

Seien $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ konvergente Reihen.

Dann gilt aufgrund der Vektorraumeigenschaften des Raums der konvergenten Folgen:

- $\sum_n (a_n + b_n) = \sum_n a_n + \sum_n b_n$
- $\sum_n (\lambda * a_n) = \lambda * \sum_n a_n$, für $\lambda \in \mathbb{R}$

4.9 Cauchyprodukt

Seien $\sum_{n\geq 0} a_n$ und $\sum_{n\geq 0} b_n$ zwei Reihen.

Unter dem **Cauchyprodukt** dieser beiden Reihen versteht man die Reihe

$$\sum_{n\geq 0} (\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k})$$

.

4.10 Satz über absolute Konvergenz des Cauchyproduktes

Falls $\sum_{n\geq 0} a_n = a$ und $\sum_{n\geq 0} b_n = b$ und beide Reihen absolut konvergieren, dann ist auch deren Cauchyprodukt absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{n\geq 0} (\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}) = ab$$

.

4.11 Potenzreihen

Unter einer **Potenzreihe** versteht man eine Reihe der Bauart

$$\sum_{n\geq 0} a_n (x - x_0)^n$$

.

Die Faktoren $\mathrm{a_n}$ heißen die *Koeffizienten* der Potenzreihe, $\mathrm{x_0}$ ist der **Entwicklungspunkt**.

4.12 Binomische Reihe

Die **binomische Reihe** ist definiert durch $\sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, wobei

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}$$

.

Weiters gilt

$$\sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha$$

.

4.13 Konvergenzradius

Sei $\sum_{n\geq 0} a_n (x - x_0)^n$ eine Potenzreihe.

Dann existiert ein R mit $0 \leq R \leq \infty$, so dass die Reihe für alle

$x \in \mathbb{C}$ mit |x - x_0| $<$ R absolut konvergent

und für

$x \in \mathbb{C}$ mit |x - x_0| $>$ R divergent ist.

Der Konvergenzbereich der Potenzreihe ist somit ein Kreis in der Gauß'schen Zahlenebene mit dem Radius R.

Die Zahl R heißt **Konvergenzradius** der Reihe und kann mit der Formel

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

berechnet werden.

Falls $R = 0$, dann konvergiert die Potenzreihe nur für $x = 0$.
Falls $R = \infty$, dann konvergiert die Potenzreihe auf der gesamten Gauß'schen Zahlenebene.

Der Konvergenzradius kann in vielen Fällen auch mit dem Quotientenkriterium in Limesform berechnet werden:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|}$$

.

4.14 Satz über Potenzreihen und deren Konvergenzradius

Sei $\sum_{n\geq 0} a_n(x - x_0)^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius R.

Sei weiters $0 < r < R$.

Dann existieren Konstanten $c > 0$ und $0 < q < 1$, so dass

$$|a_n(x - x_0)^n| \leq cq^n$$

für alle x mit |x - x_0| $\leq$ r.

5 Asymptotischer Vergleich von Folgen

5.1 Landau-Symbole

Seien $(\mathrm{a_n})_{n\geq 0}$ und $(\mathrm{b_n})_{n\geq 0}$ Folgen.

Dann schreibt man:

1. $\mathrm{a_n} = \mathrm{O}(\mathrm{b_n})$ für $n \longrightarrow \infty$, falls es eine Konstante C gibt, so dass

   $$|\frac{a_n}{b_n}| \leq C$$

   für fast alle $n \in \mathbb{N}$, gilt.

2. $\mathrm{a_n} = \mathrm{o}(\mathrm{b_n})$ für $n \longrightarrow \infty$, falls

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

   gilt.

3. $\mathrm{a_n} \sim \mathrm{b_n}$, falls

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

   gilt.

4. $\mathrm{a_n} = \Omega(\mathrm{b_n})$ für $n \longrightarrow \infty$, falls es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass

   $$|\frac{b_n}{a_n}| \leq C$$

   für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

   Weiters gilt: $\mathrm{a_n} = \Omega(\mathrm{b_n})$ genau dann, wenn $\mathrm{b_n} = \mathrm{O}(\mathrm{a_n})$.

5. $\mathrm{a_n} = \Theta(\mathrm{b_n})$ für $n \longrightarrow \infty$, falls es positive Konstanten $\mathrm{C_1}$ und $\mathrm{C_2}$ gibt, so dass

   $$C_1|b_n| \leq |a_n| \leq C_2|b_n|$$

   für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, d.h. $\mathrm{a_n} = \Theta(\mathrm{b_n})$ genau dann, wenn sowohl $\mathrm{a_n} = \mathrm{O}(\mathrm{b_n})$ als auch $\mathrm{a_n} = \Omega(\mathrm{b_n})$ zutrifft.

5.2 Stirling'sche Formel

Die **Stirling'sche Formel**

$$n! \sim (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}$$

gibt die Größenordnung von n! an.

Der Fehler lässt sich quantifizieren, es gilt:

$$n! \sim (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n} * (1 + O(\frac{1}{n}))$$