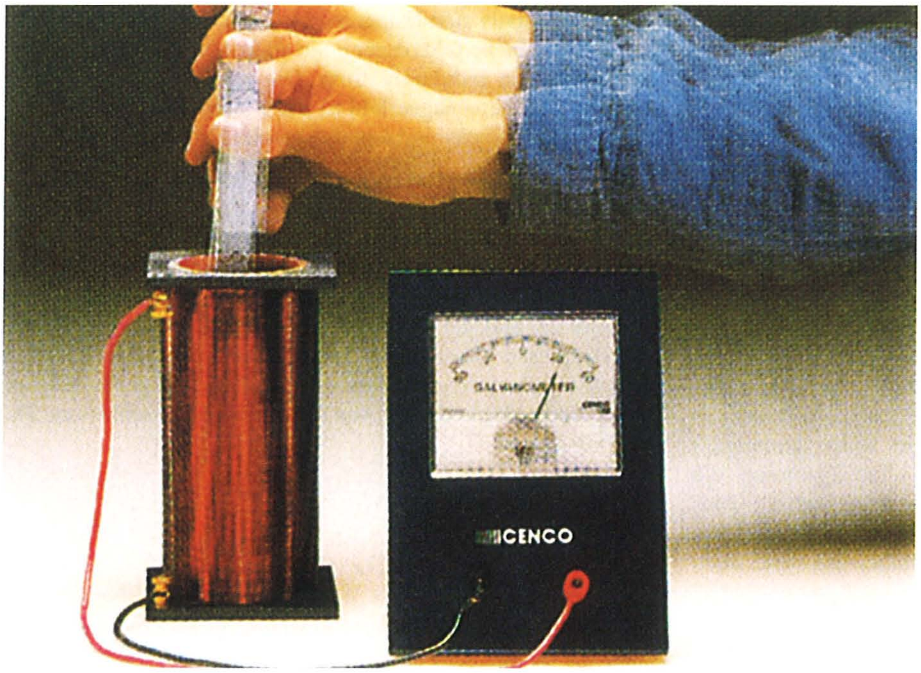
Die magnetische Induktion

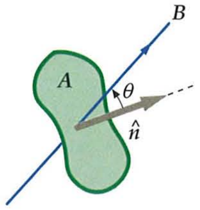
28



Die induzierte Spannung im Demonstrationsversuch: Bewegt man den Magneten in die Spule hinein oder aus ihr heraus, so wird in der Spule eine Spannung induziert – Sie erkennen dies am Ausschlag des Galvanometers. Wird der Magnet nicht bewegt, so schlägt das Messgerät nicht aus.

? Warum fließt ein Strom, wenn sich der Magnet bewegt? Die Antwort erfahren Sie in Abschnitt 28.2.

In den 30er Jahren des 19. Jahrhunderts entdeckten Michael Faraday in England und Joseph Henry in Amerika unabhängig voneinander, dass ein *zeitlich veränderliches* Magnetfeld einen Strom erzeugen kann, wenn sich der magnetische Fluss durch eine Fläche ändert, die von einer geschlossenen, *unbewegten* Leiterschleife begrenzt ist. Spannungen und Ströme, die von einem zeitlich veränderlichen Magnetfeld hervorgerufen



28.1 Bildet der Flächenvektor der von einer Leiterschleife umschlossenen Fläche den Winkel θ mit der Richtung des Magnetfelds $\boldsymbol{B}$, so ist der magnetische Fluss gegeben durch $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = |\boldsymbol{B}|\,|\boldsymbol{A}|\cos\theta$.

werden, bezeichnen wir als induzierte Spannungen und induzierte Ströme, der Vorgang selbst ist die **magnetische Induktion**. Faraday und Henry stellten weiterhin fest, dass auch in *statischen* Magnetfeldern ein Strom induziert wird, wenn sich der magnetische Fluss durch eine Fläche ändert, die von einer *bewegten* Leiterschleife umschlossen ist.

