01 - Zahlendarstellung

Technische Grundlagen der Informatik

Automation Systems Group E183-1

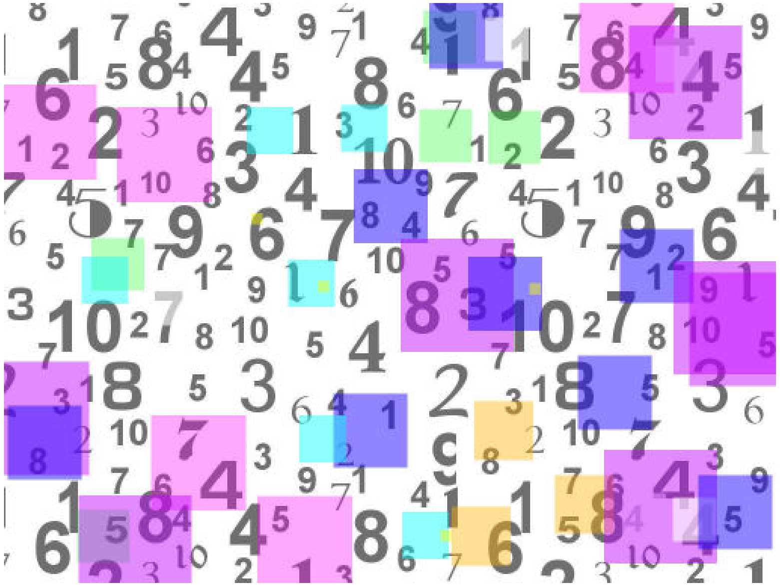
Institute of Computer Aided Automation

Vienna University of Technology

email: tgi@auto.tuwien.ac.at

Zahlendarstellung – Übersicht

- Zahlensysteme
- Zahlenumwandlungen
- Rechnen im binären System
- Darstellung negativer Zahlen



Zahlensysteme – Zahlschrift

- Einzelne Zeichen mit Wert
- Kombiniert

- Beispiel: MCMXXIII
  - Römische Zahlen: kumulativ-additiv
  - 1000 + 1000 -100 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 = 1923

- Übliche Schreibweise:
  - Indisch-arabisch: beziffernd-positionell, Basis 10
  - 1x1000 + 9x100 + 2x10 + 3x1

Zahlensysteme – Dezimalsystem

- Dezimales Zahlensystem (Zehnersystem): Stellenwertsystem

- von den Indern um 600 n.Chr. entwickelt
- später im gesamten arabisch beeinflussten Raum verbreitet

- Darstellung mit
  - Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
  - an bestimmten Stellen (Einer, Zehner, Hunderter, Tausender, ….)
  - Basis 10

Ziffer	**1**	**9**	**2**	**3**
Stelle	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer
Wert der Stelle	10^3	10^2	10^1	10^0

  - Wert der Zahl: $1x10^3 + 9x10^2 + 2x10^1 + 3x10^0 = 1923$

Zahlensysteme – allgemeine Stellenwertsysteme

- Basis b

- Zahl $(\ldots a_3 a_2 a_1 a_0)_b$ $(1923)_{10}$

Ziffer	a_3	a_2	a_1	a_0
Wert der Stelle	b^3	b^2	b^1	b^0

- Wert der Zahl:

  $a_3 b^3 + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0 b^0$ $1 \mathrm{x} 10^3 + 9 \mathrm{x} 10^2 + 2 \mathrm{x} 10^1 + 3 \mathrm{x} 10^0 = 1923$

- Basis ist Anzahl der verwendeten Ziffern, $b \geq 2, b \in \mathbb{N}$
- Ziffern: Zeichen mit dezimalem Wert 0, 1, ... , b–1

- Nachkommastellen: $(\ldots a_3 a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \ldots)_b =$ $x^{-y} = \frac{1}{x^y}$

  $= \cdots + a_3 b^3 + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0 b^0 + a_{-1} b^{-1} + a_{-2} b^{-2} + \ldots$

Zahlensysteme – Beispiele

- Bsp.: $(123.12)_{10}$ ist ident mit der gewohnten Notation 123.12 für das geläufige Zehnersystem:

$$(a_2\, a_1\, a_0 .\, a_{-1}\, a_{-2})_b = a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b^0 + a_{-1} \cdot b^{-1} + a_{-2} \cdot b^{-2}$$
$$(1\ 2\ 3\ .\ 1\ 2)_{10} = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$$
$$100 + 20 + 3 + 0.1 + 0.02$$
$$= (123.12)_{10}$$

- Bsp. Basis 6:

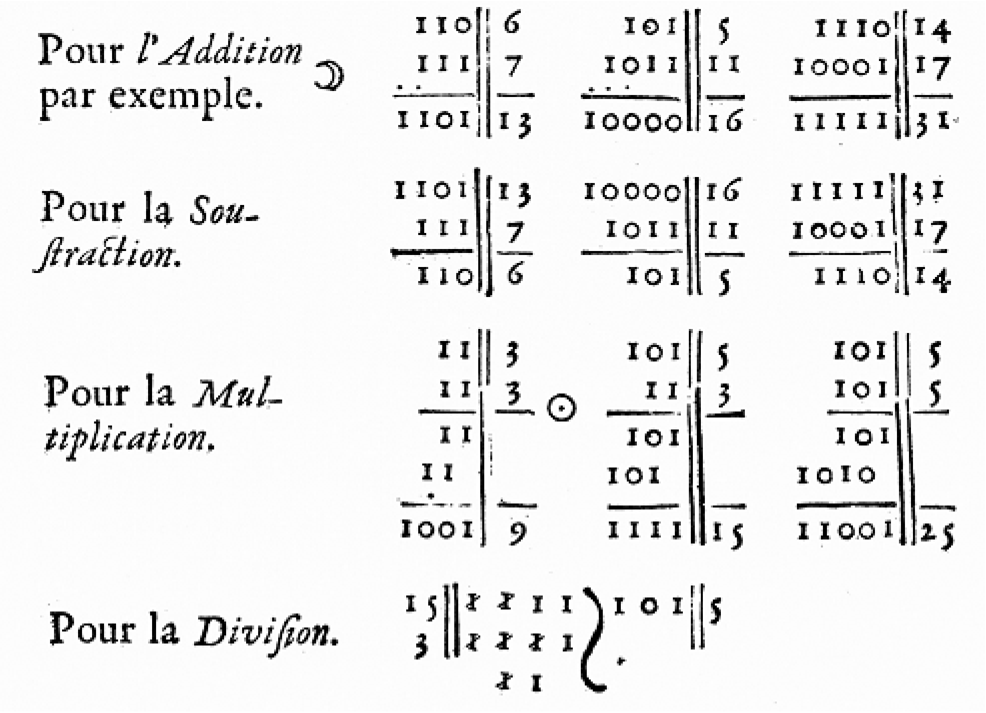
$$(5\,2\,0\,.\,3)_6 = 5 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^1 + 0 \cdot 6^0 + 3 \cdot 6^{-1} =$$
$$= 180 + 12 + 0 + 0.5 =$$
$$= (192.5)_{10}$$

AUTOMATION SYSTEMS GROUP

Zahlensysteme

- Zahlensystem mit Basis $b = 2$ … binäres Zahlensystem
- Zahlensystem mit Basis $b = 16$ … hexadezimales Zahlensystem

- 1703 Geburtsstunde des binären Zahlensystems (G.W. Leibniz)
- Durchführung der vier Grundrechnungsarten im binären Zahlensystem



Zahlensysteme

binär - dezimal

- Beispiele von binären Zahlen mit ihrem dezimalen Äquivalent

binär $(\dots)_2$	dezimal $(\dots)_{10}$
0	0
1	1
10	2
11	3
100	4
1001	9
1111	15
10001	17
10101	21

Statt der Ziffern 0, 1 schreibt man auch L (Low), H (High)

Zahlensysteme
hexadezimal - dezimal

- hexadezimales Zahlensystem: 16 Ziffern, aber im Zehnersystem nur Ziffern $0 \mathrel{..} 9$
- Daher erweitert man die Dezimalziffern zu

$$0,1,2,\ldots,8,9,A,B,C,D,E,F$$

- Beispiele von hexadezimalen Zahlen mit ihrem dezimalen Äquivalent

hexadezimal $(\ldots)_{16}$	dezimal $(\ldots)_{10}$
10	16
1A	26
1F	31
FF	255
7FFF	32767

