Beispiel 432 (MA1 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 3, 27.03.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 03/2006

1 Angabe

Man zeige mittels Differenzieren:

$$Arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\frac{1}{2}\cdot Arcsin\,x=\frac{\pi}{4}\qquad x\in(-1,1)$$

2 Lösung des Beispiels

Zunächst die grundlegenden Ableitungen.

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt(1-x^2)}\qquad(\arctan x)'=\frac{x}{(1-x^2)}'$$

Wir nehmen eine Umformung vor und stellen den arcsin-Teil auf die rechte Seite. Diesen leiten wir sofort ab und erhalten:
stellen wir arcsinx auf die andere seite und leiten es gleich ab, dann kommen wir auf:

$$-\frac{1}{2\cdot\sqrt(1-x^2)}$$

$\frac{\pi}{4}$ ist eine Konstante und wir abgeleitet zu Null.

Nun betrachten wir den arctan-Teil, bei dem wir einen kleinen trick anwenden müssen, indem wir ein u definieren mit:

$$u=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

und nun die Ableitung vornehmen:

$$(\arctan u)'=\frac{1}{1+u^2}\cdot u'=\frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}}\cdot u'=\frac{1+x}{2}\cdot u'$$

Nun nehmen wir die Ableitung von u vor und definieren u_Z als den Zähler von u, u_N als den Nenner von u:

$$u' = \frac{u'_Z \cdot u_N - u_Z \cdot u'_N}{u_N^2}$$
$$u'_Z = (\sqrt{1-x})' = 0.5 \cdot (1-x)^{-0.5} \cdot (-1)$$
$$u'_N = (\sqrt{1+x})' = 0.5 \cdot (1+x)^{-0.5}$$
$$\Rightarrow \frac{\frac{(-1)\cdot\sqrt{1+x}}{2\cdot\sqrt{1-x}} - \frac{\sqrt{1-x}}{2\cdot\sqrt{1+x}}}{1+x}$$

Nun formen wir weiter um:

$$\frac{\frac{-1-x-1+x}{2\cdot\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1-x}}}{1+x} = \frac{-1}{(1+x)\cdot\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1-x}}$$

Nun haben wir die Berechnung von u' fertiggestellt und fügen zusammen:

$$\frac{\frac{1+x}{2}\cdot(-1)}{(1+x)\cdot\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1-x}} = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2\cdot\sqrt{1-x^2}}}$$

Nun müssen wir noch zeigen, dass gilt:

$$Arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2}\cdot Arcsin\, x = \frac{\pi}{4} \qquad x \in (-1,1)$$

Aus unserer Ableitung folgt, dass $f'(x) = 0\, \forall x \in (-1,1)$ gilt. Nun berechnen wir $f(0)$ und erhalten $\frac{\pi}{4}$. Daher gilt $\forall x \in (-1,1)$: $f(x) = \frac{\pi}{4}$.

Warum ist das so?
Wir behaupten: Wenn zwei Funktionen $f(x), g(x)$ auf einem Intervall I die gleiche Ableitung besitzen, dann unterscheiden sie sich nur durch eine Konstante.
Zum Beweis: Die Ableitungen der Funktionen sind auf I gleich, d.h.: $\forall x \in$ gilt: $f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow f'(x) - g'(x) = 0 \Rightarrow$ Mittelwertsatz: $\forall x, y \in I, x \leq y$ existiert ein $h \in [x,y]$, sodaß gilt: $(f(y) - g(y)) - (f(x) + g(x)) = (f'(h) - g'(h)) \cdot (y - x)$. Nachdem $f'(h) - g'(h) = 0$ ist laut Voraussetzung, folgt daraus: $(f(y) - g(y)) - (f(x) + g(x)) = 0 \cdot (y - x) = 0 \Rightarrow f(y) - g(y) = f(x) - g(x)$.
Wenn man jetzt an einer beliebigen Stelle a aus dem Intervall I in die Funktion einsetzt, dann bekommt man ein $f(a) - g(a) =: c$ heraus, und aus obigem folgt, dass $f(x) = c + g(x)$ für alle x aus dem Intervall I ist.
Wenn an der Stelle, an der man eingesetzt hat, dann herauskommt, dass die Differenz 0 ist, müssen die Funktionen also auf dem Intervall gleich sein.