Beispiel 16 (MA2 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 5, 26.04.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 04/2006

1 Angabe

(a) Für die Funktion $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ berechne man die partiellen Ableitungen f_x, f_y und die Gleichung der Tangentialebene an der Stelle $(x0, y0) = (0.2; 0.3)$.
(b) Man berechne alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung für die Funktion $f(x,y) = x^2 \sin y + \cos(x+2y)$.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Partielle Ableitungen, Gradient

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offem. $f : D \to \mathbb{R}$ und $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$. Existiert die Ableitung der 'partiellen' Funktion

$$x \mapsto (a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

an der Stelle $x_i = a_i$, so nennt man diese die **partielle Ableitung von f nach $\mathbf{x_i}$ im Punkte a**: sie wird mit

$$\frac{\delta f(x)}{\delta x_i}|_{x=a} \qquad \text{oder} \qquad \frac{\delta f}{\delta x_i}(a)$$

bezeichnet. Das Zeichen 'δ' anstelle von 'd' soll verdeutlichen, dass con einer Funktion mit mehreren Variablen das Änderungsverhalten bezüglich einer Veränderlichen untersucht wird, wobei für das Differenzieren die anderen Ableitungen als Konstanten anzusehen sind.
Für die partiellen Ableitungen sind ebendalls die Bezeichnungen f_{x_i} üblich bzw. $f_x, f_y, f_z, f_t, \ldots$, wenn Variablen $x, y, z, t, \ldots$ lauten. Dementsprechend schreibt man für die höheren Ableitungen:

$$f_{xx} = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}, \qquad f_{xy} = f(_x)_y = \frac{\delta}{\delta y}(\frac{\delta}{\delta x}) \qquad \text{usw.}$$

Wenn man die partiellen Ableitungen einer Funktion zu einem Vektor zusammenfasst, so erhält man den **Gradienten** von f an der Stelle x:

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta f}{\delta x_1})(x) \\ \frac{\delta f}{\delta x_2})(x) \\ \vdots \\ \frac{\delta f}{\delta x_n})(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$x \mapsto grad\, f(x)$ ist eine vektorwertige Funktion ('Vektorfeld'): Jedem $x \in D$ wird der Vektor $grad\, f(x) \in \mathrm{R}^n$ zugeordnet (vorausgesetzt f ist partiell differenzierbar).

2.2 Satz von Schwarz über die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen

Der Satz von Schwarz besagt, dass für zweimal stetig differenzierbare Funktionen die Reihenfolge der partiellen Differentiation nicht entscheidend für das Ergebnis ist. Tatsächlich sagt er noch mehr aus, weil er aus der Existenz der ersten partiellen Ableitungen und einer partiellen zweiten Ableitung die Existenz und den Wert einer anderen partiellen zweiten Ableitung herleitet.
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offene Menge und $f : U \to \mathbb{R}$ einmal stetig differenzierbare Funktion in den zwei Variablen x, y. Wenn die eine zweite partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ existiert und stetig ist, dann existiert auch die andere zweite partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, diese ist stetig und es gilt: :$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$.
Insbesondere ist $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, also 2mal stetig differenzierbar.
Oft werden die Klammern weggelassen und man schreibt kürzer: :$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ oder auch $f_{xy} = f_{yx}$.

2.3 Tangentialebene

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$, dann definiert $f(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$ konstant) eine Hyperfläche in F. Für jede parametrisierte Kurve $t \mapsto x(t)$ auf dieser Hyperfläche gilt $f(x(t)) = c \qquad (t \in I)$ und es gilt weiters:

$$grad\, f(x(t)) \cdot x'(t) = 0$$

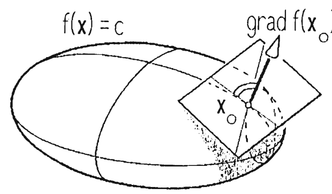

Abb. 178 – Tangentialebene

In jedem Punkt $x_0 = (x_0, y_0, z_0)$ der durch $f(x) = f(x, y, z) = c$ implizit dargestellten Fläche ist $grad\, f(x_0)$ orthogonal zu den Tangenten sämtlicher parametrisierten Flächenkurven durch diesen Punkt. Somit ist $grad\, f(x_0)$ orthogonal zu allen Tangenten an die Fläche im Punkt x_0 bzw. $grad\, f(x)$ ist in jedem Flächenpunkt orthogonal zur Niveaufläche $f(x) = c$.
Die Ebene, die von den Tangenten an die Fläche in einem Flächenpunkt aufgespannt wird heißt **Tangentialebene**.
Ist $grad\, f(x_0) \neq 0$ so ist $grad\, f(x_0) \cdot (x - x_0) = 0$ eine Normalengleichung, d.h. explizit:

> Normalengleichung der Tangentialebene an der Niveaufläche $f(x, y, z) = c$ im Flächenpunkt (x_0, y_0, z_0):
>
> $$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)$$

Wird nun $z = f(x,y)$ durch die Niveaufläche $F(x,y,z) = z - f(x,y) = 0$ dargestellt, ergibt sich als Gleichung für die Tangentialebene:

$$grad\, F(x_0, y_0, z_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$$

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

3 Lösung des Beispiels

3.1 Beispiel a

Für die Funktion $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ berechne man die partiellen Ableitungen f_x, f_y und die Gleichung der Tangentialebene an der Stelle $(x0, y0) = (0.2; 0.3)$.
$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} = (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$
Es wird die Kettenregel angewendet für die folgendne partiellen Ableitungen:

$$f_x = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - x^2 - y^2}^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$f_y = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - x^2 - y^2}^{-1/2}(-2y) = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

Die Tangentialebene ist definiert durch $z - = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$ - wir setzen ein $(x0, y0) = (0.2; 0.3)$ und erhalten $z = -0,21442251x - 0,32163376y + 1,07211253$.

3.2 Beispiel b

Man berechne alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung für die Funktion $f(x,y) = x^2 \sin y + \cos(x + 2y)$.
Achtung: beim 2. Summanden cos() ist immer die Kettenregel anzuwenden!
Zunächst die ersten partiellen Ableitungen f_x und f_y:

$$f_x = 2x \cdot \sin y - \sin(x + 2y) \cdot 1$$

$$f_y = x^2 \cdot \cos y - \sin(x + 2y) \cdot 2 = x^2 \cdot \cos y - 2\sin(x + 2y)$$

Nun betrachten wir f_{xx} und f_{yy}:

$$f_{xx} = 2 \cdot \sin y - \cos(x + 2y) \cdot 1$$

$$f_{yy} = x^2 \cdot (-\sin y) - 2 \cdot \cos(x + 2y) \cdot 2 = -x^2 \cdot \sin y - 4 \cdot \cos(x + 2y)$$

Schlußendlich berechnen wir die gemischten partiellen Ableitungen f_{xy} und f_{yx}:

$$f_{xy} = \frac{\delta}{\delta x}(x^2 \cdot \cos y - 2 \cdot \sin(x + 2y)) = 2 \cdot x \cdot \cos y - 2 \cdot \cos(x + 2y)$$

$$f_{yx} = \frac{\delta}{\delta y}(2 \cdot x \cdot \sin y - \sin(x + 2y)) = 2 \cdot x \cdot \cos y - 2 \cdot \cos(x + 2y)$$

Beide gemischten partiellen Ableitungen stimmen überein.