Zahlensysteme

binär – hexadezimal - dezimal

binär $(\ldots)_2$	hexadezimal $(\ldots)_{16}$	dezimal $(\ldots)_{10}$
0	0	0
1	1	1
10	2	2
11	3	3
100	4	4
101	5	5
110	6	6
111	7	7
1000	8	8
1001	9	9

binär $(\ldots)_2$	hexadezimal $(\ldots)_{16}$	dezimal $(\ldots)_{10}$
1010	A	10
1011	B	11
1100	C	12
1101	D	13
1110	E	14
1111	F	15
10000	10	16
10001	11	17
10010	12	18

Zahlenumwandlungen

- Von einem Quellsystem in ein Zielsystem

Quellsystem	Zielsystem
Zahl u Basis b $u = (u_m \dots u_1 u_0 . u_{-1} u_{-2} \dots u_{-s})_b$ $0 \leq u_i < b$	Zahl U Basis B $U = (U_n \dots U_1 U_0 . U_{-1} U_{-2} \dots U_{-t})_B$ $0 \leq U_i < B$

- Zahlen mit Nachkommastellen (reelle Zahlen) aufteilen in
  - Vorkommateil
  - Nachkommateil
- getrennt umrechnen

Zahlenumwandlungen – binär in dezimal

Konversion von ganzen Zahlen – Rechnen im Zielsystem

- Quelldarstellung: $(10110111)_2$
- Gesucht: Zieldarstellung $(\ )_{10}$

$$z = (\ldots a_3 a_2 a_1 a_0)_2 = \cdots + a_3 2^3 + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0 =$$

$$= (((\cdots + a_3) \cdot 2 + a_2) \cdot 2 + a_1) \cdot 2 + a_0$$

- Variante 1:

$$(1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1)_2$$

$$1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (183)_{10}$$

- Umwandeln der Ziffern $(0)_2$, $(1)_2$ in Zieldarstellung $(0)_{10}$, $(1)_{10}$
- Umwandeln der Quell-Basis in Zieldarstellung: $b = (10)_2 = (2)_{10}$

Zahlenumwandlungen – Hornerschema

Konversion von ganzen Zahlen – Rechnen im Zielsystem

- Variante 2:

$$(1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1)_2$$

$$((((((1 \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 =$$

$$(((((2 \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 =$$

$$((((5 \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 =$$

$$(((11 \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 =$$

$$((22 \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 =$$

$$(45 \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 =$$

$$91 \cdot 2 + 1 =$$

$$= (183)_{10}$$

Zahlenumwandlungen – allgemein

Konversion von ganzen Zahlen – Rechnen im Zielsystem

- Die Zahl u habe die Quelldarstellung $(u_m \ldots u_1 u_0)_b$
- Gesucht: Zieldarstellung der Zahl $U = (U_n \ldots U_1 U_0)_B$

- Vorgehensweise
  - Umwandeln der Ziffern u_i in Zieldarstellung
  - Umwandeln von b^i in Zieldarstellung
  - Berechnung von $u_m b^m + \cdots + u_1 b + u_0$

oder

  - Umwandeln der Ziffern u_i in Zieldarstellung
  - Umwandeln von b in Zieldarstellung
  - Hornerschema

$$((\ldots(u_m \cdot b + u_{m-1}) \cdot b + \cdots) \cdot b + u_1) \cdot b + u_0$$

Zahlenumwandlungen – hexadezimal in dezimal

Konversion von ganzen Zahlen – Rechnen im Zielsystem

- Quelldarstellung:$(1C7)_{16}$
- Gesucht: Zieldarstellung $(\;)_{10}$

- Umwandeln der Ziffern $(1)_{16}$, $(C)_{16}$, $(7)_{16}$ in $(1)_{10}$,$(12)_{10}$, $(7)_{10}$
- Umwandeln der Quell-Basis in Zieldarstellung: $b = (10)_{16} = (16)_{10}$

- Variante 1:

$$(1 \qquad C \qquad 7)_{16}$$

$$1 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^1 + 7 \cdot 16^0 = (455)_{10}$$

- Variante 2: Hornerschema

$$(1 \qquad C \qquad 7)_{16}$$

$$\underbrace{(1 \cdot 16 + 12)} \cdot 16 + 7 =$$

$$28 \cdot 16 + 7 = (455)_{10}$$

Zahlenumwandlungen – dezimal in binär

Konversion von ganzen Zahlen – Rechnen im Quellsystem

- Bsp.: $(6)_{10}$ ins binäre Zahlensystem umrechnen
- Das Stellenwertsystem der binären Zahlendarstellung lautet

$$z = (\ldots a_3 a_2 a_1 a_0)_2 = \cdots + a_3 2^3 + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0 =$$
$$= (((\cdots + a_3) \cdot 2 + a_2) \cdot 2 + a_1) \cdot 2 + a_0$$

Gesucht: $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$

- Man erkennt, dass $z - a_0$ durch 2 teilbar sein muss d.h., dass **$\boldsymbol{a_0}$ als Rest bei der Division von $\boldsymbol{z}$ durch 2** $(\boldsymbol{z \bmod 2 = a_0})$ auftritt

- Für $(6)_{10}$ ergibt sich:
  - $6:2 = 3, \text{Rest } a_0 = 0$
  - Wir definieren weiter $z_1 = \frac{z - a_0}{2}$, dann analog zu vorher
  - $z_1 = \frac{6-0}{2} = 3$ und $a_1 = Rest\ von\ 3:2 = 1$
  - $z_2 = \frac{3-1}{2} = 1$ und $a_2 = Rest\ von\ 1:2 = 1$ → $(6)_{10} = (110)_2$

Zahlenumwandlungen – dezimal in binär

Konversion von ganzen Zahlen – Rechnen im Quellsystem

- Quelldarstellung: $(29)_{10}$
- Gesucht: Zieldarstellung $(\,)_2$

- Berechnung:

$$U_0 = 29\ mod\ 2 = 1$$

$$U_1 = 14\ mod\ 2 = 0$$

$$U_2 = 7\ mod\ 2 = 1$$

$$U_3 = 3\ mod\ 2 = 1$$

$$U_4 = 1\ mod\ 2 = 1$$

LSB (niederstwertige Stelle)

MSB (höchstwertige Stelle)

- → Ergebnis: $(29)_{10} = (11101)_2$

- Umwandeln der Ziel-Basis in Quelldarstellung: $\mathrm{B} = (10)_2 = (2)_{10}$

Zahlenumwandlungen – allgemein

Konversion von ganzen Zahlen – Rechnen im Quellsystem

- Die Zahl u habe die Quelldarstellung $(u_m \ldots u_1 u_0)_b$
- Gesucht: Zieldarstellung der Zahl $U = (U_n \ldots U_1 U_0)_B$

- Vorgehensweise:
  - Umwandeln der Ziel-Basis B in Quelldarstellung
  - Berechnung von

$$U_0 = u \; mod \; B$$

$$U_1 = \left\lfloor \frac{u}{B} \right\rfloor mod \; B$$

$$U_2 = \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{u}{B} \right\rfloor}{B} \right\rfloor mod \; B$$

$$\ldots$$

$\lfloor x \rfloor$ *steht für größte ganze Zahl* $\leq x$

$a \; mod \; b$ ... *Rest von* $a : b$

  - Wobei der Vorgang abzubrechen ist, wenn $\lfloor \ldots \lfloor \lfloor u/B \rfloor / B \rfloor \ldots / B \rfloor = 0$

Zahlenumwandlungen – dezimal in hexadezimal

Konversion von ganzen Zahlen – Rechnen im Quellsystem

- Quelldarstellung: $(29)_{10}$
- Gesucht: Zieldarstellung $(\ )_{16}$

- Umwandeln der Ziel-Basis in Quelldarstellung: $\mathrm{B} = (10)_{16} = (16)_{10}$
- Berechnung:

$$U_0 = 29\, mod\ 16 = 13$$

$$U_1 = \quad 1\, mod\ 16 = 1$$

höchstwertige Stelle

- $(13)_{10} = (D)_{16}$
- $(1)_{10} = (1)_{16}$

- → Ergebnis: $(29)_{10} = (1D)_{16}$

Zahlenumwandlungen – binär in dezimal

Konversion vom Nachkommateil – Rechnen im Zielsystem

- Quelldarstellung: $(0.1101)_2$
- Gesucht: Zieldarstellung $(0.\quad)_{10}$

- Umwandeln der Ziffern $(0)_2$, $(1)_2$ in Zieldarstellung $(0)_{10}$, $(1)_{10}$
- Umwandeln der Quell-Basis: $b = (10)_2 = (2)_{10}$

