Technische Universität Wien
Fakultät für Physik
Institut für Allgemeine Physik

Unterlagen zur Vorlesung

Modellbildung in der Physik

SS 2009

Prof. *Wolfgang Husinsky*

Inhaltsverzeichnis

I Die Bewegungsgleichung 5

1 Physikalische Grundgesetzte 5

1.1 Die Newton´schen Axiome 5
1.2 Trägheitsgesetz 6
1.3 Kraft, Masse und das zweite Newton'sche Axiom 6
1.3.1 Gewichtskraft 7

2 Die Naturkräfte 8

2.1 Fernwirkung 9
2.2 Kontaktkräfte 10
2.3 Lösen der Bewegungsgleichung 11
2.3.1 Lösung durch Integration 11
2.3.2 Numerisches Lösen 12

3 Die Gravitationskraft 14

4 Die Coulomb (elektrische-) Kraft 16

4.1 Ladungsquantisierung 16
4.2 Ladungserhaltung 17
4.3 Das Coulomb'sche Gesetz 18
4.4 Der Feldbegriff: das elektrische- bzw. das Gravitationsfeld 19
4.4.1 Elektrische feldlinien 20
4.4.2 Elektrische Dipole in elektrischen Feldern 22

5 Arbeit und kinetische Energie 23

5.1 Allgemeine Bemerkungen zum Begriff Ënergie 23
5.1.1 Energieerhaltung 25
5.2 Eindimensionale Bewegung mit konstanten Kräften 25
5.2.1 Der Zusammenhang zwischen Gesamtarbeit und kinetischer Energie 25
5.2.2 Die von einer ortsabghängigen Kraft verrichtetet Arbeit . 26
5.2.3 Arbeit und Energie in drei Dimensionen 26

6 Arbeit und potentielle Energie 27

6.0.4 Konservative Kräfte 28
6.0.5 Arbeit und Potential in $1/r^2-$Feldern 28
6.0.6 Erdbeschleunigung 29
6.1 Berechnung von Potentialen und Kraftfeldern 30
6.1.1 Der Gauß´sche Satz 30

6.1.2 Quantitative Darstellung des Gauß'schen Gesetzes 34

6.1.3 Berechnung von Feldern mit dem Gauß´schen Satz 36
6.1.4 Potential und $\vec{E} - Feld$ mittels Relaxationsmethode . . . 38

Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Bestimmung der Gravitationskonstante nach Cavendish 15
2 Beispiel: Wieviel elektronenladung in Kupferring 18
3 Faser, wodurch sie sich parallel zum Feld ausrichten. 20
4 a) Elektrische Feldlinien von zwei positiven Punktladungen. Die Pfeile würden in die umgekehrte Richtung zeigen, wenn die Ladungen negativ wären. b) Die gleichen elektrischen Feldlinien, veranschaulicht durch Fasern in Öl. 21
5 Ein Wasser-Molekül hat ein permanentes elektrisches Dipolmoment, 22
6 Ein Dipol in einem homogenen elektrischen Feld erfährt entgegengesetzt gleiche Kräfte, die ihn drehen, bis sein Dipolmoment die Richtung des Felds hat. 23
7 Ein nichtpolares Molekül in dem inhomogenen Feld einer positiven Punktladung. Das induzierte elektrische Dipolmoment t-J ist parallel zu dem Feld der Punktladung. Da sich die Punktladung näher am Zentrum der negativen Ladung als am Zentrum der positiven Ladung des Moleküls befindet, gibt es eine resultierende Anziehungskraft zwischen dem Dipol und der Punktladung. Wenn die Punktladung negativ wäre, würde das induzierte Dipolmoment umgekehrt sein und das Molekül würde wieder von der Punktladung angezogen werden. 24
8 Zwei Wege im Raum verbinden die Punkte 1 und 2. Die Arbeit einer konservativen Kraft zwischen Punkt 1 und 2 auf dem Weg A sei W Da die Arbeit bei einem vollen Umlauf null ist, muss die Arbeit für den Rückweg entlang des Wegs B gleich - W sein. Wird der Weg B in entgegengesetzter Richtung, also von Punkt 1 zu Punkt 2, ist die Kraft an jedem Punkt genauso groß wie bei der Bewegung von 2 nach 1, während die Verschiebung entgegengesetzt ist. Damit ist die Arbeit von Punkt 1 zu Punkt 2 entlang des Wegs Bebenfalls W Allgemein gilt also, dass die Arbeit auf jedem Weg, der die beiden Punkte 1 und 2 verbindet, gleich ist. 28
9 Beispiel: Berechnung des elektrischen feldes einer Linienladung . 31
10 Eine Oberfläche von beliebiger Gestalt, die einen elektrischen Dipol einschließt. Wenn die Oberfl äche beide Ladungen einschließt, ist die Zahl der Linien, die die Oberfläche von innen her durchstoßen, gleich der Zahl der Linien, die die Oberfläche von außen durchdringen, unabhängig davon, wie die Oberfläche gestaltet ist. 32
11 Eine Oberfläche von beliebiger Gestalt, die die Ladungen $+2q$ und $-q$ einschließt. Jede Feldlinie, die an $-q$ endet, verläuft entweder nur im Innengebiet oder verlässt die Oberfläche und tritt wieder ein. Die Gesamtzahl der durch die Oberfläche austretenden Linien bei der Ladungen ist die gleiche wie für eine ei nzelne eingeschlossene Ladung $+q$. 33
12 Elektrische Feldlinien eines homogenen Felds, die eine Fläche A sen krecht durchdringen. Das Produkt $\vec{E}\vec{A}$ ist der elektrische Fluss durch die Fläche. 33

13 Eine Kugeloberfläche mit einer eingeschlossenen Punktladung q. a) Die Gesamtzahl der elektrischen Feldlinien, die aus dieser Oberfläche heraustreten, ist gleich der Gesamtzahl der austretenden Linien durch eine beliebige geschlossene Oberfläche, die ebenfa lls die Ladung q ein schließt. b) Der Gesamtfluss durch eine Kugeloberfläche ist leicht zu berechnen. Er ist gleich dem Produkt aus E_n und der Oberfläche $4\pi r^2$, also $E_n 4\pi r^2$. 35
14 Beispiel zur Berechnung des E-Feldes mittels Gauß´schem Satz. . 37
15 Gauß'sche Oberfläche für die Berechnung von $\vec{E}$, das von einer unendlichen Ladungsebene erzeugt wird. (Nur der Teil der Ebene ist gezeigt, die innerhalb der Gauß'schen Oberfläche liegt.) Auf den ebenen Flächen dieses Zylinders liegt $\vec{E}$ parallel zu der Oberflächennormalen, und der Betrag ist konstant. Auf der gekrümmten Oberfläche (Mantelfläche) steht $\vec{E}$ senkrecht zur Oberflächennormalen 38
16 Potentialgitter für Relaxationsmethode, ... 39

Vorwort

Diese Vorlesungsunterlagen sind nur als Hilfe zur Vorlesung gedacht und können und sollen nur im engen Zusammenhang mit der Vorlesung ihren Sinn erfüllen. Die Texte sind zum Studium vor bzw. nach der Vorlesung gedacht, um in der Vorlesung die Probleme im Detail zu besprechen bzw. um dann zusammen mit den Folien und ergänzender Literatur den besprochenen Stoff zu verarbeiten und zu lernen.

Teil I
Die Bewegungsgleichung

1 Physikalische Grundgesetzte

Wir wollen unser Studium der physikalischen Erscheinungen mit der Untersuchung bewegter Körper beginnen. Die Untersuchung von Bewegungen wird Kinematik genannt. Die Messung solcher Bewegungen begründete in gewisser Weisevor mehr als 400 Jahren die *Physik,* wie wir sie heute als Wissenschaft kennen. Es wird jedoch unser Ziel sein, an Hand dieses extrem wichtigen Beispiels, allgemeine Vorgangsweisen in der Lösung von Problemen zu lernen.

1.1 Die Newton´schen Axiome

Eine der fundamentalen Gesetze der Physik sind die sogenannten Newton´schen Axiom. Auf ihnen beruht praktisch die gesamte Mechanik.

Die klassische Mechanik untersucht die Kräfte, die Körper aufeinander ausüben, und erklärt auch Bewegungsänderungen über die Kräfte, die auf einen Körper wirken. Sie beschreibt die Erscheinungen mit den drei Newton'schen Axiomen der Bewegung. Natürlich hat jeder eine intuitive Vorstellung von einer Kraft als Ziehen oder Drücken, etwa bei Muskeln, Gummibändern oder Federn. Erst die Newton'schen Axiome erlauben aber, unsere Vorstellung über Kräfte zu präzisieren.

Eigentlich könnten wir die meisten mechanischen Probleme ausgehend vom ersten Newton´schen Axiom bzw. seiner Formulierungs als Differentialgleichung lösen. In der Praxis wird es jedoch sinnvoll sein, weitere daraus folgende Gesetzmäßigkeiten zu verwenden, um ein spezielles Problem elegant zu lösen (z.B. Energieerhaltung, Impulserhaltung, lineare und Kreisbewegungen etc.)

Axiom 1 (Erstes Newton´sches Axiom) *Ein Körper bleibt in Ruhe oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit weiter, wenn keine resultierende äußere Kraft auf ihn wirkt.*

Axiom 2 (Zweites Newton´sches Axiom) *Ein Körper wird in Richtung der resultierenden äußeren Kraft beschleunigt, die auf ihn wirkt. Die Beschleunigung ist gemäß $\overrightarrow{F}_{ges} = m\overrightarrow{a}$ proportional zur resultierenden äußeren Kraft $\overrightarrow{F}_{ges}$> wobei m die Masse des Körpers ist. Die resultierende äußere Kraft auf einen Körper ist die Vektorsumme aller Kräfte, die auf ihn wirken, $\overrightarrow{F} ges = \sum \overrightarrow{F}$. Somit gilt*

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \tag{1}$$

.

Axiom 3 (Drittes Newton´sches Axiom) *Kräfte treten immer paarweise auf. Wenn der Körper A eine Kraft $F_B^{(A)}$ auf den Körper B ausübt, wirkt eine gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft $F_A^{(B)}$ vom Körper B auf den Körper A. Somit gilt $F_A^{(B)} = -F_B^{(A)}$*

1.2 Trägheitsgesetz

Stoßen Sie einen Eiswürfel auf der Theke an. Er wird zunächst ein Stück gleiten und bleibt schließlich liegen. Wenn die Theke nass ist, wird er weiter gleiten, bevor er liegen bleibt. Ein Stückchen Trockeneis (gefrorenes Kohlendioxid) , das quasi auf einem Kissen aus Kohlendioxiddampf schwebt, gleitet viel weiter, ohne dass sich seine Geschwindigkeit wesentlich ändert. Vor Galilei glaubte man, dass ständig eine Kraft, ein Zug oder Druck, vorhanden sein muss, damit sich ein Körper mit konstanter Geschwindigkeit weiterbewegen kann. Galilei und später Newton erkannten dagegen, dass das aus dem Alltag bekannte Abbremsen von Körpern auf die Reibungskraft zurückzuführen ist. Wird die Reibung verringert, nimmt gleichzeitig die Bremswirkung ab. Ein Wasserfilm oder ein Kissen aus Gas verringert die Reibung besonders wirksam und ermöglicht, dass Körper ohne große Geschwindigkeitsänderung über große Strecken gleiten können. Galilei folgerte daraus, dass sich die Geschwindigkeit eines Körpers nie ändern würde, wenn man ihn von allen äußeren Kräften einschließlich der Reibung befreien würde. Diese Eigenschaft der Materie beschrieb er als Trägheit. Deshalb wird diese Aussage, die Newton später als erstes Newton'sches Axiom umformulierte, auch das Trägheitsgesetz genannt..

1.3 Kraft, Masse und das zweite Newton'sche Axiom

Das erste und das zweite Newton'sche Axiom können als Definition der Kraft betrachtet werden. Eine Kraft ist ein äußerer Einfluss auf einen Körper, der veranlasst, dass der Körper relativ zu einem *Inertialsystem*

Definition 4 (Inertialsystem) *Ein Bezugssystem, das mit dem gleichförmig bewegten Flugzeug verbunden ist, nennt man ein Inertialsystem. Ein Bezugssystem, das relativ zu einem solchen Inertialsystem beschleunigt wird, ist selbst kein Inertialsystem. Das erste Newton 'sche Axiom gibt uns also ein Kriterium in die Hand, mit dem wir bestimmen können, ob ein Bezugssystem ein Inertialsystem ist. Ja, es ist durchaus sinnvoll, das erste Newton'sche Axiom als Definition von Inertialsystemen zu betrachten. Jedes Bezugssystem, in dem sich ein kräftefreier Körper geradlinig gleichförmig bewegt, ist ein Inertialsystem.*

beschleunigt wird. (Dabei haben wir angenommen, dass keine weiteren Kräfte wirken.) Die Kraft und die durch sie hervorgerufene Beschleunigung haben dieselbe Richtung. Der Betrag der Kraft ist das Produkt aus der Masse des beschleunigten Körpers und dem Betrag der Beschleunigung. Diese Definition beruht auf Gleichung 1.

Kräfte können über die Dehnung gleicher Gummibänder verglichen werden. Werden etwa zwei gleiche Gummibänder um die gleiche Länge gedehnt, haben die auf sie wirkenden Kräfte den gleichen Betrag. Körper besitzen einen inneren Widerstand gegen jegliche Art von Beschleunigung. Vergleichen Sie den Widerstand, wenn Sie mit dem Fuß einen Fußball oder eine Kegelkugel zu beschleunigen versuchen. Ihre blauen Fußspitzen werden Sie schnell lehren, dass die Kegelkugel wesentlich schwerer als der Fußball zu beschleunigen ist. Diese innere Eigenschaft des Körpers wird die Masse genannt. Sie ist ein Maß für die Trägheit des Körpers. Das Verhältnis zweier Massen lässt sich quantitativ dadurch definieren, dass man auf beide Körper die gleiche Kraft anwendet und ihre Beschleunigungen vergleicht. Erzeugt eine Kraft $\vec{F}$ bei Anwendung auf einen Körper der Masse m_1 eine Beschleunigung $\vec{a}_1$ während die gleiche Kraft bei Anwendung auf einen Körper der Masse m_2 die Beschleunigung a_2 liefert, ist das Verhältnis ihrer Massen durch

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} \tag{2}$$

definiert. Diese Definition stimmt mit unserer intuitiven Vorstellung von der Masse überein. Wenn auf zwei verschiedene Körper eine Kraft angewendet wird, wird der Körper mit der größeren Masse weniger beschleunigt. Das Experiment zeigt: Das Verhältnis der Beschleunigungen a_1/a_2 , das die beiden gleich großen Kräfte hervorrufen, die auf die zwei Körper wirken, ist unabhängig von Betrag, Richtung und Art der Kraft. Die Masse ist eine innere Eigenschaft eines Körpers, die unabhängig von seinem Ort ist - sie ist immer gleich, unabhängig davon ob, sich der Körper auf der Erde oder auf dem Mond befindet oder gar frei im Weltraum schwebt.