Beim Herausziehen eines Netzsteckers aus einer Steckdose beobachtet man manchmal einen kleinen Funken. Bevor der Stecker gezogen wird, erzeugt der im Kabel fließende Strom ein Magnetfeld, das den Leiter konzentrisch umgibt. Zieht man den Stecker nun heraus, so wird der Strom plötzlich unterbrochen; das Magnetfeld um den Leiter bricht zusammen (ändert sich also zeitlich) und induziert eine Spannung, die dem Zusammenbrechen des Stroms entgegenwirkt. Dies macht sich in Form des überspringenden Funkens bemerkbar. Wenn die Magnetfeldstärke auf null gefallen ist, wird auch keine Spannung mehr erzeugt.

Veränderliche Magnetfelder entstehen durch veränderliche Ströme oder durch die Bewegung von Magneten. Das am Anfang dieses Kapitels abgedruckte Foto zeigt einen einfachen Demonstrationsversuch zur Induktionsspannung, die von einem veränderlichen Magnetfeld hervorgerufen wird. Die Enden des Spulendrahts sind mit dem Galvanometer verbunden, und ein starker Magnet wird relativ zur Spule bewegt. Nur während der Bewegung wird, wie der Ausschlag des Galvanometers beweist, ein elektrischer Strom in dem aus Spule und Messgerät bestehenden Stromkreis induziert. Umgekehrt kann man auch die Spule relativ zum Magneten bewegen oder innerhalb eines statischen Magnetfelds drehen – in allen diesen Fällen beobachtet man einen Induktionsstrom. Die Rotation einer Spule in einem statischen Magnetfeld ist das Funktionsprinzip des Generators, der mechanische in elektrische Energie umwandelt.

➢ In diesem Kapitel werden wir die verschiedenen Formen der magnetischen Induktion kennen lernen. Sie alle lassen sich durch eine einfache Beziehung zusammenfassend beschreiben, das Faraday'sche Gesetz. Das Faraday'sche Gesetz stellt eine Beziehung her zwischen der Induktionsspannung in einem Stromkreis und der Änderungsrate des magnetischen Flusses durch diesen Stromkreis. Unter dem *magnetischen Fluss durch den Stromkreis* wollen wir dabei den Fluss des Magnetfelds durch eine beliebige, von diesem Kreis umschlossene Fläche verstehen.

28.1 Der magnetische Fluss

Den Fluss eines beliebigen Vektorfelds durch eine Fläche können wir analog zum elektrischen Fluss berechnen, den wir in Abschnitt 22.2 kennen gelernt haben. Es sei $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ ein Element der Fläche $\boldsymbol{A}$ und $\hat{\boldsymbol{n}}$ der Normalenvektor (Einheitsvektor in Richtung der Normalen) dieses Flächenelements, so dass $\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \mathrm{d}A\,\hat{\boldsymbol{n}}$ (Abbildung 28.1). Der Normalenvektor jedes Flächenelements kann natürlich in zwei verschiedene Richtungen zeigen; das Vorzeichen des Flusses hängt davon ab, welche der Richtungen man auswählt. Der magnetische Fluss Φ_{mag} durch $\boldsymbol{A}$ ist

$$\Phi_{\mathrm{mag}} = \int_A \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int_A B_{\mathrm{n}}\,\mathrm{d}A\,. \qquad (28.1)$$

MAGNETISCHER FLUSS

Die Einheit des magnetischen Flusses ist Feldstärke mal Fläche, also Tesla mal Quadratmeter oder **Weber** (Wb):

$$1\ \mathrm{Wb} = 1\ \mathrm{T} \cdot \mathrm{m}^2\,. \qquad (28.2)$$

Die Stärke des Magnetfelds $\boldsymbol{B}$ ist proportional zur Anzahl der Feldlinien pro Flächeneinheit, daher ist der magnetische Fluss durch ein Flächenelement proportional zur Anzahl der Feldlinien, die dieses durchsetzen.

ÜBUNG: Zeigen Sie, dass ein Weber pro Sekunde gleich ein Volt ist.

BEISPIEL 28.1: Magnetischer Fluss durch eine Spule

Gegeben ist eine 40 cm lange Zylinderspule mit 600 Windungen und einem Radius von 2,5 cm. Berechnen Sie den magnetischen Fluss, wenn durch die Spule ein Strom von 7,5 A fließt.