- Variante 1:

$$(0.\ 1 \qquad 1 \qquad 0 \qquad 1)_2$$

$$1 \cdot (2)^{-1} + 1 \cdot (2)^{-2} + 0 \cdot (2)^{-3} + 1 \cdot (2)^{-4} = (0.8125)_{10}$$

- Variante 2: Hornerschema

$$1(u_{-4})\ 0(u_{-3})\ \ 1(u_{-2})\ \ 1(u_{-1})$$

$$(((\underline{1/2 + 0})/2 + 1)/2 + 1)/2 \ =$$

$$((\underline{0.5/2 + 1})/2 + 1)/2 \ =$$

$$(\underline{1.25/2 + 1})/2 \ =$$

$$1.625/2 \ = (0.8125)_{10}$$

AUTOMATION SYSTEMS GROUP

Zahlenumwandlungen

Konversion vom Nachkommateil – Rechnen im Zielsystem

- Die Zahl u habe die Quelldarstellung $(0.u_{-1}u_{-2}...u_{-m})_b$
- Gesucht: Zieldarstellung der Zahl $U = (0.\mathrm{U}_{-1}U_{-2}...U_{-\mathrm{n}})_B$

- Vorgehensweise
  - Umwandeln der Ziffern u_{-i} in Zieldarstellung
  - Umwandeln von Stellenwerten b^{-i} in Zieldarstellung
  - Berechnung von $u_{-1}b^{-1} + u_{-2}b^{-2} + \cdots + u_{-m}b^{-m}$

oder

  - Umwandeln der Ziffern u_{-i} in Zieldarstellung
  - Umwandeln von Basis b in Zieldarstellung
  - Hornerschema

$$((...(u_{-m}/b + u_{1-m})/b \ + \cdots + u_{-2})/b + u_{-1})/b$$

Zahlenumwandlungen – dezimal in binär

Konversion vom Nachkommateil – Rechnen im Quellsystem

- Quelldarstellung: $(0.8125)_{10}$
- Gesucht: Zieldarstellung $(0.\quad)_2$

- Umwandeln der Ziel-Basis: $\mathrm{B} = (10)_2 = (2)_{10}$
- Berechnung:

$$U_{-1} = \lfloor 0.8125 \cdot 2 \rfloor = \lfloor 1.625 \rfloor = 1$$

$$U_{-2} = \lfloor 0.625 \cdot 2 \rfloor = \lfloor 1.25 \rfloor = 1$$

$$U_{-3} = \lfloor 0.25 \cdot 2 \rfloor = \lfloor 0.5 \rfloor = 0$$

$$U_{-4} = \lfloor 0.5 \cdot 2 \rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1$$

$$U_{-5} = \lfloor 0 \cdot 2 \rfloor = \lfloor 0 \rfloor \rightarrow \text{Abbruch}$$

MSB

LSB

- → Ergebnis: $(0.8125)_{10} = (0.1101)_2$

Zahlenumwandlungen

Konversion vom Nachkommateil – Rechnen im Quellsystem

- Die Zahl u habe die Quelldarstellung $(0.u_{-1}u_{-2}...u_{-m})_b$
- Gesucht: Zieldarstellung der Zahl $U = (0.\mathrm{U}_{-1}U_{-2}...U_{-\mathrm{n}})_B$

- Vorgehensweise
  - Umwandeln der Ziel-Basis B in Quelldarstellung
  - Berechnung von

$$U_{-1} = \lfloor u \cdot B \rfloor$$

$$U_{-2} = \lfloor \{u \cdot B\} \cdot B \rfloor$$

$$U_{-3} = \left\lfloor \left\{ \{u \cdot B\} \cdot B \right\} \cdot B \right\rfloor$$

$$\ldots$$

$\lfloor x \rfloor$	Vorkommateil von x
$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$	Nachkommateil von x

- Abbruch bei $U_{-i} = 0$ oder gemäß Vorgabe (falls keine endliche Entwicklung; also z.B. auf 4 Nachkommastellen)

Zahlenumwandlungen – dezimal in binär

Konversion vom Nachkommateil – Rechnen im Quellsystem

- Quelldarstellung: $(0.815)_{10}$
- Gesucht: Zieldarstellung $(0.\quad)_2$ bis zur fünften Nachkommastelle

- Umwandeln der Ziel-Basis: $\mathrm{B} = (10)_2 = (2)_{10}$
- Berechnung:

$$U_{-1} = \lfloor 0.815 \cdot 2 \rfloor = \lfloor 1.63 \rfloor = 1$$

$$U_{-2} = \lfloor 0.63 \cdot 2 \rfloor = \lfloor 1.26 \rfloor = 1$$

$$U_{-3} = \lfloor 0.26 \cdot 2 \rfloor = \lfloor 0.52 \rfloor = 0$$

$$U_{-4} = \lfloor 0.52 \cdot 2 \rfloor = \lfloor 1.04 \rfloor = 1$$

$$U_{-5} = \lfloor 0.04 \cdot 2 \rfloor = \lfloor 0.08 \rfloor = 0$$

MSB

LSB

...

- → Ergebnis: $(0.815)_{10} = (0.11010)_2$

Zahlenumwandlungen – binär in hexadezimal

$$u = (0010\ 1001\ 1111\ .\ 1100\ 0110)_2$$
$$U = (\ 2\quad 9\quad F\ .\ C\quad 6\ )_{16}$$

$$u = (\ 10\ 1010\ 1110\ .\ 1111\ 0001\ 1\ )_2$$
$$u = (0010\ 1010\ 1110\ .\ 1111\ 0001\ 1000)_2$$
$$U = (\ 2\quad A\quad E\ .\ F\quad 1\quad 8\ )_{16}$$

bin	hex
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	A
1011	B
1100	C
1101	D
1110	E
1111	F

Zahlenumwandlungen – binär in hexadezimal

- Aus den Bits Viererblöcke vor und nach dem Komma bilden (jeweils vom Komma weg)
- Viererblöcke einzeln ins hexadezimale System umwandeln
- Gegebenenfalls sind führende Nullen zu ergänzen oder Nullen am Ende der Zahl anzuhängen

- Die Konversion in umgekehrter Richtung ist genauso leicht zu realisieren

- Wegen der leichten Konversion und der kompakten Darstellung ist das hexadezimale Zahlensystem in der Informatik weit verbreitet

Rechnen im binären System

Die Addition im dezimalen Zahlensystem

- Bsp. Dezimalsystem (Basis: 10):

$$\begin{array}{cccccc} & & 3 & 2 & 4 & 5 \\ + & & & {}_{1}1 & 9 & 2 \\ \hline & & 3 & 4 & 3 & 7 \end{array}$$

- Im Binärsystem sehr ähnlich:
  - Ziffern – von rechts nach links – Stelle für Stelle aufaddieren
  - Zwischenergebnis unten notieren, jedoch nur letzte Stelle
  - Ist das Zwischenergebnis mehrstellig, so entstehen Überträge, die beim Abarbeiten der jeweils nächsten Spalte berücksichtigt werden müssen.

Rechnen im binären System

Die Addition im binären Zahlensystem

- Im binären Zahlensystem gibt es nur die Ziffern 0 und 1
- Entsprechend einfach sind die Additionsregeln:

$0 + 0 \ = 0$
$0 + 1 \ = 1$
$1 + 0 \ = 1$

- Es bleibt nur mehr ein Fall zu behandeln, nämlich:
  - $1 + 1 =?$
- Problem ähnlich wie im dezimalen System, bei den Rechnungen wo es zu einem Übertrag kommt ($5 + 5 =?$ oder $7 + 8 \ =?$)
- Daher:

$$\boxed{1 + 1 = 10}$$

- weil Stellenwertsystem

Rechnen im binären System

Die Addition im binären Zahlensystem – Beispiel

$$\boxed{\begin{array}{l} 0+0=0 \\ 0+1=1 \\ 1+0=1 \\ 1+1=10 \end{array}}$$

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ + & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & & & & & & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccccccc} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ + & 0 & 1 & 1 & {}_1 0 & 1 & 1 \\ \hline & & & & & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccccccc} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ + & 0 & 1 & {}_1 1 & {}_1 0 & 1 & 1 \\ \hline & & & & 0 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{cccccccc} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ + & 0 & {}_1 1 & {}_1 1 & {}_1 0 & 1 & 1 \\ \hline & & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccccccc} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ + & {}_1 0 & {}_1 1 & {}_1 1 & {}_1 0 & 1 & 1 \\ \hline & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccccccc} & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ + & & {}_1 0 & {}_1 1 & {}_1 1 & {}_1 0 & 1 & 1 \\ \hline & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}$$