1.3.1 Gewichtskraft

Lässt man einen Körper in der Nähe der Erdoberfläche fallen, wird er durch die *Gravitationsbeschleunigung* nach unten, zum Erdmittelpunkt hin beschleunigt. Vernachlässigt man dabei den Luftwiderstand, ist diese Beschleunigung $\vec{g}$ für alle Körper und an jedem Ort gleich. Ihr Betrag hat den durch die Erdbeschleunigungskonstante g gegebenen Wert. Die Kraft, die diese Gravitationsbeschleunigung erzeugt, ist die Gewichtskraft, umgangssprachlich auch Gewicht genannt. Allerdings ist die letztere Bezeichnung für die Gewichtskraft etwas unglücklich, verleitet sie doch zu der Annahme, dass das Gewicht wie die Masse eine Eigenschaft des Körpers sei und nicht eine Kraft, die auf ihn wirkt. Wenn der Begriff "Gewicht eines Körpersäuftaucht, sollte man ihn also immer in Gedanken in äuf den Körper wirkende Gewichtskraft"übersetzen.

Wenn diese Gewichtskraft $\vec{F}_G$ die einzige Kraft ist, die auf einen Körper wirkt, sagt man, dieser Körper sei im freien Fall. Nach dem zweiten Newton'schen Axiom $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ ist die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ durch

$$F_G = m\vec{a}_G \tag{3}$$

definiert, wobei m die Masse des Körpers und $\vec{a}_G$ die Gravitationsbeschleunigung ist. Da $\vec{a}\vec{G}$ für alle Körper gleich ist, ist die Gewichtskraft eines Körpers proportional zu seiner Masse. Der Vektor $\vec{a}\vec{G}$ ist deshalb gleich der Kraft, die die Erde pro Masseeinheit auf einen Körper ausübt und mithin gleich der Beschleunigung beim freien Fall.

Bemerkung 5 *In der Nähe der Erdoberfläche hat $\vec{a}_G$ den Wert$|\vec{a}_G| = g =$*

$9.81\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{kg}^{-1} = 9.81\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

Genaue Messungen haben gezeigt, dass sich der Wert von $\vec{a}_G$ an verschiedenen Orten etwas unterscheidet. $\vec{a}_G$ nimmt mit wachsendem Abstand zur Erdoberfläche ab - und zwar umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands vom Erdmittelpunkt. Das heißt, ein und derselbe Körper wiegt in großer Höhe etwas weniger als in Höhe des Meeresspiegels. Da die Erde nicht genau eine Kugel, sondern zu den Polen hin abgeflacht ist, hängt $\vec{a}_G$ zudem etwas von der geografischen Breite ab. Somit ist das Gewicht bzw. die Gewichtskraft im Gegensatz zur Masse keine innere Eigenschaft eines Körpers.

Obwohl sich die Gewichtskraft eines Körpers also aufgrund der Änderung von $\vec{a}_G$ mit dem Ort ändern kann, ist diese Änderung so klein, dass sie bei den meisten praktischen Anwendungen auf der Erdoberfläche oder in deren Nähe nicht wahrgenommen wird. Ein Beispiel soll den Unterschied zwischen Masse und Gewichtskraft verdeutlichen. Stellen Sie sich vor, Sie nehmen eine schwere Kegelkugel mit auf den Mond. Die Gewichtskraft der Kugel erreicht auf dem Mond nur ein Sechstel ihrer Gewichtskraft auf der Erde - die Kugel lässt sich auf dem Mond viel einfacher hochheben. Um die Kugel allerdings mit einer bestimmten Geschwindigkeit in horizontaler Richtung zu werfen, ist auf dem Mond dieselbe Kraft erforderlich wie auf der Erde, da ja die Masse der Kugel konstant ist. Dementsprechend wäre natürlich auch im Weltraum, weitab von der Gravitation der Erde oder des Monds, für dieselbe horizontale Beschleunigung dieselbe Kraft erforderlich.

Obwohl die Gewichtskraft auf einen Körper ortsabhängig ist, ist sie für jeden einzelnen Ort proportional zur Masse des Körpers. Damit können wir die Massen verschiedener Körper vergleichen, indem wir ihre Gewichtskräfte vergleichen. Wenn wir unsere eigene Gewichtskraft wahrnehmen, beruht das meist auf Kräften, die mit der Gewichtskraft im Gleichgewicht sind. Wenn Sie auf einem Stuhl sitzen, spüren Sie die Kraft, die der Stuhl ausübt und die mit Ihrer Gewichtskraft im Gleichgewicht ist, so dass Sie nicht zu Boden fallen. Wenn Sie auf einer Personenwaage stehen, spüren Ihre Füsse die Kraft, die die Waage auf Sie ausübt. Die Waage ist so geeicht, dass sie die Gegenkraft anzeigt, die sie aufbringen muss, um Ihre Gewichtskraft zu kompensieren. Diese Kraft wird auch scheinbare Gewichtskraft genannt. Wenn wie etwa beim freien Fall keine Kraft vorhanden ist, die der Gewichtskraft entgegenwirkt, ist die scheinbare Gewichtskraft null. Diesen Zustand, die so genannte Schwerelosigkeit, erfahren Astronauten in ihren Raumschiffen. Stellen Sie sich ein Raumschiff vor, das sich auf einer kreisförmigen Erdumlaufbahn bewegt und somit ständig zur Erde beschleunigt wird. Die einzige Kraft, die auf das Raumschiff wirkt, ist die Erdanziehung (sein Gewicht), so dass es frei fällt. Auch die Astronauten in dem Raumschiff sind im freien Fall. Die einzige Kraft, die auf sie wirkt, ist ihre Gewichtskraft, die für die Beschleunigung $\vec{a}_G$ verantwortlich ist. Da es unter diesen Bedingungen keine Kraft gibt, die den freien Fall in der Umlaufbahn aufhält, ist die scheinbare Gewichtskraft der Astronauten null.

2 Die Naturkräfte

Die volle Reichweite des zweiten Newton'schen Axioms zeigt sich erst, wenn es zusammen mit den Gesetzen für die Kräfte betrachtet wird, die die Wechselwirkungen von Körpern beschreiben. Dazu gehört beispielsweise das in zu besprechende Newton'sche Gravitationsgesetz, das die Gravitationskraft, die ein Körper auf einen anderen ausübt, durch den Abstand beider Körper und durch ihre Massen ausdrückt. Zusammen mit dem zweiten Newton'schen Axiom gestattet dieses Gesetz, die Umlaufbahnen der Planeten um die Sonne, die Bewegung des Monds wie auch die Höhenabhängigkeit von $\vec{a}_G$, der Gravitationsbeschleunigung, zu berechnen.

Alle Kräfte, denen wir in der Natur begegnen, lassen sich auf vier fundamentale Wechselwirkungen zwischen Elementarteilchen zurückführen .

1. Die Gravitationskraft ist die Kraft der gegenseitigen Anziehung zwischen allen Körpern mit Masse.
2. Die elektromagnetische Kraft ist die Kraft zwischen allen Körpern mit elektrischer Ladung
3. Die starke Kernkraft ist die Kraft zwischen bestimmten subatomaren Teilchen, den Hadronen.
4. Die schwache Kraft ist die Kraft zwischen subatomaren Teilchen während spezieller radioaktiver Zerfallsprozesse.

Die Kräfte, die wir im Alltag bei makroskopischen Körpern beobachten können, werden entweder durch die Gravitationskraft oder durch die elektromagnetische Kraft hervorgerufen.

2.1 Fernwirkung

Die ersten beiden Grundkräfte, die Schwerkraft und die elektromagnetische Kraft, wirken zwischen Teilchen, die räumlich voneinander getrennt sind. Dies führt zu einem philosophischen Problem, nämlich dem der Fernwirkung oder Wirkung über eine Entfernung hinweg. Newton sah diese Fernwirkung als einen Mangel seiner Gravitationstheorie an, war aber außerstande, eine andere Hypothese über das Wesen der Kräfte zu formulieren.

Heute wird das Problem der Fernwirkung vermieden, indem das Konzept des Felds eingeführt wird, das als Überträger wirkt. Dabei wird beispielsweise die Anziehung der Erde durch die Sonne in zwei Schritten betrachtet. Zunächst erzeugt die Sonne im Raum ein Gravitationsfeld, in dem die Gravitationsbeschleunigung $\vec{a}_G$ durch die Sonnenanziehung mit wachsendem Abstand zur Sonne abnimmt Dieses Feld übt dann eine Kraft auf die Erde aus. Das Feld spielt also die Rolle des Vermittlers. Auf ähnliche Weise erzeugt die Erde ein Gravitationsfeld, das eine Kraft auf die Sonne ausübt. Auch unser Eigengewicht ist eine Kraft, die das Gravitationsfeld auf uns ausübt. Ganz analog ergeben sich (in der Elektrizität und Magnetismus) sowohl elektrische Felder, die durch alle elektrischen Ladungen entstehen, als auch magnetische Felder, die nur durch bewegte elektrische Ladungen hervorgerufen werden. Im Prinzip sind sie also auch Kräfte, und haben daher entsprechend analoge Konsequenzen für die Bewegung (Mechanik) geladener Teilchen.

2.2 Kontaktkräfte

Viele uns bekannte Kräfte werden von Objekten aufeinander ausgeübt, die in direktem Kontakt miteinander sind - sich also berühren. Sie sind eine Folge von Kräften zwischen den Oberflächenmolekülen der Körper, die im Kontakt sind.

Festkörper Drückt man gegen eine Oberfläche, so drückt diese zurück. Betrachten Sie z. B. eine angelehnte Leiter. An der Kontaktstelle drückt die Leiter mit einer horizontalen Kraft auf die Wand, wobei sich die Moleküle in der Oberfläche der Wand verschieben. Wie die Federn einer Matratze drücken dadurch die verschobenen Moleküle der Wand horizontal zurück auf die Leiter. Kräfte, die wie diese senkrecht zur Kontaktfläche wirken, werden als Normalkräfte bezeichnet (wobei Normal-ïn diesem Fall ßenkrecht dazu"bedeutet). Dass sich die Wand in Folge der Belastung etwas biegt, ist mit bloßem Auge kaum wahrnehmbar.

Normalkräfte treten in den verschiedensten Größenordnungen auf. So übt ein Tisch auf jeden darauf liegenden Gegenstand eine Normalkraft aus. Solange der Tisch dabei nicht zerbricht, ist diese Kraft mit der Gewichtskraft des darauf liegenden Körpers im Gleichgewicht. Drücken Sie zusätzlich noch auf den Körper, erhöht sich im Gegenzug die nach oben gerichtete Kraft und verhindert damit, dass der Körper nach unten beschleunigt wird.

Kontaktflächen können auch Kräfte aufeinander ausüben, die parallel zu den Kontaktflächen sind. Z.B ein großer Quader auf dem Boden. Wenn man versucht, ihn mit einer kleinen horizontalen Kraft zur Seite zu bewegen, gleitet er überhaupt nicht. Die Bodenoberfläche übt eine Kraft auf den Quader auf, die sich dessen Bestreben, in Druckrichtung zu gleiten, vollständig entgegenstellt. Dagegen wird der Quader zu gleiten beginnen, wenn er mit einer hinreichend starken Kraft zur Seite gedrückt wird. Damit er weitergleitet, muss weiter Druck auf ihn ausgeübt werden. Ist das nicht der Fall, bremst die Reibungskraft die Bewegung des Quaders ab, so dass er schließlich ganz zur Ruhe kommt. Eine Komponente einer Kontaktkraft, die dem Gleiten oder der Tendenz zu gleiten entgegenwirkt, wird Reibungskraft genannt. Eine Reibungskraft wirkt stets parallel zur Kontaktfläche. Auch wenn es in den Abbildungen scheinen könnte, als würden Normalkräfte und Reibungskräfte nur an einem Punkt angreifen, sind sie in der Realität über die ganze Kontaktfläche verteilt.

Federn Die Kraft, die eine um eine kleine Länge Δx zusammengedrückte oder gedehnte Feder ausübt, ergibt sich experimentell zu

$$F_x = -k_F \cdot \Delta x \tag{4}$$

(Hook´sches gesetz) Dabei ist k_F die so genannte Federkonstante, ein Maß für die Steifheit einer Feder. Das negative Vorzeichen in der Gleichung zeigt, dass diese Kraft in entgegengesetzter Richtung zu der wirkt, in der die Feder gedehnt bzw. zusammengedrückt wird. Diese Beziehung, die als das Hooke'sche Gesetz bekannt ist, ist recht bedeutsam: Von einem Körper, der unter dem Einfluss von Kräften, die sich ausgleichen, im Ruhezustand ist, sagt man, er sei in einem statischen Gleichgewicht. Wenn eine kleine Verschiebung dieses Körpers eine Gesamtkraft zur Folge hat, die wieder in Richtung des Gleichgewichtspunkts weist (*eine so genannte Rückstellkraft*) , spricht man von einem stabilen Gleichgewicht.

2.3 Lösen der Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung ist eine Differentialgleichung

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{5}$$

Ihre Lösung ergibt den Ort zu einem gewissen Zeitpunkt. Die Geschwindigkeit ergibt sich direkt aus der zeitlichen Ableitung des Ortes. Die zweite Ableitung ist dann identisch mit der Beschleunigung und multipliziert mit der Masse die Kraft, die zur Zeit t am Ort $\vec{r} = (x, y, z)$ herrscht.

Die Lösung der Differentialgleichung kann trivial, einfach, kompliziert oder sogar analytisch unlösbar sein. Praktisch immer ist aber eine numerische Lösung möglich.

2.3.1 Lösung durch Integration

Wir wissen, wie man die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ und die Beschleunigungsfunktion $a(t)$ durch Ableiten der Ortsfunktion $x(t)$ nach der Zeit gewinnen kann. Das umgekehrte Problem besteht darin, die Funktion $x(t)$ zu ermitteln, wenn die Geschwindigkeit $v(t)$ oder die Beschleunigung $a(t)$ gegeben ist. Dazu muss man das Verfahren der Integration anwenden, das wir an dieser Stelle deshalb kurz erläutern wollen. Wenn wir die Beschleunigung $a(t)$ als Funktion der Zeit kennen, gilt es, eine Funktion $v(t)$zu finden, deren Ableitung die Beschleunigung ist. Die Funktion $v(t)$ wird dann eine Stammfunktion von $a(t)$ genannt.