Problembeschreibung: Das Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ im Inneren der Spule ist homogen und parallel zur Längsachse der Spule gerichtet; folglich steht es senkrecht auf den Ebenen der einzelnen Windungen. Wir müssen deshalb B innerhalb der Spule berechnen und anschließend mit nA multiplizieren.

Lösung:

1. Der magnetische Fluss ist gegeben als Produkt aus der Windungszahl, der Stärke des Magnetfelds und der von einer Windung umschlossenen Fläche:

$$\Phi_{\text{mag}} = n\,B\,A$$

2. Die Magnetfeldstärke im Inneren der Spule ist $B = \mu_0\,(n/\ell)\,I$ mit n/ℓ als Anzahl der Windungen pro Längeneinheit (Windungsdichte):

$$\Phi_{\text{mag}} = n\,\mu_0\,\frac{n}{\ell}\,I\,A = \frac{\mu_0\,n^2\,I\,A}{\ell}$$

3. Der Flächeninhalt A ergibt sich aus dem Radius der Spule:

$$A = \pi\,r^2$$

4. Nun setzen Sie alle gegebenen Werte ein und rechnen den magnetischen Fluss aus (Wd. ist die Abkürzung für Windungen):

$$\Phi_{\text{mag}} = \frac{\mu_0\,n^2\,I\,\pi\,r^2}{\ell} = \frac{(4\pi\cdot 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})\cdot(600\ \text{Wd.})^2\cdot(7{,}5\ \text{A})\cdot\pi\cdot(0{,}025\ \text{m})^2}{0{,}40\ \text{m}} = \boxed{1{,}66\cdot 10^{-2}\ \text{Wb}}$$

Kommentar: Φ_{mag} ist proportional zu n^2, weil $\Phi_{\text{mag}} = n\,B\,A$ und B proportional zur Windungszahl n ist.

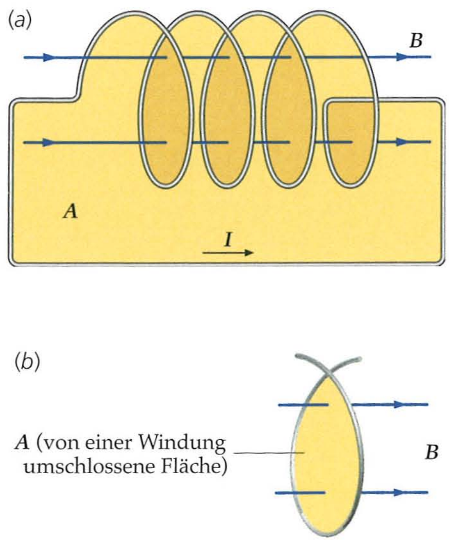
Handelt es sich um eine ebene Fläche mit dem Flächeninhalt A und ist das Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ über der gesamten Fläche homogen (sind Betrag und Richtung konstant), so ist der magnetische Fluss durch die Fläche gleich

$$\Phi_{\text{mag}} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{B}|\,|\boldsymbol{A}|\cos\theta = B_{\text{n}}\,A\,.$$

Dabei ist θ der Winkel zwischen der Richtung von $\boldsymbol{B}$ und der positiven Richtung des Flächenvektors. In Beispiel 28.1 betrachten wir den magnetischen Fluss durch eine Fläche, die von einer Spule mit mehreren Windungen umschlossen wird. Ist n die Anzahl der Windungen*, so ist der Fluss durch die Fläche gleich dem n-fachen des Flusses durch jede einzelne Windung (Abbildung 28.2):

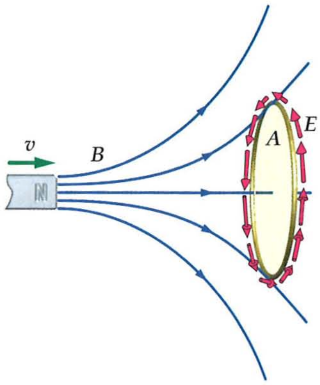
$$\Phi_{\text{mag}} = n\,|\boldsymbol{B}|\,|\boldsymbol{A}|\cos\theta \tag{28.3}$$