- Im Ergebnis tritt ein Überlauf auf

Rechnen im binären System

Die Subtraktion im dezimalen Zahlensystem

- Bsp. im Dezimalsystem (Basis 10):

$$
\begin{array}{rcccc}
 & 3 & 2 & \color{red}{4} & 5 \\
- & & {}_{1}1 & \color{red}{9} & 2 \\
\hline
 & 3 & 0 & 5 & 3
\end{array}
$$

Minuend

Subtrahend

- Im Binärsystem funktioniert das sehr ähnlich:

  Falls bei der Subtraktion zweier Ziffern die Ziffer des Minuenden kleiner ist als die des Subtrahenden:

  - Von der höherwertigen Stelle eine Zahl im Wert der Basis ausborgen
  - Minuend um diesen Wert erhöhen
  - Zwischenergebnis anschreiben
  - höherwertigen Subtrahend um eins erhöhen

Rechnen im binären System

Die Subtraktion im binären Zahlensystem – Beispiel

$$\begin{array}{l} 0 - 0 = 0 \\ 0 - 1 = -1 \\ 1 - 0 = 1 \\ 1 - 1 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ - & & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & & & & & 0 \end{array}$$

$(1)_2 - (1)_2 = (0)_2$

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ - & & & {}_1 1 & 1 & 1 \\ \hline & & & & 1 & 0 \end{array}$$

Wir „borgen“ uns eine Zahl von der nächsten Stelle und berechnen $(10)_2 - (1)_2 = (1)_2$; Bei der nächsten Stelle müssen wir $(1)_2$ zum Subtrahenden addieren

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ - & & {}_1 & {}_1 1 & 1 & 1 \\ \hline & & & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Wir „borgen“ uns eine Zahl von der nächsten Stelle und erhalten daher $(10)_2 - (10)_2 = (0)_2$

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ - & {}_1 & {}_1 & {}_1 1 & 1 & 1 \\ \hline & & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Für die letzte Stelle „borgen“ wir uns wieder eine Zahl von der nächsten Stelle und berechnen $(10)_2 - (1)_2 = (1)_2$

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ - & {}_1 & {}_1 & {}_1 1 & 1 & 1 \\ \hline & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{array}$$

$(1)_2 - (1)_2 = (0)_2$

Rechnen im binären System

Die Multiplikation im dezimalen Zahlensystem

- Multiplikation für Dezimalzahlen:
  - Multiplikand ziffernweise mit dem Multiplikator multiplizieren
  - Ergebnisse jeweils um eine Stelle verschoben untereinander schreiben
  - Zwischenergebnisse addieren

- Zum Beispiel:

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & 4 & 5 & \cdot & 2 & 4 & 3 \\
\hline
2 & 9 & 0 & & & & \\
 & 5 & 8 & 0 & & & \\
 & & 4 & 3 & 5 & & \\
{\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & & & & \\
\hline
3 & 5 & 2 & 3 & 5 & &
\end{array}
$$

- Im Binärsystem einfacher, da weniger Ziffern

Rechnen im binären System

Die Multiplikation im binären Zahlensystem

- Die Multiplikationsregeln lauten:

$0 \cdot 0 = 0$
$0 \cdot 1 = 0$
$1 \cdot 0 = 0$
$1 \cdot 1 = 1$

- Man kann dieselbe Methode wie bei Dezimalzahlen verwenden, z.B.:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 1 & \cdot & 1 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
 & & 1 & 0 & 0 & 1 & & & \\
 & {}_{1} & {}_{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & & \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & &
\end{array}
$$

Zeilen, die durch Multiplikation mit 0 *entstehen, können auch weggelassen werden*

Rechnen im binären System

Die Multiplikation im binären Zahlensystem

$$\begin{array}{l} 0 \cdot 0 = 0 \\ 0 \cdot 1 = 0 \\ 1 \cdot 0 = 0 \\ 1 \cdot 1 = 1 \end{array}$$

- für Implementierung im Rechner günstiger:
  - mit der am weitesten rechts stehenden Ziffer des Multiplikators beginnen
  - Teilergebnisse nach links verschieben (a).
- Denn
  - nicht alle Zwischenergebnisse müssen gespeichert werden
  - jedes Teilergebnis kann sofort zum Endergebnis addiert werden
  - ermöglicht effizientere Implementierung (b).

$$\begin{array}{ccccccc}
\multicolumn{7}{l}{1\;0\;0\;1 \cdot 1\;0\;1\;1}\\ \hline
1&0&0&1&&&\\
&&1&0&0&1&\\
&{}_1&{}_1&1&0&0&1\\ \hline
1&1&0&0&0&1&1
\end{array}
\quad\Rightarrow\quad
\overset{\text{(a)}}{\begin{array}{ccccccc}
\multicolumn{7}{r}{1\;0\;0\;1 \cdot 1\;0\;1\;1}\\ \hline
&&&1&0&0&1\\
&&1&0&0&1&\\
1&{}_1 0&{}_1 0&1&&&\\ \hline
1&1&0&0&0&1&1
\end{array}}$$

bzw.

$$\overset{\text{(b)}}{\begin{array}{cccccccc}
&\multicolumn{7}{r}{1\;0\;0\;1 \cdot 1\;0\;1\;1}\\ \hline
&&&&1&0&0&1\\
+&&&1&0&0&1&\\ \hline
&&&1&1&0&1&1\\
+&1&{}_1 0&{}_1 0&1&&&\\ \hline
&1&1&0&0&0&1&1
\end{array}}$$

Rechnen im binären System

Die Multiplikation mit Zweierpotenz

$$\begin{array}{l} 0 \cdot 0 = 0 \\ 0 \cdot 1 = 0 \\ 1 \cdot 0 = 0 \\ 1 \cdot 1 = 1 \end{array}$$

- Multiplikation mit Zweierpotenz im Binärsystem
- selber Effekt wie bei Multiplikation mit Zehnerpotenz im Dezimalsystem

$$\begin{array}{cccccccc} 5 & 7 & 1 & \cdot & 1 & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} \\ \hline 5 & 7 & 1 & & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & & & & \\ & & 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & 0 & 0 & & \\ \hline 5 & 7 & 1 & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & & \end{array} \qquad \begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \cdot & 1 & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & & \end{array}$$

- Verschiebung des Multiplikanden um drei Stellen nach links, weil $8 = 2^3$
- Allgemein: Multiplikation mit 2^k entspricht einer Verschiebung des Multiplikanden um k Stellen nach links
  - engl.: „shift“

Rechnen im binären System

Die Division im dezimalen Zahlensystem

- Division im Dezimalsystem:

$$\begin{array}{l} 7\lrcorner\,4\;3\;1 : 3 = 2\;4\;7\;7 \\ 1\;4 \\ \;\;\;2\;3 \\ \;\;\;\;\;\;2\;1 \end{array}$$

- Im Dezimalsystem ist ein wesentlicher Bestandteil des Dividierens das Erraten einer Quotientenziffer.
- Betrachtet man zum Beispiel die Division

  $568: 63 =?$

  so sieht man zwar, dass 63 nicht mehr als 9-mal in 568 enthalten ist;
- Aber ob 63 nun 9-mal oder vielleicht nur 8-mal oder etwa noch weniger oft in 568 enthalten ist, bedarf eines geschulten Blickes (oder eines Taschenrechners)
- Im Binärsystem kommen als mögliche Quotientenziffern nur 0 oder 1 in Frage.