Wenn beispielsweise die Beschleunigung konstant ist, also $dv(t) = a, a = konstant$ gilt, ist die Geschwindigkeit eine Funktion der Zeit, deren Ableitung gerade diese Konstante ist. Eine solche Funktion lautet $v(t) = at$. Allerdings kann zu der Funktion $v(t) = at$ noch eine beliebige Konstante - nennen wir sie V_o - addiert werden, ohne das Ergebnis

der Differenziation zu ändern. Also gilt folgende allgemeinere Form als die Lösung:

$$v(t) = at + V_o \tag{6}$$

Für$t = 0$gilt $v = V_a$. Somit ist V_o die Anfangsgeschwindigkeit. Mit der gleichen Begründung ist auch die Ortsfunktion $x(t)$ jene Funktion, deren Ableitung die Geschwindigkeit ist:

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = at + V_o$$

$\rightarrow$

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + V_o t + x_0$$

Wir haben hier ein wichtiges Merkmal der Vorgehensweise bei der Integration kennen gelernt: Um die allgemeine Lösung anzugeben, muss zu der Stammfunktion eine beliebige Konstante, die Integrationskonstante, hinzugefügt werden. Da wir zweimal integrieren mussten, um aus der Funktion$a(t)$ die Funktion $x(t)$ zu erhalten, treten nun zwei Konstanten, X_0 und V_0, auf. Diese Konstanten sind durch die Geschwindigkeit und den Ort des Teilchens zu einem bestimmten Anfangszeitpunkt gegeben, der gewöhnlich als $t = 0$ gewählt wird. Sie werden deshalb die Anfangsbedingungen genannt. Das Problem ermitteln Sie bei gegebener

Funktion $a(t)$ und den Anfangswerten X_0 und V_0 die Funktion $x(t)$ heißt das Anfangswertproblem. Da die Beschleunigung eines Teilchens durch die Kräfte bestimmt ist, die auf das Teilchen einwirken, ist dieses Problem in der Physik von fundamentaler Bedeutung. Somit können wir den Ort eines Teilchens im Prinzip für alle Zeiten berechnen, wenn wir die auf das Teilchen einwirkenden Kräfte sowie seinen Ort und seine Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt kennen (man spricht dann auch von der Lösung der Bewegungsgleichung)
.

Das Bestimmen der Stammfunktion einer Funktion ist eng mit der Aufgabe verbunden, die Fläche unter einer Kurve zu berechnen. Wir betrachten dazu den Fall der Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit V_0. Die Ortsänderung oder Verschiebung Δx im Zeitraum Δt ist dann $\Delta x = V_0 \Delta t$

Dies die Fläche unter der Geschwindigkeits-Zeit-Kurve. Wenn V_0 negativ ist, sind auch die Verschiebung und die Fläche unter der Kurve negativ. Im Unterschied zu unserer herkömmlichen Vorstellung, eine Fläche sei immer positiv, erhält die Fläche unter der Kurve"(die Fläche zwischen der Kurve und der Zeitachse) in diesem Fall also einen negativen Wert.

Diese graphische Interpretation der Verschiebung als Fläche unter der $v-t-$Kurve ist auch dann gültig, wenn die Geschwindigkeit nicht konstant ist. Um dies zu zeigen,

teilen wir die Fläche unter der Kurve zunächst in viele kleinere Intervalle Δt_1, Δt_2 ... usw. auf, denen jeweils ein Rechteck zugeordnet ist. Der Flächeninhalt dieser diskreten Rechteck ist $V_i \Delta . t_i$, was näherungsweise gleich der Verschiebung Δx_i des Teilchens im Zeitintervall Δt_i ist. Somit ist die Summe der Flächeninhalte der Rechtecke näherungsweise gleich der Summe der Verschiebungen in den einzelnen Zeitintervallen und damit gleich der Gesamtverschiebung vom Zeitpunkt t_1 bis zum Zeitpunkt $t_2\bullet$

Mathematisch schreibt man dafür$\Delta x \sim \sum_i V_i \Delta t_i$.

Die Näherung kann beliebig gut gemacht werden, wenn nur eine ausreichende Anzahl von Rechtecken unter die Kurve gelegt wird, von denen jedes Rechteck einen ausreichend kleinen Wert von Δt besitzt. Im Grenzwert immer kleinerer Zeitintervalle (in dem die Anzahl der Rechtecke immer größer wird) geht die Summe gegen den Flächeninhalt unter der Kurve, der seinerseits gleich der Verschiebung ist. Der Grenzwert für immer kleiner werdende Zeitintervalle Δt ist gleich der Fläche unter der Kurve v(t); er heißt Integral der Funktion $v(t)$ und wird geschrieben als

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\sum_i V_i \Delta t_i \right) = \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt \tag{7}$$

2.3.2 Numerisches Lösen

Das Euler-Verfahren Wenn sich ein Teilchen unter dem Einfluss einer konstanten Kraft bewegt, ist seine Beschleunigung konstant. Damit kann man die Bewegungsgleichung, wie oben gezeigt, analytisch lösen (aufintegrieren). Doch was ist, wenn sich das Teilchendurch den Raum bewegt, während die auf das

Teilchen wirkenden Kräfte z.B. von dessen Ort und Geschwindigkeit abhängen? In diesem Fall bestimmen der Ort, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Teilchens zu einem Zeitpunkt den Ort und die Geschwindigkeit des Teilchens im nächsten Augenblick, woraus sich wiederum die Beschleunigung zu diesem Zeitpunkt ergibt. Sowohl der Ort und die Geschwindigkeit als auch die Beschleunigung des Teilchens ändern sich ständig mit der Zeit. Ein Näherungsverfahren für diese Aufgabenstellung besteht darin, die sich kontinuierlich ändernde Zeit in viele kleine Zeitintervalle Δt zu zerlegen. Bei der einfachsten Näherung wird dann einfach angenommen, dass die Beschleunigung während jedes Zeitschritts konstant ist. Diese Näherung wird das Euler-Verfahren oder Polygonzugverfahren genannt. Tatsächlich ist die Änderung der Beschleunigung während des Intervalls vernachlässigbar gering, wenn das Zeitintervall nur hinreichend klein ist.

Es seien x_o, V_0 und a_0 die bekannten Variablen Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Teilchens zu einem Anfangszeitpunkt t_o. Wenn man während Δt eine konstante Beschleunigung annimmt, beträgt die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t_1 = t_o + \Delta t$

$$v_1 = v_o + a_{_0}\Delta t \tag{8}$$

Entsprechend ergibt sich unter Vernachlässigung der Geschwindigkeitsänderung in dem Zeitintervall der neue Ort in dem Zeitintervall der neue Ort

$$x_1 = x_o + v_{_0}\Delta t$$

Aus diesen Werten v_1 und x_1 ergibt sich über das zweite Newton'sche Axiom die neue Beschleunigung a_1 . Im folgenden Schritt kann man dementsprechend aus v_1, x_1 und a_1 die Werte v_2 und x_2 , bzw. im weiteren v_i und x_i ,berechnen:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + a_{_n}\Delta t \\ x_{n+1} &= x_n + v_n\Delta t \end{aligned} \tag{9}$$

Um also die Geschwindigkeit und den Ort zu einem Zeitpunkt $t$zu ermitteln, unterteilt man das Zeitintervall $t - t_o$ in eine große Anzahl kleinerer Intervalle Δt und wendet auf sie, beginnend bei t_o, iterativ die Gleichungen 9 an. Das bedeutet eine große Anzahl einfacher, sich stets wiederholender Rechenschritte, die man am besten einem Computer überlässt. Das beschriebene Verfahren, das Zeitintervall in kleine Schritte zu zerlegen und die Beschleunigung, die Geschwindigkeit und den Ort injedem Schritt aus den Ergebnissen des vorangegangenen Schritts zu berechnen, wird numerische Integration bzw. numerisches Lösen der Differentialgleichung genannt.

Verbesserte Verfahren Der Euler Algorithmus 9 ist nur die einfachste Form eines numerischen Integrationsverfahren und oft nicht sehr stabil. Die naheliegenste Verbesserung, die meist zu erstaunlichen Verbesserungen führt, besteht darin, wie in 10 gezeigt, die Formeln zu modifizieren, d.h. bei der Berechnung vom neuen x-Wert den eben berechneten $v_{n+1}-$Wert zu verwenden (Euler Backward Algorithmus)

$$
\begin{aligned}
v_{n+1} &= v_n + a_n \Delta t \\
x_{n+1} &= x_n + v_{n+1} \Delta t
\end{aligned} \tag{10}
$$

Fast alle heutige Mathematikprogramme (Mathematica, Mathlab etc.) haben sehr komfortable und genaue Integratoren integriert, die es ermöglichen sehr einfach numerische Lösungen von Differentialgleichungen zu erhalten.

3 Die Gravitationskraft

Isaac Newton gelang um 1666 der gewaltige Schritt, die Planetenbewegung auf eine bestimmte, durch die Sonne ausgeübte Kraft zurückzuführen. Newton konnte mathematisch zeigen, dass eine Kraft, die umgekehrt proportional mit dem Abstand zwischen dem Planeten und der Sonne abnimmt, zu einer elliptischen Umlaufbahn führt, wie Kepler sie nachgewiesen hatte (*Die Kepler'schen Gesetze waren ein wichtiger Schritt auf dem Weg zum Verständnis der Planeten bewegung waren. Sie waren sie doch nur einfache empirische Regeln, die Kepler aus Brahes astronomischen Beobachtungen abgeleitet hatte.*). Darauf behauptete Newton kühn, eine solche Kraft würde zwischen zwei beliebigen Körpern im Universum wirken (z. B. auch zwischen dem fallenden Apfel und der Erde). Vor Newton war es nicht allgemein akzeptiert, dass die Gesetze der Physik, wie man sie auf der Erde beobachten konnte, auch für die Himmelskörper gälten. Das Newton'sche Gravitationsgesetz besagt, dass es eine anziehende Kraft zwischen je zwei punktförmigen Körpern gibt, die proportional zum Produkt ihrer Massen und umgekehrt proportional zum Quadrat ihres Abstands ist.

Bezeichnen wir die Massen der beiden punktförmigen Teilchen mit m_1 und m_2 und ihre Orte mit $\vec{r}_1$und $\vec{r}_2$ so ist $\vec{r}_{12}$ der Vektor, der von Teilchen 1 zu Teilchen 2 geht. Dann übt das Teilchen 1 auf das Teilchen 2 eine Kraft $\vec{F}_2^{(1)}$ aus, für die gilt:

$$
\vec{F}_2^{(1)} = -\Gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \widehat{r}_{12} = -\Gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \tag{11}
$$

Γ ist die Gravitationskonstante mit dem Wert $\Gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2$.

Die Kraft $\vec{F}_1^{(2)}$, die von Teilchen 2 auf Teilchen 1 ausgeübt wird, ist gemäß dem dritten Newton'schen Axiom das Negative von $\vec{F}_2^{(1)}$. Die Gravitationskraft, die eine Punktmasse m_1 auf eine im Abstand r befindliche andere Punktmasse m_2 ausübt, besitzt daher den Wert

$$
F = -\Gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \tag{12}
$$

Bemerkung 6 *a) Schema der Drehwaage, die Cavendish zur Messung der Gravitationskonstanten Γ benutzte. Sie besteht aus zwei an einem leichten Stab befestigten kleinen Kugeln, jeweils mit der Masse m_2 die an einem dünnen Torsionsdraht hängen. Durch sorgfältige Messung kann man das Drehmoment bestimmen, mit dem sich der Draht um einen bestimmten Winkel verdrillen lässt.*

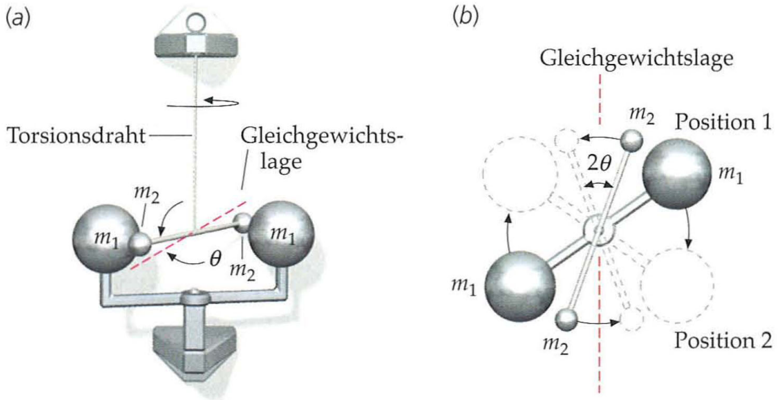


Abbildung 1: Bestimmung der Gravitationskonstante nach Cavendish

Dann werden zwei große Kugeln, jeweils mit der Masse m_1 in die Nähe der kleinen Kugeln gebracht. Wegen der Gravitationsanziehung der kleinen durch die großen Kugeln dreht sich der Draht um einen sehr kleinen Winkel ϑ aus der Gleichgewichtslage (der Winkel ist hier stark überzeichnet). b) Dieselbe Drehwaage von oben betrachtet. Nachdem die Anordnung ihre Gleichgewichtslage eingenommen hat (das kann wegen der extrem geringen Kräfte unter Umständen mehrere Stunden dauern), werden im zweiten Teil des Experiments die beiden großen Kugeln so gedreht, dass ihr Abstand von der Gleichgewichtslage der Waage der gleiche ist wie auf der anderen Seite (gestrichelte Linien). Wenn dann die Waage wieder ihre Gleichgewichtslage eingenommen hat, hat sich der Draht um den Winkel 2ϑ verdrillt, entsprechend der Umkehrung des Drehmoments. Ist die Torsionskonstante des Drahts bekannt, kann man die Kraft zwischen den Massen m_1, und m_2 aus der Messung des Torsionswinkels bestimmen. Mit den Werten der Massen und der Abstände zwischen ihnen lässt sich daraus die Gravitationskonstante Γ berechnen. Cavendish erhielt einen Wert für Γ, der nur um etwa 1 % vom heute akzeptierten, $\Gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2$ Wert abwich.

Bemerkung 7 • *1665 -1666 Isaac Newton*

Bemerkung 8 • *Die Kraft, die den Apfel vom Baum fallen lässt, ist die gleiche, die den Mond um die Erde und die Erde um die Sonne zwingt, d. h.: Beide Fälle sind Spezialfälle eines allgemeinen Kraftgesetzes, nach dem alle Massen einander anziehen.*

Bemerkung 9 • *Folgende Beobachtungen legen die Form des Gesetzes näher fest:*

Bemerkung 10 • *Auf der Erdoberfläche fallen alle Körper gleich schnell, abgesehen von denen, die so leicht sind, dass der Luftwiderstand eine wesentliche Rolle spielt. Die Fallbeschleunigung ist also unabhängig von der Masse m2 des fallenden Körpers.*

4 Die Coulomb (elektrische-) Kraft

Angenommen, wir reiben einen Plastikstab an einem Fell und hängen ihn dann an einer Schnur so auf, dass er frei rotieren kann. Dann bringen wir einen zweiten geriebenen Plastikstab in seine Nähe. Die Stäbe stoßen sich gegenseitig ab (. Wir erhalten dasselbe Ergebnis, wenn wir zwei Glasstäbe benutzen, die an Seide gerieben wurden. Bringen wir aber einen an Fell geriebenen Plastikstab in die Nähe eines an Seide geriebenen Glasstabs, dann ziehen sie sich gegenseitig an.