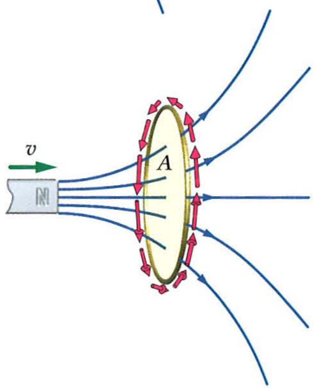
mit $\boldsymbol{A}$ als der von einer Windung umschlossenen ebenen Fläche. Beachten Sie dabei Folgendes: Nur eine geschlossene Kurve kann eine Fläche tatsächlich begrenzen. Eine einzelne Windung einer Spule ist natürlich nicht in sich geschlossen. Liegen die Windungen aber hinreichend eng beieinander, so bilden sie nahezu geschlossene Kreise und $\boldsymbol{A}$ ist dann die ebene Fläche, die von einem solchen Kreis (nahezu) begrenzt wird.



28.2 a) Der Fluss durch eine Fläche $\boldsymbol{A}$, die von einer Spule mit n Windungen umschlossen wird, ist proportional zur Anzahl der Feldlinien, die die Fläche durchdringen. Gezeigt ist eine Spule mit vier Windungen. Jede der beiden eingezeichneten Feldlinien durchdringt die Fläche viermal (einmal in jeder Windung), weshalb der Fluss durch $\boldsymbol{A}$ viermal so groß ist wie der Fluss durch die von einer einzelnen Windung „umschlossene" Fläche. b) Die ebene Fläche $\boldsymbol{A}$, die von einer einzelnen Windung (nahezu) umschlossen wird.

* Die Anzahl der Windungen n unterscheidet sich vom Normalenvektor $\hat{\boldsymbol{n}}$, dessen Betrag $|\hat{\boldsymbol{n}}| = 1$ ist. (Anm. d. Hrsg.)





28.3 Ändert sich der magnetische Fluss durch die ruhende Leiterschleife, so wird in der Schleife eine Spannung induziert, die über den gesamten Kreis verteilt ist. Der Urheber der Induktionsspannung ist ein nichtkonservatives, tangential zur Schleife gerichtetes elektrisches Feld $\boldsymbol{E}$.

28.2 Induktionsspannung und Faraday'sches Gesetz

Experimente von Faraday, Henry und anderen zeigten, dass jede Änderung des magnetischen Flusses durch die von einer Leiterschleife umschlossene Fläche eine Spannung in der Schleife induziert, deren Stärke proportional zur Änderungsrate des Flusses ist. In der Regel erkennen wir die Spannung, indem wir den hervorgerufenen Strom messen. Die Spannung ist aber auch vorhanden, wenn gar kein Strom fließen kann, etwa weil der Stromkreis nicht geschlossen ist oder gar nicht existiert. Bisher haben wir Spannungen betrachtet, die in bestimmten Teilen eines Stromkreises bestehen, beispielsweise zwischen den Anschlüssen einer Batterie. Die Induktionsspannung hingegen muss man sich über den ganzen Stromkreis verteilt vorstellen.

Dass sich der magnetische Fluss durch eine von einer Leiterschleife umschlossene Fläche ändert, kann verschiedene Ursachen haben: Der Strom, der das Magnetfeld hervorruft, kann sich ändern; Permanentmagneten können relativ zur Fläche bewegt werden; die Leiterschleife kann in einem Gebiet mit konstantem Magnetfeld gedreht oder in ein Gebiet mit inhomogenem Magnetfeld verschoben werden; die Orientierung der Schleife kann sich ändern, oder der Inhalt der umschlossenen Fläche kann in einem Gebiet mit homogenem, konstantem Magnetfeld größer oder kleiner werden. In jedem Fall ist die Induktionsspannung U_{ind} gleich der Änderungsrate des magnetischen Flusses durch die Schleife (d.h. eine von dieser umschlossene Fläche):

$$U_{\text{ind}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\text{mag}}}{\mathrm{d}t}\,. \tag{28.4}$$

FARADAY'SCHES GESETZ

Diese Beziehung heißt **Faraday'sches Gesetz**. Das Minuszeichen im Faraday'schen Gesetz hängt, wie wir noch genauer besprechen werden, mit der Richtung der Induktionsspannung zusammen.