Rechnen im binären System

Die Division im binären Zahlensystem

- Bsp.:

$$\begin{array}{rcccccccl}
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & : & 1\,0\,1\,0 = 1 \\
- & 1 & {}_1 0 & 1 & 0 & & & & \\ \cline{2-5}
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccccl}
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & : & 1\,0\,1\,0 = 1\,0 \\
- & 1 & {}_1 0 & 1 & 0 & & & & \\ \cline{2-5}
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & & & \\
 & - & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ \cline{3-6}
 & & & 1 & 1 & 0 & 1 & &
\end{array}$$

Dividend : Divisor = Quotient

$$\begin{array}{rcccccccl}
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & : & 1\,0\,1\,0 = 1\;0\;1 \\
- & 1 & {}_1 0 & 1 & 0 & & & & \\ \cline{2-5}
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & & & \\
 & - & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ \cline{3-6}
 & & & 1 & 1 & 0 & 1 & & \\
 & & - & 1 & {}_1 0 & 1 & 0 & & \\ \cline{4-7}
 & & & 0 & 0 & 1 & 1 & & Rest
\end{array}$$

- entscheiden, ob Divisor ≤ Teil des Dividenden („geht rein“)
  - ja: $\text{Quotientenziffer} = 1$
  - nein: $\text{Quotientenziffer} = 0$

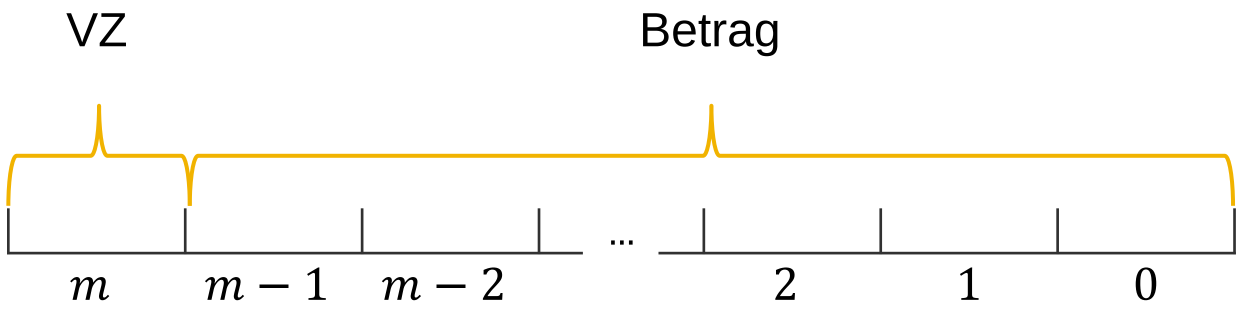
Darstellung negativer Zahlen

- Rechner-intern nur 0 und 1 zur Verfügung
  - Kodierung des Minus?

- Vorzeichen und Betrag
- Einerkomplement
- Zweierkomplement
- Exzessdarstellung

Darstellung negativer Zahlen

Darstellung durch Vorzeichen und Betrag



- m-te Bit: Vorzeichen (VZ)
  - positives Vorzeichen … 0
  - negatives Vorzeichen … 1
- restliche Bits: Betrag der darzustellenden Zahl

- Vorzeichen getrennt behandeln
  - bei arithmetischen Operationen und bei Vergleichsoperationen

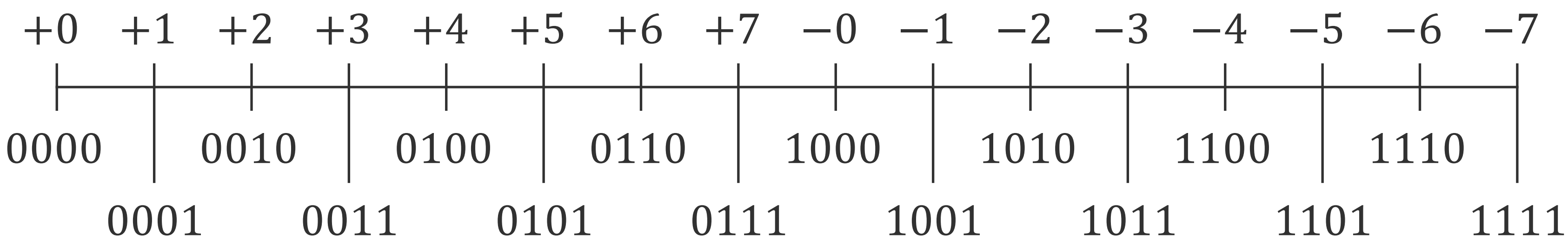
- Bsp. für $m = 6$:

$+27$	0	$0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1$
-27	1	$0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1$

Darstellung negativer Zahlen

Darstellung durch Vorzeichen und Betrag - Ordnungsrelation

- Bsp.: $m=3$



- Ordnungsrelation gilt nur innerhalb der positiven Zahlen
  - Negativen Zahlen kommen „hinter“ den positiven
- Die Zahl 0 besitzt zwei Darstellungen $(+0/-0)$

Darstellung negativer Zahlen
Darstellung durch Vorzeichen und Betrag

dezimale Zahl	dezimale Kodierung	binäre Kodierung
$+0$	0	$000\ \dots\ 00$
$+1$	1	$000\ \dots\ 01$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$+2^m - 1$	$2^m - 1$	$011\ \dots\ 11$
-0	2^m	$100\ \dots\ 00$
-1	$2^m + 1$	$100\ \dots\ 01$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$-2^m + 1$	$2^{m+1} - 1$	$111\ \dots\ 11$

Darstellung negativer Zahlen

Einerkomplementdarstellung

- negative Zahl unterscheidet sich von positiver Zahl durch
  - Vertauschen von 0 und 1
- Ausgangspunkt: positiver Betrag der Zahl

- Bsp. für $m = 7$:

$$\begin{array}{ll} +27 & 0\,0\,0\,1\,1\,0\,1\,1 \\ \hline -27 & 1\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,0 \end{array}$$

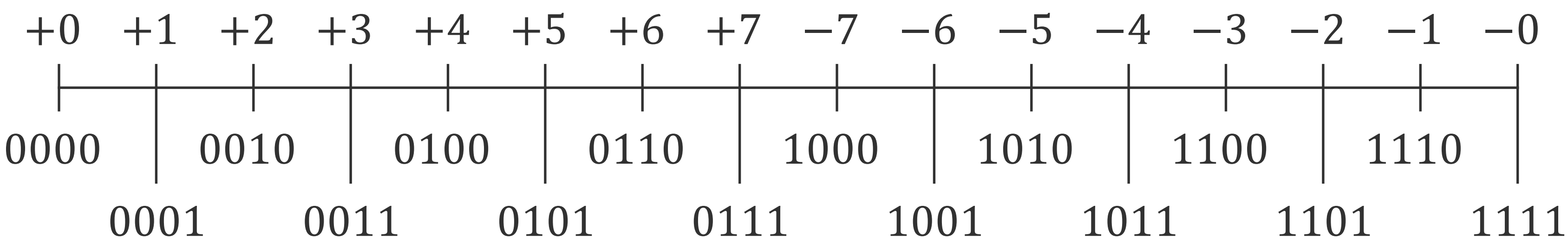
- Zahl 0 besitzt zwei Darstellungen
  - $000 \dots 000 \; = \; +0$
  - $111 \dots 111 \; = \; -0$

- Positive und negative Zahlen können am führenden Bit unterschieden werden

Darstellung negativer Zahlen

Einerkomplementdarstellung - Ordnungsrelation

- Bsp.: $m=3$



- Ordnungsrelation gilt (getrennt) innerhalb der positiven und negativen Zahlen
  - Negative Zahlen kommen „hinter“ den positiven

- Zahl 0 besitzt zwei Darstellungen ($+0/-0$)

Darstellung negativer Zahlen
Einerkomplementdarstellung

dezimale Zahl	dezimale Kodierung	binäre Kodierung
0	0	$000\ \ldots\ 00$
1	1	$000\ \ldots\ 01$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2^m - 1$	$2^m - 1$	$011\ \ldots\ 11$
$-2^m + 1$	2^m	$100\ \ldots\ 00$
$-2^m + 2$	$2^m + 1$	$100\ \ldots\ 01$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
-1	$2^{m+1} - 2$	$111\ \ldots 10$
-0	$2^{m+1} - 1$	$111\ \ldots\ 11$