Beim Reiben wird der Stab elektrisch aufgeladen. Wird das Experiment mit verschiedenen Materialien wiederholt, so stellt man fest, dass sich alle geladenen Objekte in genau zwei Gruppen einteilen lassen - in eine, ähnlich dem an Fell geriebenen Plastikstab, und in eine andere, ähnlich dem an Seide geriebenen Glasstab. Objekte derselben Gruppe stoßen einander ab, Objekte aus verschiedenen Gruppen ziehen sich gegenseitig an. Benjamin Franklin schlug als Erklärung vor, dass jedes Objekt einen bestimmten Betrag an Elektrizität besitzt. Diese Elektrizitätsmenge - die Ladung - oder ein Teil davon kann von einem Objekt auf ein anderes übertragen werden, wenn zwei Objekte in engem Kontakt sind - genau wie beim Aneinanderreiben. Nach seiner Vorstellung hat dann ein Objekt einen Überschuss und das andere einen Mangel an Ladung, und zwar in derselben Größe wie der Überschuss. Franklin bezeichnete die Überschussladung mit einem Pluszeichen (+) und die Mangelladung mit einem Minuszeichen (-). Er wählte die Vorzeichen so, dass die Ladung auf dem an Seide geriebenen Glasstab positiv ist. Das Stück Seide erhält dann während des Vorgangs eine negative Ladung von gleicher Größe. Ein an Fell geriebener Plastikstab hat eine negative Ladung und das Fell eine positive. Auch wenn die Vorstellung von einem Ladungsüberschuss und einem Ladungsmangel nicht richtig ist, wurde Franklins Konvention der Klassifizierung elektrischer Ladungen als positive oder negative Ladungen übernommen. Zwei Objekte, die Ladungen mit gleichem Vorzeichen tragen, stoßen sich gegenseitig ab, und zwei Objekte, die Ladungen mit ungleichem Vorzeichen besitzen, ziehen sich gegenseitig an.

Heute wissen wir, dass beim Reiben Elektronen von Glas auf Seide übertragen werden. Da die Seide negativ geladen ist (gemäß der Franklin'schen Konvention, welche wir weiterhin benutzen), tragen Elektronen eine negative Ladung. Je weiter unten ein Material in der Reihe steht, desto größer ist seine Affinität für Elektronen. Wenn zwei Materialien in Kontakt gebracht werden, treten Elektronen von dem Material, das in der Tabelle höher steht, in das weiter unten in der Tabelle stehende Material über. Wenn z.B. Teflon mit Nylon gerieben wird, werden Elektronen von Nylon auf Teflon übertragen.

4.1 Ladungsquantisierung

Jedes Material besteht aus Atomen. Ein Atom besitzt einen winzigen, aber massiven Kern, der Protonen und Neutronen enthält. Protonen sind positiv geladen, Neutronen sind ungeladen. Die Anzahl der Protonen im Kern entspricht der Ordnungszahl oder Kernladungszahl Z des Elements. Den Atomkern umgibt eine gleiche Anzahl von negativ geladenen Elektronen, wodurch das Atom die Gesamtladung null erhält. Das Elektron ist ungefähr $2000 - mal$ leichter als das Proton, aber die Ladungen bei der Teilchen haben exakt den gleichen Betrag. Die Ladung des Protons ist $+e$ und die des Elektrons $-e$, wobei e als Elementarladung bezeichnet wird.

Die Ladung eines Elektrons oder Protons ist eine innere Eigenschaft des Teilchens, so wie Masse und Spin innere Eigenschaften dieser Teilchen sind. Alle beobachtbaren Ladungen treten in ganzzahligen Vielfachen der Elementarladung e auf, d. h., die Ladung ist quantisiert (in kleinste Portionen gequantelt). Irgendeine Ladung q, die in der makroskopischen Welt, in Molekülen, Atomen und Elementarteilchen vorkommt, kann als $q = \pm ne$ geschrieben werden, wobei n eine natürliche Zahl ist. Im Standardmodell der Elementarteilchen, wie Protonen, Neutronen und anderen, sind ein Teil der Elementarteilchen, die Hadronen, aus noch weiteren fundamentalen Teilchen, den so genannten Quarks, zusammengesetzt. Die Quarks tragen Ladungen von $\pm\frac{1}{3}e$ oder $\pm\frac{2}{3}e$. Quarks können selbst nicht als freie Teilchen isoliert werden, sie treten stets in gebundenen Zuständen auf, so dass die "*Drittelladungen*nicht beobachtbar sind.

Elementarteilchen sind aus zwei oder drei Quarks zusammengesetzt. Es sind nur solche Kombinationen der Quarks bekannt, die zu einer Summenladung von $\pm ne$oder 0 (n natürliche Zahl) führen.

Für gewöhnliche Objekte ist jedoch n im Allgemeinen sehr groß, und die Ladung scheint kontinuierlich verteilt zu sein, geradeso wie Luft kontinuierlich erscheint, obgleich Luft aus vielen diskreten Molekülen besteht. Um ein Alltagsbeispiel von n zu geben: Das Aufladen eines Kunststoffstabs durch Reiben mit einem Stück Fell überträgt etwa 10^{10} oder mehr Elektronen auf den Stab.

4.2 Ladungserhaltung

Wenn Objekte aneinander gerieben werden, kommt es zum Austausch von Elektronen und zwar zu einem Überschuss an Elektronen an einem Objekt, das sich negativ auflädt, bzw. zu einem Verlust an Elektronen an dem anderen Objekt, das positiv geladen zurückbleibt. Bei diesem Vorgang wird weder Ladung erzeugt noch vernichtet, sondern mit den Elektronen wird Ladung transportiert. Die Gesamtladung von beiden Objekten bleibt bei diesem Prozess konstant, sie bleibt erhalten. Das Gesetz von der Erhaltung der Ladung ist ein fundamentales Naturgesetz, ein Erfahrungssatz. Wir wissen, dass alle Stoffe aus Molekülen bzw. Atomen aufgebaut sind, die sich wiederum aus Elementarteilchen zusammensetzen. Elementarteilchen können bei Wechselwirkungen erzeugt oder vernichtet werden. Dabei gibt es Prozesse, in denen Elektronen erzeugt oder vernichtet werden, die Elektronenzahl vor und nach der Wechselwirkung nicht konstant bleibt. Auch solche Prozesse verletzen nicht den Ladungserhaltungssatz, denn wird bei einem Prozess ein negativ geladenes Teilchen vernichtet, wird gleichzeitig ein positiv geladenes Teilchen gleichen Ladungsbetrags auch vernichtet. (Ein Beispiel ist der Paarvernichtungsprozess: Ein Elektron mit der Ladung $-e$ wird gleichzeitig mit einem Positron der Ladung $+e$ vernichtet, und mindestens zwei Lichtquanten, die elektrisch neutral sind, werden erzeugt.) Bei allen Prozessen ist also die Gesamtladung der Teilchen vor der Wechselwirkung gleich der Gesamtladung der Teilchen nach der Wechselwirkung. Somit ist die elektrische Ladung des Universums konstant.

Die SI-Einheit der Ladung ist das Coulomb, das über die Grundeinheit des elektrischen Stroms, das Ampere (A), definiert ist. Das Coulomb (C) ist die Ladungsmenge, die in einer Sekunde durch die Querschnittsfläche eines Drahts fließt, wenn die Stromstärke im Draht ein Ampere beträgt.

Die Elementarladung e hat in der SI-Einheit Coulomb den Wert

$$e = 1,602177 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \tag{13}$$

Beispiel 11

Wie viel Elektronenladung steckt in einem Kupferpfennig?

Ein alter Kupferpfennig ($Z=29$) hatte eine Masse von 3 g. Wie groß ist die Gesamtladung von allen Elektronen in dem Kupferpfennig aus reinem Kupfer?

Problembeschreibung: Die Elektronen haben eine Gesamtladung, die durch die Zahl der Elektronen im Kupferpfennig, n_e, multipliziert mit der Ladung eines Elektrons, $-e$, gegeben ist. Die Zahl der Elektronen n_e ist das Produkt aus der Elektronenzahl eines Atoms (Ordnungszahl für Kupfer ist $Z=29$) multipliziert mit der Zahl der Kupferatome n_{Cu}. Ein Mol Kupfer hat eine Masse von 63,5 g und enthält $n_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ (Avogadro-Zahl) Kupferatome. Wir finden die Zahl der Atome in einem Gramm Kupfer, indem wir n_A (Atome/Mol) durch m_{Mol} (Gramm/Mol) dividieren.

Lösung:

1. Die Gesamtladung ist das Produkt aus der Zahl der Elektronen multipliziert mit der Elektronenladung:
$$q = n_e(-e)$$

2. Die Zahl der Elektronen ist Z mal der Zahl der Kupferatome n_{Cu}:
$$n_e = Z\,n_{Cu}$$

3. Berechnen Sie die Zahl der Kupferatome in 3 g Kupfer:
$$n_{Cu} = (3\ \mathrm{g}) \cdot \frac{6,02 \cdot 10^{23}\ \text{Atome/Mol}}{63,5\ \text{g/Mol}} = 2,84 \cdot 10^{22}\ \text{Atome}$$

4. Berechnen Sie die Zahl der Elektronen n_e:
$$n_e = Z\,n_{Cu} = (29\ \text{Elektronen/Atom}) \cdot (2,84 \cdot 10^{22}\ \text{Atome}) = 8,24 \cdot 10^{23}\ \text{Elektronen}$$

5. Berechnen Sie die Gesamtladung mit dem Wert von n_e:
$$q = n_e(-e) = (8,24 \cdot 10^{23}\ \text{Elektronen}) \cdot (-1,6 \cdot 10^{-19}\ \text{C/Elektron}) = \boxed{-1,32 \cdot 10^5\ \mathrm{C}}$$

ÜBUNG: Wenn jedem Mann, jeder Frau und jedem Kind in den Vereinigten Staaten (ungefähr 285 Millionen Menschen) eine Million Elektronen zugeordnet werden, wie viel Prozent der gesamten Elektronenzahl in einem Kupferpfennig würde das entsprechen? (*Lösung:* Ungefähr $35 \cdot 10^{-9}$ %.)

Abbildung 2: Beispiel: Wieviel elektronenladung in Kupferring

4.3 Das Coulomb'sche Gesetz

Charles Coulomb (1736 -1806) untersuchte die Kraft, die durch eine Ladung auf eine andere ausgeübt wurde. Er benutzte dazu eine Torsionswaage, die er selbst erfunden hatte. Sie funktionierte im Wesentlichen wie die Torsionswaage für das Cavendish- Experiment, wobei die Massen durch kleine geladene Kugeln ersetzt wurden. Die Gravitationsanziehung der Kugeln ist vernachlässigbar klein, verglichen mit ihrer elektrischen Anziehung oder Abstoßung. In dem Coulomb'schen Experiment waren die Kugeln viel kleiner als der Abstand zwischen ihnen, so dass sie als Punktladungen betrachtet werden konnten. Coulomb benutzte die Influenz, um gleich geladene Kugeln zu erzeugen und um die Größe der Ladung auf den Kugeln zu variieren. Zum Beispiel konnte er mit einer Anfangsladung q_o auf jeder Kugel die Ladung auf $\frac{1}{2}q_0$ reduzieren. Das erfolgte durch zeitweiliges Erden einer Kugel, um diese zu entladen und sie danach mit der anderen Kugel wieder in Kontakt zu bringen. Die Ergebnisse der Experimente von Coulomb und anderen sind in dem Coulomb'schen Gesetz zusammengefasst:

Lemma 12 (Coulomb Gesetz) *Die Kraft, die von einer Punktladung auf eine andere ausgeübt wird, wirkt längs der Verbindungslinie zwischen den Ladungen. Sie ändert sich umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands der Ladungen und proportional zum Ladungsprodukt. Die Kraft ist abstoßend, wenn die beiden Ladungen gleiches Vorzeichen haben, und anziehend für Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens.*

Erstaunlicherweise können wir fast alles, was wir für die Gravitationskraft festgestellt haben, hier übernehmen.

Bezeichnen wir die Ladungen der beiden punktförmigen Teilchen mit q_1 und q_2 und ihre Orte mit $\vec{r}_1$und $\vec{r}_2$ so ist $\vec{r}_{12}$ der Vektor, der von Teilchen 1 zu Teilchen 2 geht. Dann übt das Teilchen 1 auf das Teilchen 2 eine Kraft $\vec{F}_2^{(1)}$ aus, für die gilt:

$$\vec{F}_2^{(1)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \widehat{r}_{12} \text{ bzw. } -\Gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \tag{14}$$

ε_0 ist die Dielektrizitätskonstante im Vakuum mit dem Wert $\varepsilon_0 = 8.8541 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{A\,s}/(\mathrm{V\,m})$.

Die Kraft $\vec{F}_1^{(2)}$, die von Teilchen 2 auf Teilchen 1 ausgeübt wird, ist gemäß dem dritten Newton'schen Axiom das Negative von $\vec{F}_2^{(1)}$. Die Culombkraft, die eine Punktladung q_1 auf eine im Abstand r befindliche andere Punktlandung q_2 ausübt, besitzt daher den Wert

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \tag{15}$$

4.4 Der Feldbegriff: das elektrische- bzw. das Gravitationsfeld

Im folgenden kann überall entweder die Coulombkraft oder die Gravitationskraft (bzw. die jeweils entsprechenden Größen) eingesetzt werden.

Die Kraft, die von einer Ladung auf eine andere wirkt, ist eine Fernwirkungskraft, ähnlich der Gravitationskraft, die von einer Masse auf eine andere wirkt. Die Idee der Fernwirkung stellt ein schwieriges begriffliches Problem dar. Was ist das für ein Mechanismus, durch den ein Teilchen quer durch den leeren Raum eine Kraft auf ein anderes ausüben kann? Angenommen, ein geladenes Teilchen an irgendeinem Punkt wird plötzlich bewegt. Ändert sich die Kraft, die auf das zweite Teilchen im Abstand r ausgeübt wird, momentan? Um das Problem der Fernwirkung zu vermeiden, wird das Konzept des elektrischen Felds eingeführt. Eine Ladung erzeugt überall im Raum ein elektrisches Feld $\vec{E}$, und durch dieses Feld erfährt eine zweite Ladung eine Kraft. So ist es das Feld $\vec{E}$ am Ort der zweiten Ladung, das unmittelbar die Kraft auf sie vermittelt, und nicht die sich in einiger Entfernung befindliche erste Ladung selbst. Änderungen im Feld breiten sich durch den Raum mit Lichtgeschwindigkeit c aus. Wenn dann eine Ladung plötzlich bewegt wird, ändert sich die auf eine zweite Ladung im Abstand r wirkende Kraft erst zu einem späteren Zeitpunkt r/c. Z.b. drei Ladungen, im Raum verteilt, würden jede für sich überall im Raum ein elektrisches Feld $\vec{E}$ erzeugen.