Abbildung 28.3 zeigt eine einzelne unbewegte Leiterschleife in einem Magnetfeld. Der Fluss durch die Schleife ändert sich, weil das Magnetfeld allmählich stärker wird, und in der Schleife wird eine Spannung induziert. Die Spannung ist definiert als Arbeit pro Ladungseinheit; auf die bewegten Ladungsträger muss also eine Kraft wirken, die Arbeit an ihnen verrichtet. Wie wir wissen, kann die magnetische Kraft keine Arbeit verrichten, sie kann also auch nicht für die Induktionsspannung verantwortlich sein. Die Arbeit wird hier von der elektrischen Kraft eines nichtkonservativen elektrischen Felds $\boldsymbol{E}$ geleistet. Das Linienintegral über dieses Feld längs eines geschlossenen Wegs ist gleich der pro Ladungseinheit verrichteten Arbeit, also gleich der Induktionsspannung.

Bisher haben wir elektrische Felder kennen gelernt, die von ruhenden elektrischen Ladungen erzeugt wurden. Solche Felder nennt man konservativ: Ihr Umlaufintegral längs einer beliebigen geschlossenen Kurve ist null. (Das Umlaufintegral eines Vektorfelds $\boldsymbol{A}$ bezüglich einer geschlossenen Kurve C ist definiert als $\oint_C \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$; siehe Abschnitt 27.4). Ein zeitlich veränderliches Magnetfeld erzeugt hingegen ein nichtkonservatives elektrisches Feld. Sein Umlaufintegral längs C ist nicht null, sondern gleich einer Induktionsspannung, die wiederum gleich ist der

BEISPIEL 28.2: Induktionsspannung in einer kreisrunden Spule I

Die Längsachse einer kreisrunden Spule mit 400 Windungen und einem Radius von 4 cm schließt einen Winkel von 30° mit der Richtung eines homogenen äußeren Magnetfelds ein. Die Stärke des Magnetfelds nimmt pro Sekunde um 85 T zu, ohne dass sich die Richtung des Felds ändert. Wie groß ist die in der Spule induzierte Spannung?

Problembeschreibung: Die Induktionsspannung ergibt sich als Produkt aus der Windungszahl n und der Änderungsrate des magnetischen Flusses durch eine einzelne Windung. Da es sich um ein homogenes Magnetfeld handelt, ist der Fluss durch eine Windung gegeben als $\Phi_{\mathrm{mag}} = |\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|\cos\theta$ mit $|\boldsymbol{A}| = \pi r^2$ als der von einer Windung umschlossenen Fläche.

Lösung:

1. Die Induktionsspannung folgt aus dem Faraday'schen Gesetz:

$$U_{\mathrm{ind}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{mag}}}{\mathrm{d}t}$$

2. In einem homogenen Magnetfeld gilt für den Fluss:

$$\Phi_{\mathrm{mag}} = n\,\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} = n\,|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|\cos\theta$$

3. Setzen Sie diese Beziehung für Φ_{mag} ein und berechnen Sie U_{ind}:

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{ind}} &= -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{mag}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(n\,|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|\cos\theta) \\ &= -n\pi r^2\cos\theta\,\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{B}|}{\mathrm{d}t} \\ &= -(300)\cdot\pi\cdot(0{,}04\ \mathrm{m})^2\cos 30°\cdot(85\ \mathrm{T/s}) \\ &= -111\ \mathrm{V} \end{aligned}$$

$$|U_{\mathrm{ind}}| = \boxed{111\ \mathrm{V}}$$

ÜBUNG: Wie groß ist der Induktionsstrom, wenn die Spule einen Widerstand von 200 Ω besitzt? (*Lösung:* 0,555 A.)

