

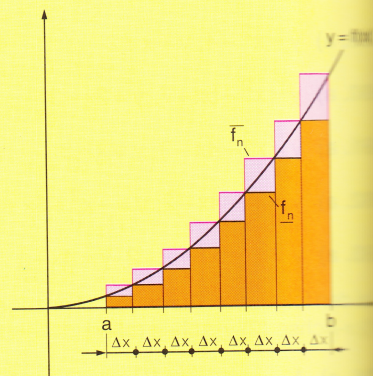
Vermischte Aufgaben

Versetzen wir uns in die Lage von NEWTON und LEIBNIZ. Stellen wir uns vor, noch nie etwas vom bestimmten Integral gehört zu haben. Es interessiert uns der Inhalt A der Fläche, die zwischen dem Graphen einer Funktion $y = f(x)$, der x -Achse und den beiden senkrechten Geraden mit den Gleichungen $x = a$ und $x = b$ (vgl. nebenstehende Figur) liegt.

Wir beginnen damit, das Intervall $[a, b]$ in n gleich lange Teile der Länge Δx zu zerlegen.

Es gilt dann: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Dann ersetzen wir den Funktionsgraphen „von oben“ und „von unten“ jeweils durch eine **Treppenfunktion**.



An Stelle des Flächeninhalts unterhalb der Parabel berechnen wir die Flächeninhalte F_n und $\bar{F}_n$ unterhalb der Treppenfunktionen f_n und $\bar{f}_n$. F_n heißt **Untersumme**, $\bar{F}_n$ heißt **Obersumme**.

705. Die obigen Überlegungen sind für die Funktion $y = x^2$ nachzuvollziehen.

a) Zunächst werden Unter- und Obersumme berechnet. Wir zeigen den Rechengang für die Untersumme

$$\begin{aligned} F_n &= f(a) \cdot \Delta x + f(a + \Delta x) \cdot \Delta x + f(a + 2\Delta x) \cdot \Delta x + \dots + f(a + (n-1)\Delta x) \cdot \Delta x = \\ &= \Delta x \cdot [a^2 + (a + \Delta x)^2 + (a + 2\Delta x)^2 + \dots + (a + (n-1)\Delta x)^2] = \\ &= \Delta x [a^2 + (a^2 + 2a\Delta x + (\Delta x)^2) + (a^2 + 2 \cdot 2a\Delta x + 2^2(\Delta x)^2) + \dots + (a^2 + 2(n-1)a\Delta x + (n-1)^2(\Delta x)^2)] = \\ &= \Delta x \underbrace{[a^2 + a^2 + a^2 + \dots + a^2]}_{n \text{ Summanden}} + 2a\Delta x(1 + 2 + \dots + (n-1)) + (\Delta x)^2(1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2) \end{aligned}$$

Nun ist es notwendig, sich an die „Folgen und Reihen“ zu erinnern:

$$\sum_{i=1}^k i = 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^k i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$\begin{aligned} F_n &= \Delta x \left[na^2 + 2a\Delta x \cdot \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} + (\Delta x)^2 \cdot \frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6} \right] = \\ &= \Delta x \left[na^2 + a\Delta x \cdot (n-1)n + (\Delta x)^2 \cdot \frac{(n-1) \cdot n(2n-1)}{6} \right] = \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot \left[na^2 + a \cdot \frac{b-a}{n} \cdot (n-1)n + \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 \cdot \frac{(n-1) \cdot n(2n-1)}{6} \right] = \\ &= (b-a) \left[a^2 + a(b-a) \frac{(n-1)}{n} + (b-a)^2 \cdot \frac{(n-1) \cdot (2n-1)}{6n^2} \right] = \\ &= (b-a) \left[a^2 + a \cdot (b-a) \left(1 - \frac{1}{n} \right) + (b-a)^2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(2 - \frac{1}{n} \right) \right] \end{aligned}$$

Die Berechnung der Obersumme ist analog durchzuführen.

Anleitung: $\bar{F}_n = f(a + \Delta x) \cdot \Delta x + f(a + 2\Delta x) \cdot \Delta x + f(a + 3\Delta x) \cdot \Delta x + \dots + f(a + n\Delta x) \cdot \Delta x = \dots$