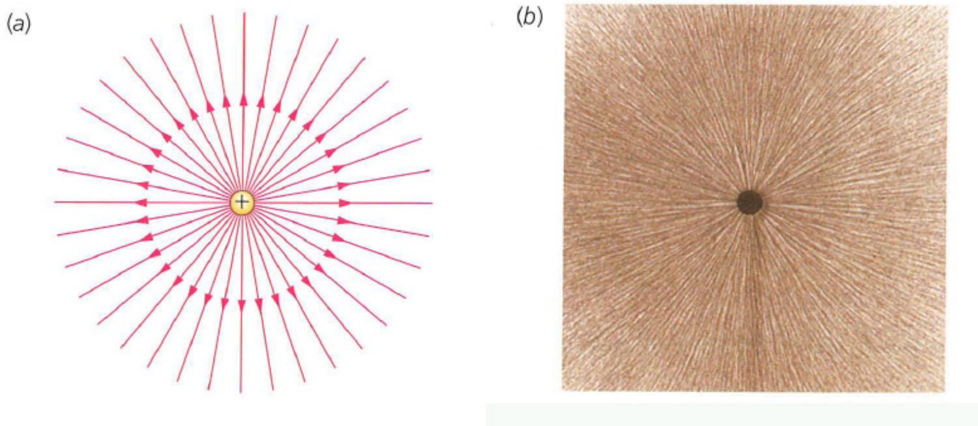


Abbildung 3: Faser, wodurch sie sich parallel zum Feld ausrichten.

Wenn man eine kleine positive Probeladung q_0 an einen Punkt in der Nähe der drei Ladungen bringt, gibt es eine Kraft auf q_0, die durch die anderen Ladungen hervorgerufen wird. (Eine Probeladung zeichnet sich dadurch aus, dass ihre Wirkung auf die ursprüngliche Ladungsverteilung vernachlässigbar ist.) Die resultierende Kraft, die auf q_0 wirkt, ist die Vektorsumme der einzelnen Kräfte, die von allen anderen Ladungen des Systems auf q_0 ausgeübt werden. Da jede dieser Kräfte zu q_0 proportion al ist, wird die resultierende Kraft ebenfalls proportional zu q_0 sein. Das elektrische Feld $\vec{E}$ ist der Quotient der resultierenden Kraft $\vec{F}$ auf q_0 dividiert durch q_0:

Definition 13 (Feld)

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \tag{16}$$

Definition 14 *Das Feld wird allgemein als die Kraft auf eine Probeladung (Einheit 1) definiert.*

Diese Definition entspricht der des Gravitationsfelds der Erde. Die SI-Einheit des elektrischen Felds ist Newton dividiert durch Coulomb (N / C).

Das elektrische Feld beschreibt den Zustand des Raums, der durch ein System von Punktladungen hervorgerufen wird. Durch Bewegen einer Probeladung q_0 von Punkt zu Punkt kann man $\vec{E}$ in allen Raumpunkten finden (*außer an Punkten mit felderzeugenden Ladungen* q_0). Daher ist das elektrische Feld $\vec{E}$ eine Vektorfunktion des Orts. Die Kraft auf eine beliebige Ladung q an irgendeinem Punkt ist mit dem elektrischen Feld durch folgende Beziehung verbunden.

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

4.4.1 Elektrische feldlinien

Man **kann** das elektrische Feld durch gerichtete Linien darstellen. In jedem Punkt einer Linie ist der Feldvektor $\vec{E}$ tangential gerichtet. Elektrische Feldlinien werden auch Kraftlinien genannt, da sie in die Richtung der Kraft zeigen, die auf eine positive Probeladung (Masse) wirkt. Das elektrische Feld E zeigt in radialer Richtung von der positiven Ladung weg. Daher zeigen die elektrischen Feldlinien in der Nähe einer positiven Ladung radial von der Ladung weg und in der Nähe einer negativen Ladung zu dieser Ladung hin. Abbildung 3 zeigt die elektrischen Feldlinien einer einzelnen positiven Punktladung. Der Abstand der Linien ist mit der Stärke des elektrischen Felds verknüpft. Wenn man sich von der Ladung entfernt, wird das Feld schwächer, und die einzelnen Linien sind weiter voneinander entfernt. Wir betrachten nun eine Kugeloberfläche vom Radius r, in deren Zentrum sich eine Ladung befindet. Ihre Oberfläche ist $4\pi r^2$. Wenn r zunimmt, nimmt die Dichte der Feldlinien (Zahl der Linien pro Fläche) wie $1/r^2$ ab, genauso wie E. Wenn man die Verabredung trifft, dass einer Ladung q eine feste Zahl von Linien entspricht, dann ist die Zahl der Linien der Ladung q proportional, und wenn man die Linien symmetrisch um die Punktladung zeichnet, wird die Feldstärke durch die Dichte der Feldlinien angegeben.

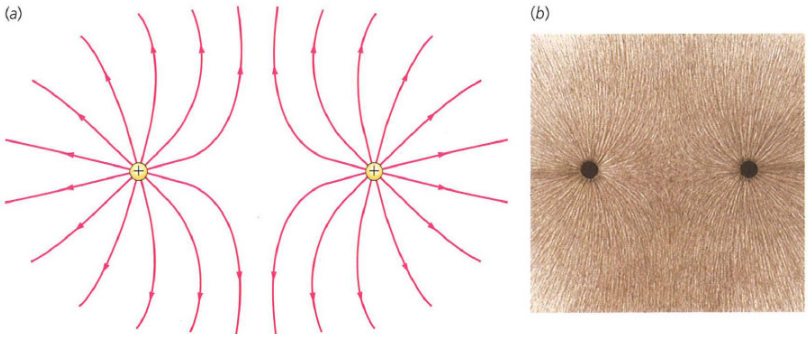


Abbildung 4: a) Elektrische Feldlinien von zwei positiven Punktladungen. Die Pfeile würden in die umgekehrte Richtung zeigen, wenn die Ladungen negativ wären. b) Die gleichen elektrischen Feldlinien, veranschaulicht durch Fasern in Öl.

Abbildung 4 zeigt die elektrischen Feldlinien für zwei gleiche positive Ladungen q, die sich in einem kleinen Abstand voneinander befinden. In der Nähe jeder Ladung ist das Feld näherungsweise das einer Ladung allein, da sich die andere Ladung im Vergleich dazu weit weg befindet. Folglich sind die Feldlinien in der Nähe jeder der beiden Ladungen radial und räumlich gleichartig. Da die Ladungen gleich sind, zeichnet man eine gleiche Anzahl von Linien, die ihren Ursprung in jeder Ladung haben. In großer Entfernung sind die Details der Ladungskonfiguration nicht mehr auffallend und das Liniensystem sieht wie das von einer Punktladung der Größe $2q$ aus. (Wenn z. B. die zwei Ladungen 1 mm voneinander getrennt sind und man sie aus einer Entfernung von 100 km betrachtet, dann würden sie wie eine einzelne Ladung aussehen.) Also, in einem großen Abstand von den Ladungen ist das Feld näherungsweise dasselbe wie das von einer Punktladung 2q, und die Linien sind räumlich gleichartig verteilt. In Abbildung 21.20 sieht man, dass die Feldliniendichte in dem Bereich zwischen den beiden Ladungen klein ist, verglichen mit der Dichte der Linien in dem Bereich direkt links und rechts von den Ladungen. Das bedeutet, dass die Größe des elektrischen Felds in dem Bereich zwischen den Ladungen schwächer ist als direkt links und rechts von den Ladungen, wo die Linien räumlich dichter liegen. Diese Information kann auch durch direkte Berechnung des Felds an Punkten in diesen Bereichen erhalten werden. Man kann diese Erkenntnisse zum Zeichnen der elektrischen Feldlinien für irgendein System von Punktladungen nutzen. In der Nähe jeder Ladung sind die Feldlinien räumlich gleichartig verteilt und treten aus der Ladung radial heraus oder hinein, je nach dem Vorzeichen der Ladung. Sehr weit entfernt von all den Ladungen ist die detaillierte Struktur des Systems nicht wichtig, der Feldlinienverlauf ähnelt dem Feld einer Punktladung, die die Gesamtladung des Systems trägt. Die Regeln zum Zeichnen von elektrischen Feldlinien kann man wie folgt zusammenfassen:

Definition 15 (Feldlinien) *1. Elektrische Feldlinien beginnen an positiven Ladungen (oder im Unendlichen) und enden an negativen Ladungen (oder im Unendlichen).*
2. Die Feldlinien einer einzelnen Punktladung sind kugelsymmetrisch.

4.4.2 Elektrische Dipole in elektrischen Feldern

Ein Dipol ist ein System aus zwei entgegegesetzt gleichen Punktladungen, die nahe beieinander sind. Hier betrachten wir das Verhalten eines elektrischen Dipols in einem äußeren elektrischen Feld. Dies ist besonders wichtig, weil es als Modell für das Verhalten praktisch jedes nicht-leitenden Mediums in einem elektrischen Feld dienen kann

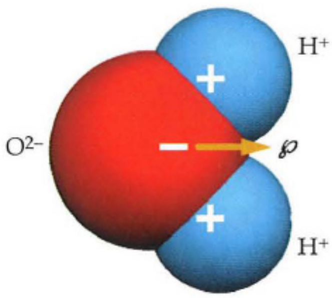


Abbildung 5: Ein Wasser-Molekül hat ein permanentes elektrisches Dipolmoment,

Einige Moleküle haben permanente Dipolmomente, verursacht durch eine inhomogene Ladungsverteilung innerhalb des Moleküls. Solche Moleküle nennt man polare Moleküle. Ein Beispiel ist HCl, das im Wesentlichen aus einem positiven Wasserstoffion der Ladung $+e$ und einem negativen Chlorion der Ladung $-e$ besteht. Das Zentrum der Ladung des positiven Ions fällt nicht mit dem Zentrum der Ladung des negativen Ions zusammen, und so besitzt das Molekül ein permanentes Dipolmoment. Ein anderes Beispiel ist Wasser (Abbildung 5). Ein homogenes äußeres elektrisches Feld übt keine resultierende Kraft auf einen

Dipol aus, denn die an den Ladungen angreifenden Kräfte bilden ein Kräftepaar, wie aus Abbildung 6 zu ersehen ist. Dieses Kräftepaar verursacht eine Drehbewegung des Dipols in die Feldrichtung.

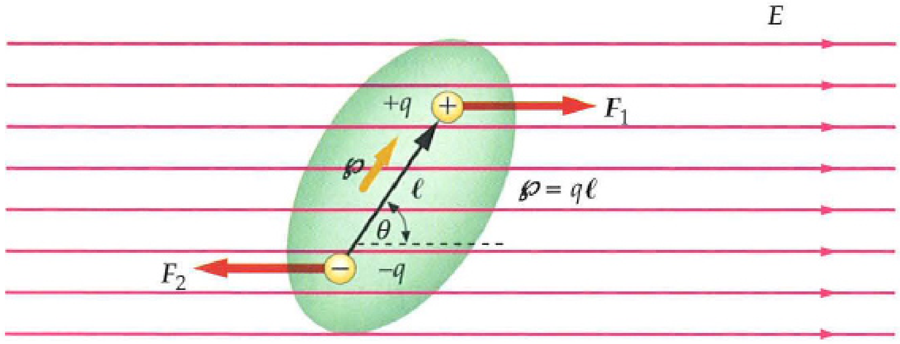


Abbildung 6: Ein Dipol in einem homogenen elektrischen Feld erfährt entgegengesetzt gleiche Kräfte, die ihn drehen, bis sein Dipolmoment die Richtung des Felds hat.

Mikrowellenherde nutzen vorteilhaft die elektrischen Dipolmomente der Wassermoleküle, um Essen zu kochen. Wie alle elektromagnetischen Wellen haben auch Mikrowellen oszillierende elektrische Felder, die Drehmomente von elektrischen Dipolen erzeugen. Deshalb rotieren die Wassermoleküle in der Mikrowelle mit einer beachtlichen kinetischen Rotationsenergie. Auf diese Weise wird Energie von der Mikrowellenstrahlung über die Wassermoleküle auf die Speisen übertragen und zwar in einer hohen Übergangsrate, die die geringe Kochzeit bedingt und den Mikrowellenherd so praktisch macht.

Nichtpolare Moleküle haben kein permanentes elektrisches Dipolmoment. Die neutralen Moleküle ohne permanentes Dipolmoment enthalten aber stets gleiche Mengen von positiven und negativen Ladungen. In Anwesenheit eines äußeren elektrischen Felds $\vec{E}$ werden die Ladungen räumlich getrennt. Die positiven Ladungen werden in die Richtung von $\vec{E}$ verschoben und die negativen Ladungen in die entgegengesetzte Richtung. So erlangen die neutralen Moleküle in einem elektrischen Feld ein Dipolmoment, das als induziertes Dipolmoment bezeichnet wird. Die Moleküle richten sich parallel zu dem äußeren elektrischen Feld aus und sind polarisiert.

5 Arbeit und kinetische Energie

5.1 Allgemeine Bemerkungen zum Begriff Ënergie"

Ein gehobener Körper kann über eine feste Rolle selbst wieder einen anderen Körper anheben. Eine gespannte Feder kann ein Werkstück verschieben. Ein Hammer, auf die Geschwindigkeit v gebracht, kann einen Nagel eintreiben. Der Arbeitsaufwand für das Heben, Spannen, Bewegen des Körpers hat demnach eine Arbeitsfähigkeit des Körpers hervorgerufen. Man sagt dazu: Der Körper besitzt Energie.