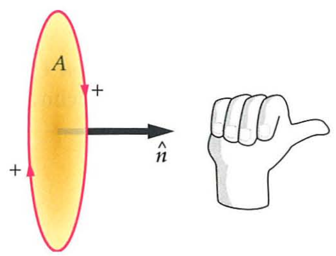
negativen Änderungsrate des magnetischen Flusses durch eine beliebige, von C umschlossene Fläche:

$$U_{\mathrm{ind}} = \oint_C \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = -\frac{\mathrm{d}\phi_{\mathrm{mag}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_A \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}\,. \qquad (28.5)$$

INDUKTIONSSPANNUNG IN EINER RUHENDEN LEITERSCHLEIFE BEI VERÄNDERLICHEM MAGNETFELD

In den Beispielen 28.2 bis 28.4 wird die Indukionsspannung in einer Spule bzw. bei einem nichtkonservativen elektrischen Feld betrachtet.

Mit Hilfe der folgenden Vorzeichenvereinbarung können wir Gleichung 28.5 sowohl die Richtung des induzierten elektrischen Felds als auch die Induktionsspannung entnehmen: Die positive Richtung tangential zum Integrationsweg C ist mit der Richtung des Normalenvektors $\hat{\boldsymbol{n}}$ der von C umschlossenen Fläche $\boldsymbol{A}$ durch eine Rechte-Hand-Regel verknüpft (Abbildung 28.4). Zeigt Ihr Daumen in die Richtung von $\hat{\boldsymbol{n}}$, so biegt sich die Handfläche tangential zu C in positiver Richtung. Ist $\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{mag}}/\mathrm{d}t$ positiv, dann zeigt (übereinstimmend mit dem Faraday'schen Gesetz, Gleichung 28.5) $\boldsymbol{E}$ tangential zu C in negativer Richtung. (Die Richtung von $\boldsymbol{E}$ lässt sich auch anhand der Lenz'schen Regel ermitteln, der wir uns in Abschnitt 28.3 zuwenden.)



28.4 Der Daumen der rechten Hand zeigt in Richtung des Normalenvektors $\hat{\boldsymbol{n}}$ der Fläche $\boldsymbol{A}$; dann krümmt sich die Handfläche tangential zu C in positiver Richtung.

BEISPIEL 28.3: Induktionsspannung in einer kreisrunden Spule II

Eine Spule mit 80 Windungen, einem Radius von 5 cm und einem Widerstand von 30 Ω befindet sich in einem homogenen Magnetfeld, dessen Richtung senkrecht zur Ebene der Spulenwindungen steht. Wie schnell muss sich die Magnetfeldstärke ändern, damit in der Spule ein Strom von 4 A induziert wird?

ZUR ÜBUNG

Problembeschreibung: Die Änderungsrate des Magnetfelds hängt mit der Änderungsrate des magnetischen Flusses zusammen; diese wiederum ist über das Faraday'sche Gesetz mit der induzierten Spannung verknüpft. Die Spannung in der Spule ist gleich IR.

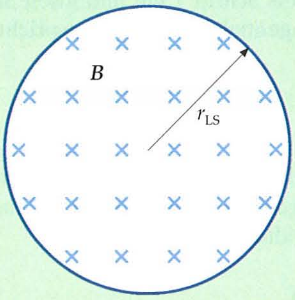
Lösung:

Decken Sie zunächst die rechte Spalte ab und versuchen Sie jeweils, die Ergebnisse selbst zu ermitteln.

Schritte	Ergebnisse
1. Formulieren Sie den magnetischen Fluss als Funktion von B, n und dem Radius r; lösen Sie nach B auf.	$\Phi_{\mathrm{mag}} = n\,B\,A = n\,B\,\pi\,r^2$ $B = \dfrac{\Phi_{\mathrm{mag}}}{n\,\pi\,r^2}$
2. Leiten Sie B nach der Zeit ab.	$\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{n\,\pi\,r^2}\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{mag}}}{\mathrm{d}t}$
3. Den Zusammenhang zwischen der Änderungsrate des Flusses und der induzierten Spannung gibt das Faraday'sche Gesetz an.	$U_{\mathrm{ind}} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{mag}}}{\mathrm{d}t}$
4. Berechnen Sie den Betrag der Spannung in der Spule aus den gegebenen Werten für Stromstärke und Widerstand.	$\lvert U_{\mathrm{ind}}\rvert = I\,R = 120\ \mathrm{V}$
5. Setzen Sie nun die Zahlenwerte von U_{ind}, n und r in die Beziehung aus Schritt 2 ein und berechnen Sie $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$.	$\dfrac{\lvert \mathrm{d}\boldsymbol{B}\rvert}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{n\,\pi\,r^2}\lvert U_{\mathrm{ind}}\rvert = \boxed{191\ \mathrm{T/s}}$