Darstellung negativer Zahlen

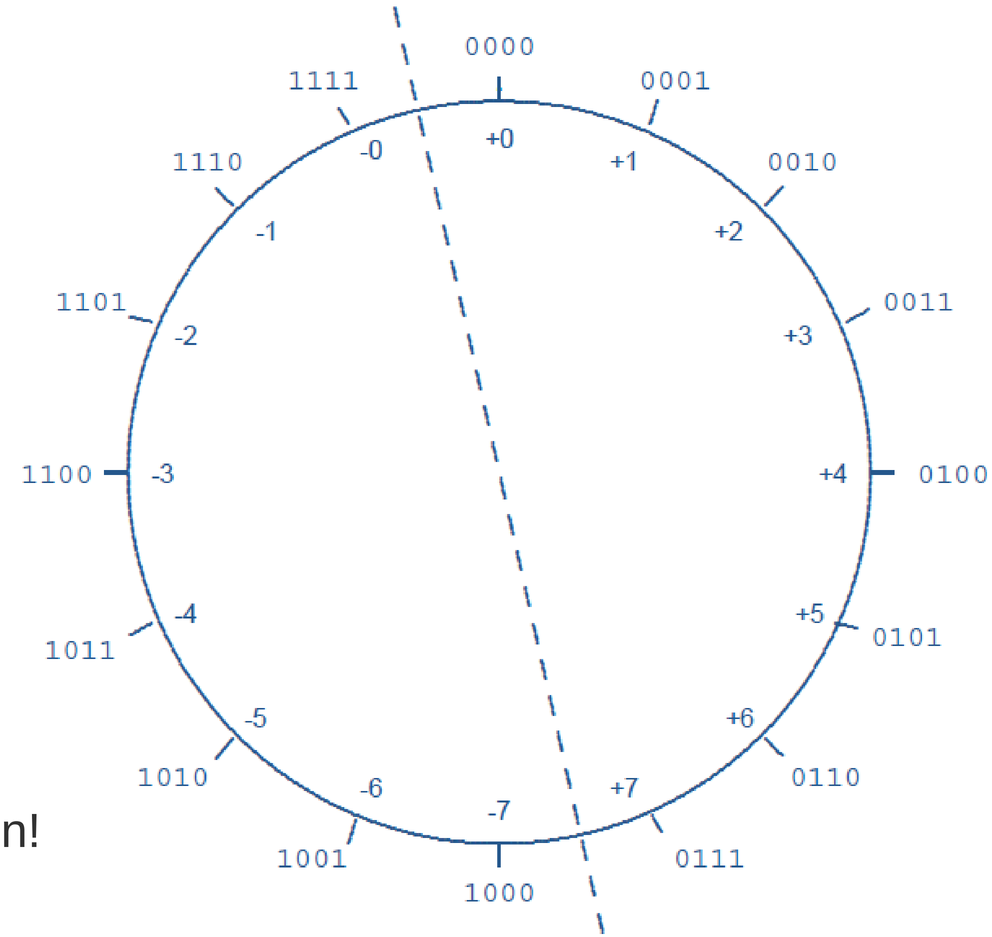
Einerkomplementdarstellung

- Addition wie Rechnung $modulo\ 2^{m+1} - 1$
  - z.B.: $(+6) + \ (-4) = (+2) = ((+6) + (+11))\ mod\ 15$

- Denkt man sich die Zahlen auf einem Kreis angeordnet, erkennt man
  - Modulo-Rechnung
  - dass aufgrund der zwei-fachen Darstellung der 0 Probleme auftreten können
  - z.B.:

$$\begin{array}{r|l} 0110 & +6 \\ 1011 & -4 \\ \hline 10001 & +1 \end{array}$$

  - daher bei Überlauf 1 addieren!



Darstellung negativer Zahlen

Addition in Einerkomplementdarstellung - Beispiel 1 (m = 5)

$$\begin{array}{l}
0+0=0\\
0+1=1\\
1+0=1\\
1+1=10
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccccl}
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \textcolor{red}{0} & & -25\\
+ & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \textcolor{red}{1} & & 19\\
\hline
 & & & & & & \textcolor{red}{1} & &
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{rcccccccl}
 & 1 & 0 & 0 & 1 & \textcolor{red}{1} & 0 & & -25\\
+ & 0 & 1 & 0 & {}_{\textcolor{red}{1}}0 & \textcolor{red}{1} & 1 & & 19\\
\hline
 & & & & & \textcolor{red}{0} & 1 & &
\end{array}
\Rightarrow$$

$$\Rightarrow
\begin{array}{rcccccccl}
 & 1 & 0 & 0 & \textcolor{red}{1} & 1 & 0 & & -25\\
+ & 0 & 1 & {}_{\textcolor{red}{1}}0 & {}_{\textcolor{red}{1}}\textcolor{red}{0} & 1 & 1 & & 19\\
\hline
 & & & & \textcolor{red}{0} & 0 & 1 & &
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{rcccccccl}
 & 1 & 0 & \textcolor{red}{0} & 1 & 1 & 0 & & -25\\
+ & 0 & 1 & {}_{\textcolor{red}{1}}\textcolor{red}{0} & {}_{1}0 & 1 & 1 & & 19\\
\hline
 & & & \textcolor{red}{1} & 0 & 0 & 1 & &
\end{array}
\Rightarrow$$

$$\Rightarrow
\begin{array}{rcccccccl}
 & 1 & \textcolor{red}{0} & 0 & 1 & 1 & 0 & & -25\\
+ & 0 & \textcolor{red}{1} & {}_{1}0 & {}_{1}0 & 1 & 1 & & 19\\
\hline
 & & \textcolor{red}{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & &
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{rcccccccl}
 & \textcolor{red}{1} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & & -25\\
+ & \textcolor{red}{0} & 1 & {}_{1}0 & {}_{1}0 & 1 & 1 & & 19\\
\hline
 & \textcolor{red}{\mathbf{1}} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & & -6
\end{array}$$

Darstellung negativer Zahlen

Addition in Einerkomplementdarstellung - Beispiel 2 (m = 5)

$$0+0=0 \quad 0+1=1 \quad 1+0=1 \quad 1+1=10$$

$$\begin{array}{lcccccccr} & & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 25 \\ + & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -19 \\ \hline & & & & & & & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccr} & & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 25 \\ + & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -19 \\ \hline & & & & & & 0 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccr} & & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 25 \\ + & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -19 \\ \hline & & & & & 1 & 0 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccr} & & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 25 \\ + & & 1 & {}_1 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -19 \\ \hline & & & & 0 & 1 & 0 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccr} & & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 25 \\ + & & {}_1 1 & {}_1 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -19 \\ & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccr} & & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 25 \\ + & & {}_1 1 & {}_1 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -19 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccr} & & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 25 \\ + & & {}_1 1 & {}_1 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -19 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \\ + & & & & & & {}_1 & 1 & \\ \hline & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 6 \end{array}$$

Darstellung negativer Zahlen

Addition in Einerkomplementdarstellung - Beispiel 3 (m = 5)

$$
\begin{array}{l}
0 + 0 = 0 \\
0 + 1 = 1 \\
1 + 0 = 1 \\
1 + 1 = 10
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -6 \\
+ & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -19 \\
\hline
 & & & & & & 1 &
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -6 \\
+ & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -19 \\
\hline
 & & & & & 0 & 1 &
\end{array}
\Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow
\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -6 \\
+ & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -19 \\
\hline
 & & & & 1 & 0 & 1 &
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -6 \\
+ & 1 & {}_{1}0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -19 \\
\hline
 & & & 0 & 1 & 0 & 1 &
\end{array}
\Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow
\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -6 \\
+ & {}_{1}1 & {}_{1}0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -19 \\
\hline
 & & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 &
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -6 \\
+ & {}_{1}1 & {}_{1}0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -19 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 &
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -6 \\
+ & {}_{1}1 & {}_{1}0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -19 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \\
+ & & & & & {}_{1} & 1 & \\
\hline
 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -25
\end{array}
$$

Darstellung negativer Zahlen

Addition in Einerkomplementdarstellung - Beispiel 3 (m = 5)

$$\begin{array}{l}0+0=0\\0+1=1\\1+0=1\\1+1=10\end{array}$$

- Eine tatsächliche Überschreitung des Zahlenbereiches kann durch einen Plausibilitätstest des Vorzeichens erkannt werden, z.B.:

$$\begin{array}{rcccccc r}
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -25 \\
+ & 1 & {}_1 0 & {}_1 1 & 1 & 0 & 0 & -19 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\
+ & & & & & & 1 & \\
\hline
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 19 \\
\hline
 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \quad -44
\end{array}$$

- Da die Summe zweier negativer Zahlen nicht positiv sein kann, ist bei der Addition ein wirklicher Überlauf entstanden.
- Richtig wäre also -44, was aber mit $\mathrm{m}{=}5$ nicht darstellbar ist

Darstellung negativer Zahlen

Zweierkomplementdarstellung

- Negative Zahlen im Zweierkomplement durch Ergänzung auf 2^{m+1} dargestellt
- Ausgangspunkt: Einerkomplement der Zahl
  - Berechnung negativer (!) Zahlen: 1 dazu addieren

	$+27$	$0\,0\,0\,1\,1\,0\,1\,1$
Einerkomplementdarst.:	-27	$1\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,0$
Zweierkomplementdarst.:	-27	$1\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,1$