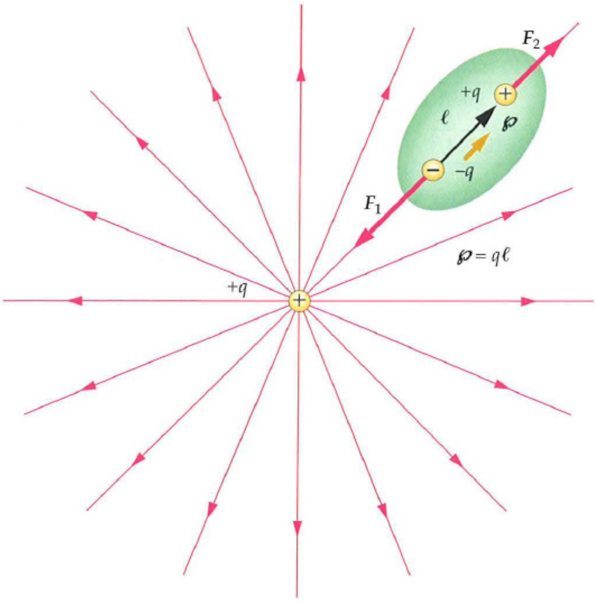


Abbildung 7: Ein nichtpolares Molekül in dem inhomogenen Feld einer positiven Punktladung. Das induzierte elektrische Dipolmoment t-J ist parallel zu dem Feld der Punktladung. Da sich die Punktladung näher am Zentrum der negativen Ladung als am Zentrum der positiven Ladung des Moleküls befindet, gibt es eine resultierende Anziehungskraft zwischen dem Dipol und der Punktladung. Wenn die Punktladung negativ wäre, würde das induzierte Dipolmoment umgekehrt sein und das Molekül würde wieder von der Punktladung angezogen werden.

Definition 16 *Energie E ist die Arbeitsfähigkeit eines Körpers, sein Vermögen, Arbeit zu verrichten. Energie ist „gespeicherte Arbeit“. Arbeit und Energie sind Skalare. Da Energie E das Vermögen des Körpers ist, die Arbeit W zu verrichten, müssen Energie und Arbeitseinheiten gleich sein.*

5.1.1 Energieerhaltung

Lemma 17
1. *Es gibt ein Faktum, anders ausgedrückt, ein Gesetz, das alle Naturphänomene beherrscht, welche bis heute bekannt sind.*
2. *Es gibt keine bekannte Ausnahme zu diesem Gesetz, soweit wir wissen, ist es exakt.*
3. *Dieses die Gesetz wird Energieerhaltung genannt.*
4. *Es sagt, dass es eine gewisse Größe gibt, welche wir Energie nennen, die sich bei den vielfachen Änderungen, die in der Natur vor sich gehen, nicht ändert.*

5.2 Eindimensionale Bewegung mit konstanten Kräften

Die Arbeit einer konstanten Kraft $\vec{F}$, deren Angriffspunkt sich entlang einer Verschiebung $\Delta x \cdot \hat{x}$ bewegt, ist gleich

$$w = F_x \cdot \Delta x = |F| \cos\theta \cdot \Delta x \tag{17}$$

Die Arbeit ist eine skalare Größe, die positiv ist, wenn,Δx und F_x, die gleichen Vorzeichen besitzen, und negativ, wenn die Vorzeichen verschieden sind. Die Maßeinheit der Arbeit ist das Produkt aus der Maßeinheit der Kraft und der des Wegs. Die SI-Einheit von Arbeit und Energie ist das Joule (J) , das Produkt aus Newton und Meter:

$$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$$

Abweichend davon wird in der Atom- und Kernphysik häufig das Elektronenvolt (eV) verwendet:

$$1\,\mathrm{eV} = 1,6.10^{-19}\,\mathrm{J}\,.$$

5.2.1 Der Zusammenhang zwischen Gesamtarbeit und kinetischer Energie

Zwischen der an einem Körper verrichteten Gesamtarbeit und seiner Anfangs- und Endgeschwindigkeit besteht ein wichtiger Zusammenhang. Wenn F, die Gesamtkraft ist, die auf ein Teilchen wirkt, besagt das zweite Newton'sche Axiom: $F_x = ma_x$. Bei einer konstanten Kraft ist auch die Beschleunigung konstant. Damit lässt sich die Verschiebung über die Gleichung für die konstante Beschleunigung $v_{E,x}^2 = v_{A,x}^2 + 2a_x\Delta x$ durch die Anfangsgeschwindigkeit v_A und durch

Beispiel 18

Die Kraft auf ein Elektron

In der Bildröhre eines Fernsehgeräts wird ein Elektron aus der Ruhe heraus beschleunigt. Die Kraft, die das Elektron beschleunigt, ist eine elektrische Kraft, die von dem elektrischen Feld in der Bildröhre herrührt. Nach einem Weg von 80 cm besitzt das Elektron eine kinetische Energie von 2,5 keV. Berechnen Sie die Kraft auf das Elektron unter der Annahme, dass sie konstant ist und in Bewegungsrichtung wirkt.

Problembeschreibung: Da sich das Elektron aus der Ruhe heraus zu bewegen beginnt, ist die verrichtete Arbeit gleich der kinetischen Energie.

Lösung:

Setzen Sie die verrichtete Arbeit gleich der Änderung der kinetischen Energie und stellen Sie die Gleichung nach der Kraft um. Die kinetische Energie am Anfang und am Ende ist jeweils gegeben:

$$W = \Delta E_{\mathrm{kin}}$$

$$F_x \, \Delta x = E_{\mathrm{kin,E}} - E_{\mathrm{kin,A}}$$

$$F_x = \frac{E_{\mathrm{kin,E}} - E_{\mathrm{kin,A}}}{\Delta x}$$

$$= \left(\frac{2\,500\ \mathrm{eV} - 0\ \mathrm{eV}}{0{,}8\ \mathrm{m}}\right) \cdot \left(\frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}}{1\ \mathrm{eV}}\right)$$

$$= \boxed{5{,}0 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{N}}$$

Kommentar: Wenn wir später die Elektrizität behandeln, werden Sie feststellen, dass die Arbeit pro Ladungseinheit die Potenzialdifferenz ist und in Volt gemessen wird. Somit ist 1 eV die Energie, die ein Teilchen der Ladung e (ein Elektron oder Proton beispielsweise) gewinnt oder verliert, wenn sich seine Potenzialdifferenz um 1 V ändert.

die Endgeschwindigkeit v_E ausdrücken. Nach einigen Umformungen erhält man daraus:

$$F_x \Delta x = \frac{1}{2} m v_{E,x}^2 - \frac{1}{2} m v_{A,x}^2 = W \qquad (18)$$

$\frac{1}{2} m v_x^2$ ist eine skalare Größe, die kinetische Energie E_{kin}eines Teilchens genannt wird:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 \qquad (19)$$

5.2.2 Die von einer ortsabghängigen Kraft verrichtetet Arbeit

Viele Kräfte sind selbst ortsabhängig. So übt beispielsweise eine gedehnte Feder eine Kraft aus, die proportional zur Länge ihrer Dehnung ist. Die Gravitationskraft der Erde auf ein Raumschiff ist umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands zwischen Erde und Raumschiff. Allerdings kann man eine ortsabhängige Kraft durch eine Folge konstanter Kräfte annähern . Die Arbeit einer ortsabhängigen Kraft ist dann

$$W = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i F_x(x_i) \cdot \Delta x_i = \int_{x_1}^{x_2} F_x(x) dx \qquad (20)$$

5.2.3 Arbeit und Energie in drei Dimensionen

Im allgemeinen. dreidimensionalen Fall entspricht die Arbeit folgender Gleichung:

$$W = \int_1^2 \vec{F} \bullet d\vec{s} = E_{kin,2} - E_{kin,1} \qquad (21)$$

wobei über den Weg $d\vec{s}$ integriert werden muss und das Inprodukt aus Kraft und Weg gebildet werden muss.

6 Arbeit und potentielle Energie

Die Arbeit an einem Teilchen ist gleich der Änderung seiner kinetischen Energie. Es kann vorkommen, dass die Arbeit, die durch äußere Kräfte an einem System verrichtet wird, die kinetische Energie des Systems überhaupt nicht erhöht. In diesem Fall wird die Arbeit als potenzielle Energie gespeichert - also als Energie, die mit der Lage des Systems in Zusammenhang steht.

Stellen Sie sich einen Gewichtheber vor, der ein Gewicht mit einer Masse m auf eine Höhe h hebt. Die Kraft, die die Arme des Gewichthebers auf das Gewicht ausüben, ist $-mg$, denn sie müssen die Gravitationskraft der Erde auf das Gewicht kompensieren. Stellen Sie sich nun die Erde und das Gewicht als ein System zweier Teilchen vor (zu dem der Gewichtheber nicht mit dazugehört!). Die äußeren Kräfte, die auf das System aus der Erde und aus dem Gewicht wirken, sind zum einen die Kraft, die die Arme auf das Gewicht ausüben, und zum anderen die Kraft $-mg$, die die Füße des Gewichthebers auf die Erde ausüben. (Abbildung 6.20). (Die Anziehungskraft, die der Gewichtheber auf das Gewicht ausübt, kann sicher vernachlässigt werden.) Beim Anheben bewegt sich das Gewicht um die Strecke h nach oben, während die Bewegung der Erde vernachlässigt werden kann. Somit verrichtet nur die Kraft, mit der die Hände an dem Gewicht angreifen, wirklich Arbeit am System. Da das Gewicht vor und nach dem Heben die Geschwindigkeit $v = 0$ hat, also auch seine kinetische Energie am Anfang und am Ende gleich null ist und daher $\Delta E_{kin} = 0$ gilt, ist die Arbeit, die alle äußeren Kräfte an dem System aus der Erde und aus dem Gewicht verrichten,mgh. Diese Arbeit wird in Form von potenzieller Energie gespeichert, also Energie, die von der Lage des Gewichts relativ zur Erde oder, mit anderen Worten, von der Lage des Systems aus Erde und Gewicht abhängt. Man bezeichnet diese Energie als potenzielle Energie der Schwerkraft.

Ein anderes System, das Energie durch seine Lage speichert, ist eine Feder. Wenn man eine Feder dehnt oder zusammendrückt, wird Energie, die von der Federlänge abhängt, als potenzielle Energie gespeichert. Betrachten Sie beispielsweise die Feder in Abbildung 6.21 als das System. Diese Feder soll nun durch die gleich großen, aber entgegengesetzt gerichteten Kräfte $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$ zusammengedrückt werden . Diese beiden Kräfte ergeben zusammen null - die Gesamtkraft auf die Feder ist also null, so dass die kinetische Energie der Feder ebenfalls null bleibt. Die Arbeit, die man beim Zusammendrücken der Feder am System verrichtet, wird also nicht in Form kinetischer Energie, sondern als potenzielle Energie der Feder gespeichert. Dabei wird die Lage des Systems geändert, was sich in der Längenänderung der Feder zeigt. Da sowohl F_1 als auch F_2 positive Arbeit verrichten, ist die an der Feder verrichtete Gesamtarbeit positiv. (Die vonF_1 verrichtete Arbeit ist positiv, da die Kraft $\vec{F_1}$ und die Verschiebung $\Delta\vec{s}_1$ihres Angriffspunkts in die gleiche Richtung zeigen. Gleiches gilt auch für $\vec{F_2}$ und $\Delta\vec{s}_2$

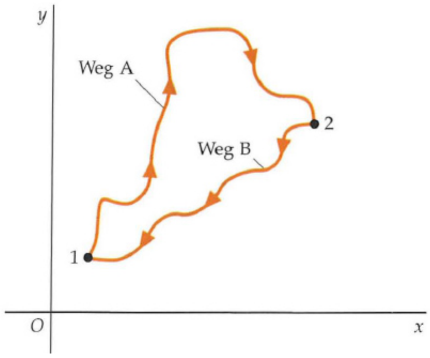


Abbildung 8: Zwei Wege im Raum verbinden die Punkte 1 und 2. Die Arbeit einer konservativen Kraft zwischen Punkt 1 und 2 auf dem Weg A sei W Da die Arbeit bei einem vollen Umlauf null ist, muss die Arbeit für den Rückweg entlang des Wegs B gleich - W sein. Wird der Weg B in entgegengesetzter Richtung, also von Punkt 1 zu Punkt 2, ist die Kraft an jedem Punkt genauso groß wie bei der Bewegung von 2 nach 1, während die Verschiebung entgegengesetzt ist. Damit ist die Arbeit von Punkt 1 zu Punkt 2 entlang des Wegs Bebenfalls W Allgemein gilt also, dass die Arbeit auf jedem Weg, der die beiden Punkte 1 und 2 verbindet, gleich ist.

6.0.4 Konservative Kräfte

Wenn ein Skiläufer mit einem Skilift auf einen Hügel mit der Höhe h fährt, beträgt die Arbeit, die der Skilift an dem Skiläufer verrichtet, $-mgh$, denn die Schwerkraft muss überwunden werden. Dagegen ist die Arbeit, die die Schwerkraft beim Abfahren an ihm verrichtet, immer $+mgh$. Somit ist die Gesamtarbeit, die die Schwerkraft an dem Skiläufer während einer vollen Runde hinauf und hinab verrichtet, unabhängig vom Weg null. Die Schwerkraft, die die Erde auf den Skiläufer ausübt, ist eine so genannte konservative Kraft. Eine Kraft ist konservativ, wenn die Gesamtarbeit, die sie an einem Teilchen verrichtet, das sich auf einer beliebigen geschlossen Bahn bewegt, null ist.

Definition 19 *Eine Kraft ist konservativ, wenn die Gesamtarbeit, die sie an einem Teilchen verrichtet, das sich auf einer beliebigen geschlossen Bahn bewegt, null ist.*

6.0.5 Arbeit und Potential in $1/r^2-$Feldern

Besonder oft benötigt man die Arbeit und das Potential eines $1/r^2$-Feldes, wie dem Gravitations- oder elektrischem Feld. Dazu ist zuerst eine allgemein gültige Feststellung das Potential betreffend zu machen:

Lemma 20 *In einem Potentialfeld kann der 0-Punkt beliebig gewählt werden.*

Für den Fall der $1/r^2$ Felder wählt man oft den 0-Punkt des Potentials im Unendlichen, weil dort die Kraft verschwindet.

Die Arbeit, die beim Bewegen einer Punktmasse Masse m im Gravitationsfeld einer anderen Punktmasse m_E bzw. einer Punktladung q im elektrischen Feld einer anderen Punktladung q_E aus dem Unendlichen bis in einen Abstand r verrichtet wird ergibt sich zu:

$$W = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{\infty}^{r} \frac{q_E \cdot q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_E}{r} q \\ -G\int\limits_{\infty}^{r} \frac{m_E \cdot m}{r^2} dr = G\frac{m_E}{r} m \end{cases} \tag{22}$$

wobei man $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_E}{r}$ bzw. $G\frac{m_E}{r}$ als das Potential $\Phi(r)$ der Punktladung q_E bzw. Punktmasse m_E bezeichnet.

$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{q_E}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_E \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$ wird als die Spannungsdifferenz oder Spannung U im elektrischen Feld der Ladung q_E bezeichnet.

6.0.6 Erdbeschleunigung

Berechnen wir nun die Arbeit (bzw. Potentialdifferenz), wenn wir eine Masse m auf der Erdoberfläche um einen zum Erdradius h_1 kleinen Betrag $h - h_1$ auf die Höhe h anheben:

$$W = \int\limits_{h_1}^{h} -Gm_E \frac{m}{r^2} dr = Gm_E \frac{m}{r}\Big|_{h_1}^{h} = Gm_E m \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_1}\right) \tag{23}$$

Da $h - h_1 \leqslant h_1$ ist, könne wir die folgende Näherung durch Reihenentwicklung durchführen:

$$\begin{aligned} &W = Gm_E m \tfrac{h_1 - h}{h \cdot h_1} \approx \\ &= -Gm_E \tfrac{m}{h_1^2}(h - h_1)^1 + Gm_E \tfrac{m}{h_1^3}(h - h_1)^2 - Gm_E \tfrac{m}{h_1^4}(h - h_1)^3 + ... \end{aligned} \tag{24}$$

Man sieht sofort, dass man so die bekannte konstante Erdbeschleunigung bzw. Potentielle Energie im Schwerefeld erhält, wenn man in Gl. 24 nur das erste Glied $-Gm_E \frac{m}{h_1^2}(h - h_1)$ berücksichtigt.

$$W \approx (h - h_1) \cdot const \tag{25}$$

6.1 Berechnung von Potentialen und Kraftfeldern

Auf einer mikroskopischen Skala ist die elektrische Ladung quantisiert, sie tritt immer als ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung e auf. Jedoch gibt es im makroskopischen Bereich genügend Fälle, in denen viele Ladungen so dicht zusammen sind, dass man sie über ein Raumgebiet kontinuierlich verteilt ansehen kann. Die Beschreibung einer sehr großen Zahl von diskreten Ladungen mit einer kontinuierlichen Ladungsdichte ist ähnlich der Verwendung einer kontinuierlichen Massendichte, um Luft zu beschreiben, die auch aus einer großen Zahl von diskreten Molekülen besteht. In beiden Fällen lässt sich ein Volumenelement ΔV finden, das einerseits groß genug ist, damit es genügend viele Ladungen bzw. Moleküle enthält, andererseits aber immer noch klein genug, um ΔV als Differenzial dV anzusehen. Wir betrachten ein endliches Raumgebiet V, in dem elektrische Ladungen kontinuierlich verteilt sind, so dass im Volumenelement dV die Ladung dq enthalten ist. Die Raumladungsdichte ρ ist definiert durch den Quotienten der Differenziale dq dividiert durch dV:

$$\rho = \frac{dq}{dV} \tag{26}$$

Die Raumladungsdichte ρ ist eine Funktion des Orts in dem betrachteten Raumgebiet V: Die Ladungsverteilung heißt homogen, wenn ρ konstant ($\neq 0$) ist. Analog kann man eine Flächenladungsdichte bzw. Linienladungsdichte definieren

Wir wollen nun kurz überlegen, wie wir elektrische Felder von kontinuierlichen Ladungsverteilungen im Raum, auf einer Fläche und auf einer Linie berechnen können und **gehen dabei von dem Coulomb'schen Gesetz für PunktIadungen aus**. (*Danach führen wir das Gauß'sche Gesetz ein, das eine Beziehung zwischen einer geeigneten elektrischen Feldgröße auf der geschlossenen Oberfläche eines Raumgebiets und der in diesem Gebiet eingeschlossenen Raumladung herstellt und in gewissen (symmetrischen) Fällen eine sehr elegante Methode zur Berechnung von Feldern bietet.*)

Die Berechnung von Gesamtladungen und der durch sie erzeugten elektrischen Felder für gegebene kontinuierliche Ladungsverteilungen ist grundsätzlich eine Integrationsaufgabe über räumliche Bereiche, Flächenstücke oder geschlossene Oberflächen und über Kurven. Nur für einfache geometrische Ladungsverteilungen sind analytische Lösungen des Integrationsproblems zu erwarten. In vielen praktischen Anwendungen führen nur numerische Integrationsmethoden zu Näherungslösungen.

Ein einfaches Beispiel zur Feldberechnung durch Aufintegration der Coulombfelder einzelner Punktadungen ist im Folgenden gezeigt.

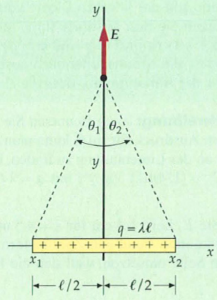
6.1.1 Der Gauß´sche Satz

Er gehört zu den Maxwell'schen Gleichungen - den fundamentalen Gleichungen des Elektromagnetismus. Für statische Ladungen und zeitunabhängige Felder, die ausschließlich hier behandelt werden, sind das Gauß'sche Gesetz und das Coulomb'sche Gesetz äquivalente Beschreibungen. Elektrische Felder symmetrischer Ladungsverteilungen, wie z. B. eine geladene Kugelschale oder eine unendliche Linienladung, können leichter mit Hilfe des Gauß'schen Gesetzes berechnet

Beispiel 21

Das elektrische Feld auf der Mittelsenkrechten einer endlichen Linienladung

Unter Anwendung der Gleichungen 22.8 a und 22.8 b erhält man einen Ausdruck für das elektrische Feld in der Mittelebene eines homogen geladenen Liniensegments mit einer linearen Ladungsdichte λ und der Länge ℓ.



22.4

Problembeschreibung: Zeichnen Sie die Linienladung auf der x-Achse sowie die Mittelsenkrechte als y-Achse. Nach Abbildung 22.4 heißt das, man wählt $x_1 = -\frac{1}{2}\,\ell$ und $x_2 = +\frac{1}{2}\,\ell$, so dass $\theta_1 = -\theta_2$ ist. Danach benutzen Sie die Gleichungen 22.8 a und 22.8 b, um das elektrische Feld zu berechnen.

Lösung:

1. Skizzieren Sie die Ladungskonfiguration mit der Linienladung auf der x-Achse und mit der y-Achse als Mittelsenkrechte. Zeichnen Sie den Feldpunkt auf der positiven y-Achse in einem Abstand y vom Koordinatenursprung.

2. Benutzen Sie Gleichung 22.8 a, um einen Ausdruck für E_y zu finden. Vereinfachen Sie ihn unter Benutzung von $\theta_2 = -\theta_1 = \theta$:

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{y}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{y}[\sin\theta - \sin(-\theta)]$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{y}\sin\theta$$

3. Drücken Sie $\sin\theta$ in Termen von y und ℓ aus und substituieren Sie das Ergebnis in das Resultat von Schritt 2:

$$\sin\theta = \frac{\frac{1}{2}\,\ell}{\sqrt{(\frac{1}{2}\,\ell)^2 + y^2}}$$

also

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{y}\frac{\frac{1}{2}\,\ell}{\sqrt{(\frac{1}{2}\,\ell)^2 + y^2}}$$

4. Benutzen Sie Gleichung 22.8 b, um E_x zu bestimmen:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{y}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{y}[\cos\theta - \cos(-\theta)]$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{y}(\cos\theta - \cos\theta) = 0$$

5. Bestimmen Sie den Vektor $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{E} = E_x\,\hat{\boldsymbol{x}} + E_y\,\hat{\boldsymbol{y}}$$
$$= \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{y}\frac{\frac{1}{2}\,\ell}{\sqrt{(\frac{1}{2}\,\ell)^2 + y^2}}\,\hat{\boldsymbol{y}}}$$

Abbildung 9: Beispiel: Berechnung des elektrischen feldes einer Linienladung

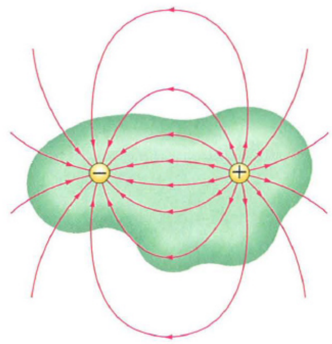


Abbildung 10: Eine Oberfläche von beliebiger Gestalt, die einen elektrischen Dipol einschließt. Wenn die Oberfl äche beide Ladungen einschließt, ist die Zahl der Linien, die die Oberfläche von innen her durchstoßen, gleich der Zahl der Linien, die die Oberfläche von außen durchdringen, unabhängig davon, wie die Oberfläche gestaltet ist.

werden. In diesem Abschnitt gehen wir von dem Feldlinien bild des elektrischen Felds aus und geben eine plausible Erklärung für die Gültigkeit des Gauß'schen Gesetzes.

Eine geschlossene Oberfläche ist eine einfach zusammenhängende Fläche, die das Universum in zwei Bereiche einteilt, in den Bereich innerhalb und in den Bereich außerhalb der Oberfläche (die Orientierung erfolgt eindeutig durch die Festlegung des Flächennormalenvektors). Abbildung 10 zeigt eine geschlossene Oberfläche von beliebig gewählter Gestalt, die einen Dipol einschließt. Die Zahl der elektrischen Feldlinien, die an der positiven Ladung beginnen und die Oberfläche vom Inneren her durchdringen, hängt von der Gestalt der Oberfläche ab; aber jede Linie, die die Oberfläche von innen her durchdringt, durchsetzt sie auch von außen. Somit ist in diesem Beispiel der Abbildung 10 die Zahl der austretenden Linien gleich der Zahl der in die Oberfläche eintretenden Linien. Das gilt für beliebig gestaltete Oberflächen, solange beide Ladungen eingeschlossen werden. Anders ist es für das Beispiel der Abbildung 11. Hier ist für jede beliebig geformte Oberfläche, die beide Ladungen umschließt, die Differenz der ein- und austretenden Linien ungleich null. Zählt man jede austretende Linie mit + 1 und eine in das Innere von außen eintretende Linie mit - 1, so ist in diesem Beispiel der Abbildung 11 die Gesamtzahl der Linien durch die Oberfläche eine positive Zahl, die proportional der Differenz $2q - q = +q$ ist, wie man durch Vergleich mit Abbildung 10 finden kann, wenn die Oberfläche nur die Ladung $+q$ einschließt. Zusammengefasst halten wir fest: **Die Differenz der eine Oberfläche verlassenden und eintretenden Feldlinien ist proportional der von der Oberfläche eingeschlossenen Gesamtladung. Diese Regel ist die qualitative Aussage des Gauß'schen Gesetzes**.

Die mathematische Größe, die der Zahl der Feldlinien entspricht, die eine Fläche senkrecht durchstoßen, nennt man elektrischen Fluss Φ_{el}. Für eine ebene Fläche senkrecht zu einem homogenen Feld E (Abbildung 12), wo die Flächennormale die gleiche Richtung wie das Feld hat, ist der elektrische Fluss

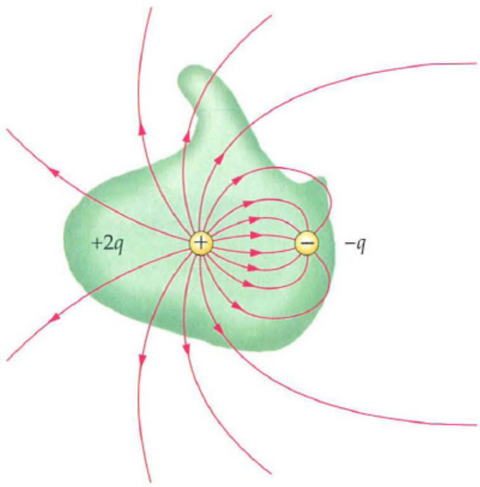


Abbildung 11: Eine Oberfläche von beliebiger Gestalt, die die Ladungen $+2q$ und $-q$ einschließt. Jede Feldlinie, die an $-q$ endet, verläuft entweder nur im Innengebiet oder verlässt die Oberfläche und tritt wieder ein. Die Gesamtzahl der durch die Oberfläche austretenden Linien bei der Ladungen ist die gleiche wie für eine ei nzelne eingeschlossene Ladung $+q$.

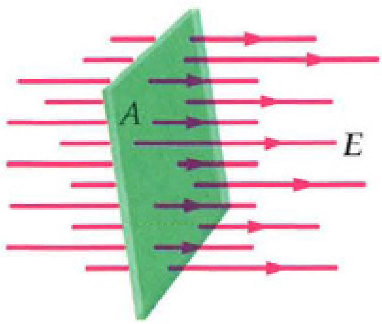


Abbildung 12: Elektrische Feldlinien eines homogenen Felds, die eine Fläche A sen krecht durchdringen. Das Produkt $\vec{E}\vec{A}$ ist der elektrische Fluss durch die Fläche.

das Produkt aus dem Feld E und der Fläche A:

$$\Phi_{el} = EA.$$

Der Fluss ist proportional zur Zahl der Feldlinien, die die Fläche durchsetzen, ebenso wie die Feldstärke E proportional zur Feldliniendichte ist. Wir verallgemeinern nun den Begriff des Vektorflusses, indem wir beliebige Richtungen zwischen Feld und Flächennormale und beliebig gekrümmte Flächen zulassen.

$$\Phi_{el} = \vec{E}\vec{A}$$

bzw. im allgemeinsten Fall:

$$\Phi_{el} = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

6.1.2 Quantitative Darstellung des Gauß'schen Gesetzes

Abbildung 13 zeigt eine Kugeloberfläche vom Radius r_k mit einer Punktladung q im Mittelpunkt. Das elektrische Feld steht überall senkrecht auf dieser Oberfläche und besitzt die Größe $E_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_k^2}$ Der Gesamtfluss von E_n durch diese Kugeloberfläche ist $\Phi_{el} = \oint E_n \cdot d\vec{A} = E_n \oint d\vec{A}$. Dabei wurde E_n vor das Integral gezogen, da es auf der gesamten Oberfläche konstant ist. Das Integral über dA ergibt die gesamte Kugeloberfläche vom Radius r_k, also $4\pi r_l^2$. Somit erhalten wir für den Gesamtfluss durch die Kugeloberfläche

$$\Phi_{el} = \oint E_n \cdot d\vec{A} = E_n(4\pi r_k^2) = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_k^2}}_{\substack{\text{bekanntes Feld einer} \\ \text{Punktladung}}} (4\pi r_k^2) = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{27}$$

27 stellt ein interessantes Ergebnis dar: Der Gesamtfluss durch eine Kugeloberfläche, die im Zentrum die Ladung q enthält, ist unabhängig vom Radius r_k der Kugel. Dieses Ergebnis steht im Einklang mit der vorangegangenen Beobachtung, dass die Zahl der Linien durch eine geschlossene Oberfläche nach außen der Gesamtladung im Inneren proportional ist. Unabhängig von der Form der Oberfläche ist die Zahl der Linien für alle geschlossenen Oberflächen um die Ladung herum dieselbe, wie Abbildung 13 zeigt. Somit ist auch der Gesamtfluss durch eine beliebige Oberfläche, die q im Inneren enthält, gleich dem Fluss durch die Kugeloberfläche, nämlich q/ε_0.

Man kann dieses Ergebnis sofort auf Systeme mit mehreren Ladungen übertragen.