1 dazu addieren

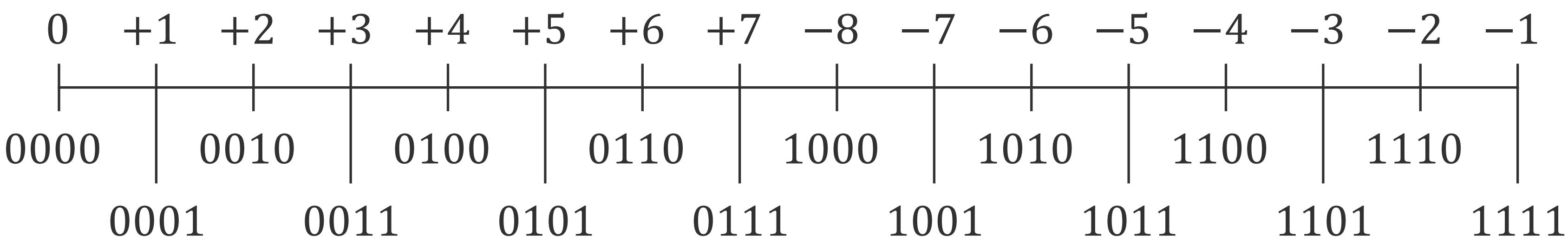
  - Alternativ: die binären Ziffern der positiven Zahl von rechts nach links bis inkl. zur ersten 1 kopieren und die restlichen Ziffern komplementieren.

$$
\begin{array}{ll}
+27 & 0\,0\,0\,1\,1\,0\,1\,1 \\
\hline
-27 & \underbrace{1\,1\,1\,0\,0\,1\,0}_{\text{restliche Ziffern komplementiert}}\,\underbrace{1}_{\text{von rechts bis zur ersten 1 kopiert}}
\end{array}
$$

Darstellung negativer Zahlen

Zweierkomplementdarstellung - Ordnungsrelation

- Bsp.: $m=3$



- Ordnungsrelation wie beim Einerkomplement
  - Ordnung (getrennt) innerhalb der positiven und negativen Zahlen
  - Die negativen Zahlen kommen „hinter“ den positiven

- Die Zahl 0 hat eine eindeutige Darstellung

Darstellung negativer Zahlen
Zweierkomplementdarstellung

- Positive und negative Zahlen können am führenden Bit unterschieden werden.
- Überläufe bei Rechnungen kann man ignorieren, da die 0 eine eindeutige Darstellung besitzt

dezimale Zahl	dezimale Kodierung	binäre Kodierung
0	0	$000\ \ldots\ 00$
1	1	$000\ \ldots\ 01$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2^m - 1$	$2^m - 1$	$011\ \ldots\ 11$
-2^m	2^m	$100\ \ldots\ 00$
$-2^m + 1$	$2^m + 1$	$100\ \ldots\ 01$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
-1	$2^{m+1} - 1$	$111\ \ldots\ 11$

$0 + 0 = 0$
$0 + 1 = 1$
$1 + 0 = 1$
$1 + 1 = 10$

Darstellung negativer Zahlen

Addition in Zweierkomplementdarstellung - Beispiel 1 (m = 5)

$$\begin{array}{rcccccccr} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & & 25 \\ + & 1 & 0 & 1 & 1 & {}_{1}0 & 1 & & -19 \\ \hline & & & & & & 0 & & \end{array} \Rightarrow \quad \begin{array}{rcccccccr} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & & 25 \\ + & 1 & 0 & 1 & 1 & {}_{1}0 & 1 & & -19 \\ \hline & & & & & 1 & 0 & & \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcccccccr} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & & 25 \\ + & 1 & 0 & 1 & 1 & {}_{1}0 & 1 & & -19 \\ \hline & & & & 1 & 1 & 0 & & \end{array} \Rightarrow \quad \begin{array}{rcccccccr} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & & 25 \\ + & 1 & {}_{1}0 & 1 & 1 & {}_{1}0 & 1 & & -19 \\ \hline & & & 0 & 1 & 1 & 0 & & \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcccccccr} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & & 25 \\ + & {}_{1}1 & {}_{1}0 & 1 & 1 & {}_{1}0 & 1 & & -19 \\ \hline & & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & & \end{array} \Rightarrow \quad \begin{array}{rcccccccr} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & & 25 \\ + & {}_{1}1 & {}_{1}0 & 1 & 1 & {}_{1}0 & 1 & & -19 \\ \hline \cancel{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & & 6 \end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
0+0=0\\
0+1=1\\
1+0=1\\
1+1=10
\end{array}
$$

Darstellung negativer Zahlen

Addition in Zweierkomplementdarstellung - Beispiel 2 (m = 5)

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & & -25\\
+ & 0 & 1 & 0 & 0 & {}_1 1 & 1 & & 19\\
\hline
 & & & & & & 0 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & & -25\\
+ & 0 & 1 & 0 & {}_1 0 & {}_1 1 & 1 & & 19\\
\hline
 & & & & & 1 & 0 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & & -25\\
+ & 0 & 1 & {}_1 0 & {}_1 0 & {}_1 1 & 1 & & 19\\
\hline
 & & & & 0 & 1 & 0 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & & -25\\
+ & 0 & 1 & {}_1 0 & {}_1 0 & {}_1 1 & 1 & & 19\\
\hline
 & & & 1 & 0 & 1 & 0 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & & -25\\
+ & 0 & 1 & {}_1 0 & {}_1 0 & {}_1 1 & 1 & & 19\\
\hline
 & & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & & -25\\
+ & 0 & 1 & {}_1 0 & {}_1 0 & {}_1 1 & 1 & & 19\\
\hline
 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & & -6
\end{array}
$$

Darstellung negativer Zahlen

Addition in Zweierkomplementdarstellung - Beispiel 3 (m = 5)

$0+0=0$	
$0+1=1$	
$1+0=1$	
$1+1=10$	

$$
\begin{array}{cccccccr}
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\
+ & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -19 \\
\hline
 & & & & & & 1 &
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{cccccccr}
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\
+ & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -19 \\
\hline
 & & & & & 1 & 1 &
\end{array}
\quad \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow \quad
\begin{array}{cccccccr}
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\
+ & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -19 \\
\hline
 & & & & 1 & 1 & 1 &
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{cccccccr}
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\
+ & 1 & {}_{1}0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -19 \\
\hline
 & & & 0 & 1 & 1 & 1 &
\end{array}
\quad \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow \quad
\begin{array}{cccccccr}
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\
+ & {}_{1}1 & {}_{1}0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -19 \\
\hline
 & & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 &
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{ccccccccr}
 & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\
 & + & {}_{1}1 & {}_{1}0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -19 \\
\hline
 & \cancel{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & -25
\end{array}
$$

- Eine tatsächliche Überschreitung des Zahlenbereiches kann wieder durch einen Plausibilitätstest des Vorzeichens erkannt werden, z.B.:

$$
\begin{array}{cccccccl}
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -25 \\
+ & 1 & {}_{1}0 & {}_{1}1 & 1 & 0 & 1 & -19 \\
\hline
\cancel{\mathbf{1}} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & +20
\end{array}
$$

- Da die Summe zweier negativer Zahlen nicht positiv sein kann, ist bei der Addition ein wirklicher Überlauf entstanden.