Der Gesamtfluss durch irgendeine geschlossene Oberfläche nach außen ist gleich dem Produkt von $1/\varepsilon_0$ multipliziert mit der Gesamtladung innerhalb der Oberfläche:

$$\Phi_{el} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{innen}}}{\varepsilon_0} \tag{28}$$

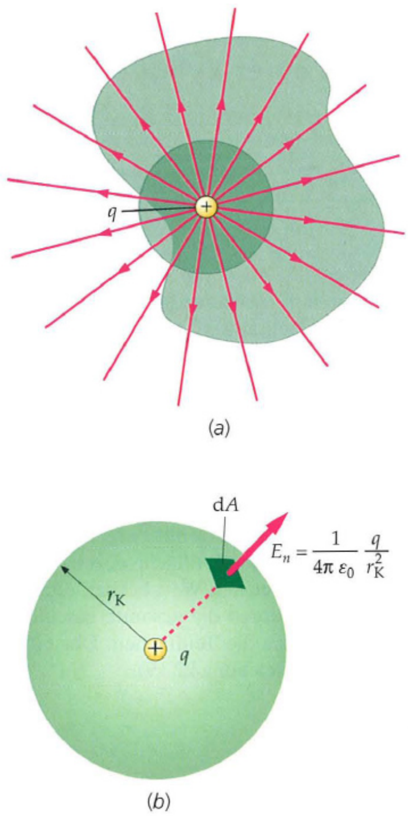


Abbildung 13: Eine Kugeloberfläche mit einer eingeschlossenen Punktladung q. a) Die Gesamtzahl der elektrischen Feldlinien, die aus dieser Oberfläche heraustreten, ist gleich der Gesamtzahl der austretenden Linien durch eine beliebige geschlossene Oberfläche, die ebenfa lls die Ladung q ein schließt. b) Der Gesamtfluss durch eine Kugeloberfläche ist leicht zu berechnen. Er ist gleich dem Produkt aus E_n und der Oberfläche $4\pi r^2$, also $E_n 4\pi r^2$.

' Diese rudimentäre Anleitung des Gauß´schen Satzes haben wir durch das bekannte $E-$Feld einer Punktladung erhalten Diese Beziehung gilt aber auch für ein unbekanntes Feld und ermöglicht daher in gewissen Fällen sehr elegant die Berechnung des unbekannten Feldes einer Ladungsverteilung.

Die Gültigkeit von 28 hängt mit der Eigenschaft elektrostatischer Felder zusammen, dass sie sich in großer Entfernung von der Ladung wie das Feld einer Punktladung verhalten, nämlich umgekehrt proportional zum Abstandsquadrat sind. Diese Eigenschaft des elektrischen Felds hat es ermöglicht, eine bestimmte Anzahl von elektrischen Feldlinien an eine Ladung zu zeichnen, deren Feldliniendichte proportional zur Feldstärke ist. Das Gauß'sche Gesetz ist für alle Oberflächen und alle Ladungsverteilungen gültig. Für **Ladungsverteilungen mit hoher Symmetrie** kann es also benutzt werden, das elektrische Feld zu berechnen, was an einem Beispiel demonstriert werden soll.

Gauß'sches Gesetz und Coulomb'sches Gesetz sind für statische Ladungsverteilungen äquivalent. Jedoch ist das Gauß'sche Gesetz weitreichender, denn es gilt auch für zeitlich veränderliche Felder in ruhenden und bewegten Materialien, während das Coulomb'sche Gesetz (wie auch das Newton'sche Gravitationsgesetz) für statische Ladungs- und Feldverteilungen gilt.

6.1.3 Berechnung von Feldern mit dem Gauß´schen Satz

Ein Beispiel für die Berechnung eines elektrischen Feldes mit hoher Symmetrie ist im folgenden gegeben:

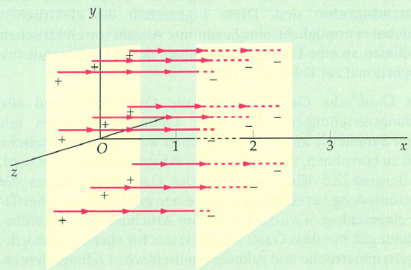
Eine Ladungsverteilung hat ebene Symmetrie, wenn die Ladung über eine unendlich ausgedehnte ebene Fläche gleichmäßig verteilt ist. Abbildung 14 zeigt einen Ausschnitt einer unendlichen Ladungsebene mit einer homogenen Oberflächenladungsdichte σ. Beachten Sie, dass die Richtung einer Fläche $\vec{A}$ durch ihre Normale $\hat{n}$ gegeben ist. Vektoren, die anschaulich in der Fläche liegen, stehen senkrecht auf ihrer Normalen, und Vektoren, die anschaulich senkrecht auf einer Fläche stehen, liegen parallel zu ihrer Normalen. Aufgrund der Symmetrie muss $\vec{E}$ senkrecht zur Ladungsebene stehen. In der Abbildung ist die y-z-Ebene eines kartesischen Koordinatensystems in die Ladungsebene gelegt, so dass das elektrische Feld in x-Richtung liegt. Das Feld E könnte von dem Abstand zur Ebene abhängen. In Punkten gleichen Abstands von der Ladungsebene hat dann $\vec{E}$ den gleichen Betrag und die gleiche Richtung, falls die Punkte auf einer Seite der Ladungsebene liegen, und ebenfalls gleichen Betrag, aber entgegengesetzte Richtungen, wenn die Punkte auf unterschiedlichen Seiten liegen.

Für die Gauß'sche Oberfläche wird ein wie in der Abbildung **??** gezeigter Zylinder gewählt, dessen Zylinderachse mit der x-Achse zusammenfällt und der durch die Ladungsebene in zwei Hälften geteilt wird. Auf jedem Zylinderoberfläehen stück (Deckflächen und Mantel) werden $\hat{n}$ und $\vec{E}$ gezeichnet. Auf der Mantelfläche ist $\vec{E} \cdot \hat{n} = 0$, denn hier sind $\vec{E}$ und $\hat{n}$ senkrecht zueinander, und der elektrische Fluss durch den Mantel ist null. Der Fluss durch jede der ebenen Deckflächen der Oberfläche ist $\vec{E} \cdot \vec{A} = E_n A$, denn $\vec{E}$ und $\hat{n}$ sind auf jeder Deckfläche parallel und gleichgerichtet zueinander, wenn die Gesamtladung positiv ist, und entgegengesetzt gerichtet, wenn eine negative Ladung eingeschlossen

Beispiel 22

Das elektrische Feld zwischen zwei unendlichen planparallelen Ebenen

In Abbildung 22.21 ist eine unendliche Ebene mit der Oberflächenladungsdichte $\sigma = +4{,}5\ \mathrm{nC/m^2}$ in der Ebene $x=0$ und eine zweite unendliche Ebene mit der Oberflächenladungsdichte $\sigma = -4{,}5\ \mathrm{nC/m^2}$ in $x=2$ m parallel zur ersten Ebene gezeichnet. Berechnen Sie das elektrische Feld bei a) $x=1{,}8$ m und b) $x=5$ m.



Problembeschreibung: Jede Ebene erzeugt ein homogenes elektrisches Feld der Größe $|\sigma|/(2\varepsilon_0)$. An der positiven Ladungsfläche zeigt das Feld von der Fläche weg und an der negativen Ladungsfläche zu ihr hin. Das resultierende Feld ergibt sich aus dem Superpositionsprinzip. Die Addition der beiden Felder zwischen den Ebenen gibt ein Gesamtfeld vom Betrag $|\sigma|/\varepsilon_0$ in positiver x-Richtung. Außerhalb der beiden Ebenen, also für alle Punkte $x>2$ m bzw. $x<0$ m, sind die Felder entgegengesetzt gerichtet und gleich und heben sich somit auf.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Berechnen Sie den Betrag der Felder $\boldsymbol{E}_1$ und $\boldsymbol{E}_2$, die von den Ladungsebenen erzeugt werden:

$$|\boldsymbol{E}_1| = |\boldsymbol{E}_2| = \frac{|\sigma|}{2\,\varepsilon_0} = \frac{4{,}5\cdot 10^{-9}\ \mathrm{C/m^2}}{2\cdot(8{,}85\cdot 10^{-12}\ \mathrm{C^2/(N\cdot m^2)})} = 254\ \mathrm{N/C}$$

2. In jedem Punkt zwischen den Ebenen mit der Koordinate $x=1{,}8$ m zeigen die Felder von jeder Ladungsebene in die positive x-Richtung:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 = \frac{|\sigma|}{2\,\varepsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{|\sigma|}{2\,\varepsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{x}} = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{x}} = (254+254)\,\hat{\boldsymbol{x}}\ \mathrm{N/C} = \boxed{(508\,\hat{\boldsymbol{x}})\ \mathrm{N/C}}$$

Teilaufgabe b

In jedem Punkt mit $x=5$ m sind die Felder der zwei Ladungsebenen entgegengesetzt gerichtet:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 = \frac{|\sigma|}{2\,\varepsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{|\sigma|}{2\,\varepsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{x}} = \boxed{0}$$

Kommentar: Da die beiden Ebenen entgegengesetzt gleiche Ladungsdichten besitzen, beginnen die elektrischen Feldlinien auf der positiven Ebene und enden auf der negativen. Außerhalb der Ebenen ist das Gesamtfeld null. Wir vermerken, dass $|\boldsymbol{E}| = 508$ N/C für jeden Punkt im Bereich zwischen den geladenen Ebenen gilt.

Abbildung 14: Beispiel zur Berechnung des E-Feldes mittels Gauß´schem Satz.

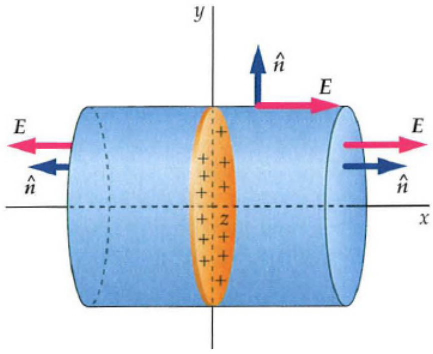


Abbildung 15: Gauß'sche Oberfläche für die Berechnung von $\vec{E}$, das von einer unendlichen Ladungsebene erzeugt wird. (Nur der Teil der Ebene ist gezeigt, die innerhalb der Gauß'schen Oberfläche liegt.) Auf den ebenen Flächen dieses Zylinders liegt $\vec{E}$ parallel zu der Oberflächennormalen, und der Betrag ist konstant. Auf der gekrümmten Oberfläche (Mantelfläche) steht $\vec{E}$ senkrecht zur Oberflächennormalen

ist. A ist der Flächeninhalt einer Deckfläche. Somit ist der gesamte nach außen gerichtete Fluss durch die geschlossene Zylinderoberfläche $2E_nA$. Die Gesamtladung innerhalb der Oberfläche ist σA. Die Berechnung erfolgt dann wie oben gezeigt.

Aus dem Feld kann man dann nach Festlegung eines willkürlichen Potentiawertes an einer Stelle im raum den Verlauf des Potentials durch Integration von $\int \vec{E} \cdot d\vec{s}$ erhalten.

6.1.4 Potential und $\vec{E} - Feld$ mittels Relaxationsmethode

Potential und Feld hängen, wie bekannt, über die folgende Beziehung zusammen

$$\vec{E}(x, y, z) = -grad\Phi(x, y, z) = -\nabla\Phi(x, y, z)$$

Man kann aus 6.1.4 auch (siehe Behandlung des Gauß´schen Satzes) folgende wichtige Relation erhalten

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\operatorname{div} \cdot \operatorname{grad} \Phi = -\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

die man auch als die Poissongleichung bezeichnet und die einer der Maxwellgleichungen darstellt. Wenn die Ladung ρ in 6.1.4 null ist, nennt man die

Gleichung auch Laplace - Gleichung.

Die Laplacegleichung ist auch Ausgangspunkt der sogenannten Relaxationsmethode, die es erlaubt das Potential bei bekannten Randbedingungen (Potentiale an bestimmten Orten im Raum) überall im Raum rekursiv aus einer beliebig angenommenen Potentialverteilung als Startwert zu berechnen, und zwar numerisch.

Im folgenden wird die Laplace-Gleichung aus Gründen der Übersichtlichkeit auf ein zweidimensionales Problem beschränkt. $\Phi(x, y)$ hängt daher nur von den Koordinaten x und y ab. aus 6.1.4 ergibt sich daher:

$$- \operatorname{div} \cdot \operatorname{grad} \Phi(x, y) = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} = 0$$

Beim Relaxationsverfahren, mit dem auch viele kommerzielle Programme arbeiten, wird der kontinuierliche Feldverlauf durch diskrete Gitterpunkte mit diskretem Potential ersetzt. Folglich geht die Laplacesche Differentialgleichung in eine Differenzengleichung über, welche sich durch numerische Berechnung (Iteration) lösen lässt. Vorraussetzung hierfür ist ein genügend kleiner Gitterpunktabstand h.

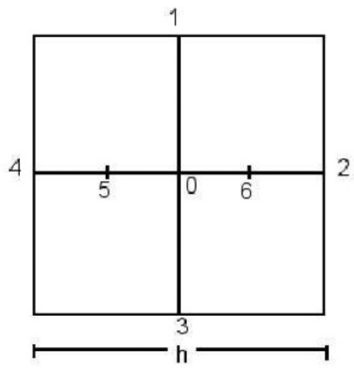


Abbildung 16: Potentialgitter für Relaxationsmethode,

Zur Berechnung des Potentiales in einem Punkt (z.B. im Punkt 0) wird nun der Differenzenquotient in x-Richtung in den benachbarten Punkten (hier 5 und 6) gebildet. Es gilt:

$$\Phi'_{5x} = \frac{\Phi_0 - \Phi_4}{h/2} und \Phi'_{6x} = \frac{\Phi_2 - \Phi_0}{h/2}$$

Es ergibt sich demnach für die zweite Ableitung in 0:

$$\Phi''_{0x} = \frac{\Phi'_6 - \Phi'_5}{h} = 2\frac{\Phi_2 - \Phi_0 - (\Phi_0 - \Phi_4)}{h^2} = 2\frac{\Phi_2 + \Phi_4 - 2\Phi_0}{h^2}$$

Analoge Betrachtung in y-Richtung liefert:

$$\Phi_{0y}^{''} = 2\frac{\Phi_1 + \Phi_3 - 2\Phi_0}{h^2}$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} = 0 = 2\frac{\Phi_2 + \Phi_4 - 2\Phi_0}{h^2} + 2\frac{\Phi_1 + \Phi_3 - 2\Phi_0}{h^2} \rightarrow$$

$$\Phi_0 = \frac{\Phi_2 + \Phi_4 + \Phi_1 + \Phi_3}{4}$$

Das Potential in einem diskreten Gitterpunkt entspricht also dem Mittelwert der vier benachbarten Potentiale, ist aber vom Gitterpunktabstand, falls dieser genügend klein gewählt ist, unabhängig. Auf diese Art ist es möglich, die Laplace-Gleichung bei vorgegebenen Potentialrandbedingungen numerisch zu lösen.