- Da die Multiplikation zweier m-stelliger Zahlen ein $2m$-stelliges Ergebnis produzieren kann, müssen die Faktoren vor Durchführung der Rechenoperation auf $2m$ Stellen erweitert werden.
- Dabei ist zu beachten, dass positive Zahlen mit Nullen, negative mit Einsern ergänzt werden müssen, um das Vorzeichen nicht zu zerstören.
- Bsp. 1:

$$\begin{array}{ccccc} (6)_{10} & \cdot & (-3)_{10} & = & (-18)_{10} \\ \hline (\underbrace{000000}_{\textit{Ergänzende Nullen}}\mathbf{000110})_2 & \cdot & (\underbrace{111111}_{\textit{Ergänzende Einser}}\mathbf{111101})_2 & = & (101110)_2 \end{array}$$

Darstellung negativer Zahlen

Multiplikation in Zweierkomplementdarstellung (2 von 2)

- Bsp. 2: $m=3$

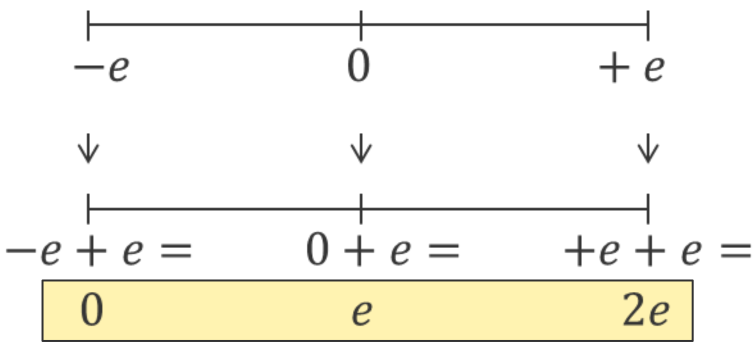
	$1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,1$	$(-7)_{10}$ *mit Vorzeichenerweiterung*
$\cdot$	$1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,1$	$(-3)_{10}$ *mit Vorzeichenerweiterung*
	$1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,1$	($11111001 \cdot 1$, *um null Stellen nach links verschoben*)
	$0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0$	($11111001 \cdot 0$, *um eine Stelle nach links verschoben*)
	$1\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,0$	($11111001 \cdot 1$, *um zwei Stellen nach links verschoben*)
	$1\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0$	($11111001 \cdot 1$, *um drei Stellen nach links verschoben*)
	$1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0$	($11111001 \cdot 1$, *um vier Stellen nach links verschoben*)
	$0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0$	($11111001 \cdot 1$, *um fünf Stellen nach links verschoben*)
	$0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0$	($11111001 \cdot 1$, *um sechs Stellen nach links verschoben*)
$+$	$1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0$	($11111001 \cdot 1$, *um sieben Stellen nach links verschoben*)
	$0\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,1$	$(+21)_{10}$, in 4 Bit nicht darstellbar

- Die Bits werden über den linken Rand hinausgeschoben, Überlauf kann vernachlässigt werden

Darstellung negativer Zahlen

Exzessdarstellung

- Exzess e addieren, sodass Zahlen nicht mehr negativ
- Symmetrischer Exzess



Exzess e addieren

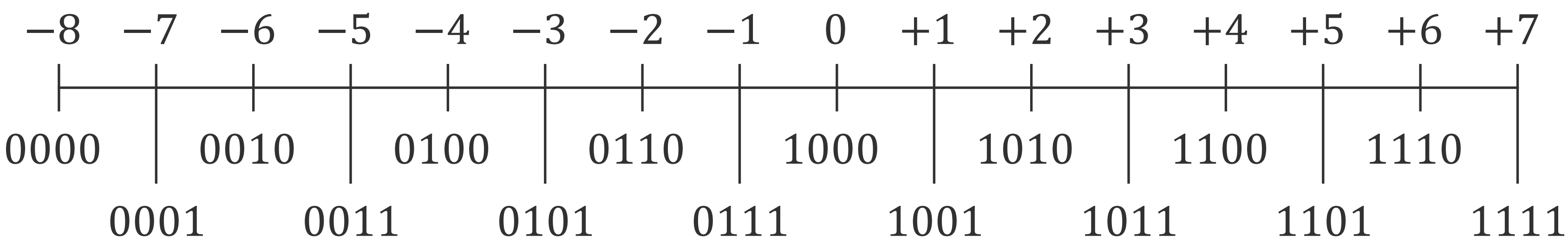
Zahlen in Exzessdarstellung sind um e größer als sie eigentlich sind

- Exzess ergibt sich aus kleinster darstellbarer negativer Zahl
- $0_e = e$
- Welcher Zahlenbereich binär darstellbar?

Darstellung negativer Zahlen

Exzessdarstellung - Ordnungsrelation

- Bsp.: p=4, Exzess $e = 2^{p-1} = 2^3 = 8$



- Weiterer symmetrischer Exzess: $e = 2^{p-1} - 1$
  - Bei p=4, Exzess $e = 2^3 - 1 = 7$, also $(-7, \dots, +8)$ darstellbar
- Ordnungserhaltend
  - kleineren Zahlen auch in Exzessdarstellung kleiner
- Zahl 0 hat eine eindeutige Darstellung

Darstellung negativer Zahlen
Exzessdarstellung

- Nicht-symmetrischer Exzess

$-k \quad\quad 0 \quad\quad +l$

$\downarrow \quad\quad \downarrow \quad\quad \downarrow$

$-k+k= \quad 0+k= \quad +l+k=$

$\boxed{0 \quad\quad k \quad\quad l+k}$

Exzess k addieren

Zahlen in Exzessdarstellung sind um k größer als sie eigentlich sind

- kleinste darstellbare negative Zahl $-k$ → Exzess k
- Exzess k addieren, sodass Zahlen nicht mehr negativ

- Bsp.: $k=3, p=4$

-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$	$+6$	$+7$	$+8$	$+9$	$+10$	$+11$	$+12$
0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

AUTOMATION SYSTEMS GROUP

Darstellung negativer Zahlen

Exzessdarstellung - Rechenoperationen

- Exzess bei arithmetischen Operationen berücksichtigen!
  - Addition: Exzess von der Summe subtrahieren
  - Subtraktion: Exzess zur Summe addieren

- Bsp:
  - $Exzess\ e = 12,\ A = -3,\ B = 4,\ A + B = ?$

  - $A_e = A + e \quad = -3 + 12 = 9$
  - $B_e = B + e \quad = 4 + 12 = 16$

  - $A_e + B_e = A + e + B + e = A + B + 2e = -3 + 4 + 2 * 12 = 25$
  - $(A + B)_e = A + B + e = -3 + 4 + 12 = 13$

  - $(A + B)_e = A_e + B_e - e = 9 + 16 - 12 = 13$

AUTOMATION SYSTEMS GROUP

Darstellung negativer Zahlen

Exzessdarstellung – Beispiel

- Bsp: $-(A+B)$
  - $A_e = 011001, B_e = 110101, e = 100101$

1. $(A+B)_e = A_e + B_e - e$
2. $-(A+B)_e = \ 0_e - (A+B)_e + e$

	0	1	1	0	0	1	-12
+	1	1	0	1	0	1	16
1	0	0	1	1	1	0	
−	1	0	0	1	0	1	e
	1	0	1	0	0	1	4

Darstellung negativer Zahlen

Exzessdarstellung – Beispiel

- $-(A+B)$
- $A_e = 011001, B_e = 110101, e = 100101$

1. $(A+B)_e = A_e + B_e - e$
2. $-(A+B)_e = 0_e - (A+B)_e + e$

	1	0	0	1	0	1	0_e
$-$	1	0	1	0	0	1	4

Problem, da Subtrahend größer

		1	0	0	1	0	1	0_e
$+$		1	0	0	1	0	1	e
	1	0	0	1	0	1	0	
$-$		1	0	1	0	0	1	4
		1	0	0	0	0	1	-4

Darstellung negativer Zahlen

Beispiel 1

- Dezimale Zahl -502 umwandeln auf 12 Bit-Kodierung in
  - Vorzeichen und Betrag
  - Einerkomplement
  - Zweierkomplement
  - Exzessdarstellung mit symmetrischem Exzess $e = 2^{11}$(Spezialfall!)

$-(502)_{10} = \quad -(1\,1\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,0)_2$

mit 0en auffüllen und Vorzeichenbit 1 (weil neg. Zahl)

Vorzeichen & Betrag: $(1\,|\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,0)_2$

Bits invertieren

Einerkomplement: $(1\,|\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,1)_2$

1 dazu zählen

Zweierkomplement: $(1\,|\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0)_2$

VZ-Bit invertieren

Exzessdarstellung: $(0\,|\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0)_2$

AUTOMATION SYSTEMS GROUP

Darstellung negativer Zahlen

Beispiel 2

- Bitmuster 1101 interpretieren als Zahl z in der Darstellung
  - Vorzeichen und Betrag
    - $VZ = 1$, also negativ, $Betrag = (101)_2$, daher $z = -5$
  - Einerkomplement
    - Erste Stelle 1, also negativ, daher Betrag invertieren
    - $Betrag = (010)_2$, daher $z = -2$
  - Zweierkomplement
    - Erste Stelle 1, also negativ, daher Betrag invertieren und 1 addieren
    - $Betrag = (011)_2$, daher $z = -3$
  - Exzessdarstellung mit $e = (101)_2$
    - dezimal: $z_e = 13$, $z = z_e - e = 13 - 5 = 8$
    - binär: $z = z_e - e = (1101)_2 - (101)_2 = (1000)_2 = (8)_{10}$