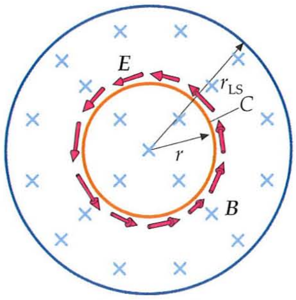
BEISPIEL 28.4: Ein nichtkonservatives induziertes elektrisches Feld

Ein homogenes Magnetfeld $\boldsymbol{B}$, dessen Richtung senkrecht zur Papierebene steht, sei auf ein Gebiet über einer Kreisfläche mit dem Radius r_{LS} beschränkt; außerhalb dieses Gebiets sei das Feld null (Abbildung 28.5). Die Richtung von $\boldsymbol{B}$ sei konstant, seine Stärke ändere sich mit der Rate $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$. Geben Sie Betrag und Richtung des elektrischen Felds an, das in der Papierebene induziert wird, a) in einem Abstand $r < r_{\text{LS}}$ vom Mittelpunkt des Kreises und b) in einem Abstand $r > r_{\text{LS}}$ vom Mittelpunkt (dort ist $B = 0$).



28.5

Problembeschreibung: Das Magnetfeld zeigt in die Papierebene hinein und ist über einem kreisförmigen Gebiet mit dem Radius r_{LS} homogen, wie Abbildung 28.6 zeigt. Nimmt B zu oder ab, so ändert sich auch der magnetische Fluss durch die von der geschlossenen Kurve C begrenzte Fläche; entlang C wird eine Spannung $U_{\text{ind}} = \oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ induziert. Das induzierte elektrische Feld finden wir durch Anwendung von Gleichung 28.5, $\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = -\mathrm{d}\Phi_{\text{mag}}/\mathrm{d}t$. Um uns die Symmetrie der Anordnung zunutze zu machen, wählen wir als Integrationsweg C einen Kreis mit dem Radius r und führen die Integration aus. Aus Symmetriegründen zeigt $\boldsymbol{E}$ in Richtung der Tangente an C, und sein Betrag ist entlang der Kreislinie konstant. Wir vereinbaren, dass $\boldsymbol{A}$ in die Papierebene hineinzeigt. Dann besagt die Vorzeichenkonvention, dass die positive tangentiale Richtung dem Uhrzeigersinn entspricht. Nun berechnen wir den magnetischen Fluss Φ_{mag}, leiten ihn nach der Zeit ab und lösen nach der tangentialen Komponente des elektrischen Felds, E_t, auf.



ΔB in Papierebene hinein

28.6

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Den Zusammenhang zwischen elektrischem und magnetischem Feld gibt Gleichung 28.5 an:

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\text{mag}}}{\mathrm{d}t}$$

mit

$$\Phi_{\text{mag}} = \int_A \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

2. E_t, die tangentiale Komponente von $\boldsymbol{E}$, ergibt sich aus dem Linienintegral für einen Kreis mit dem Radius $r < r_{\text{LS}}$. $\boldsymbol{E}$ zeigt tangential zum Kreis, sein Betrag ist konstant:

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \oint_C E_t\, \mathrm{d}\ell = E_t \oint_C d\ell = E_t\, 2\pi r$$

3. Für $r < r_{\text{LS}}$ ist $\boldsymbol{B}$ über der vom Kreis C umschlossenen ebenen Fläche $\boldsymbol{A}$ homogen. Wir vereinbaren, dass $\boldsymbol{A}$ in die Papierebene hineinzeigt. Da dies auch für $\boldsymbol{B}$ gilt, ist der Fluss durch $\boldsymbol{A}$ einfach BA:

$$\Phi_{\text{mag}} = \int_A \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int_A B\, \mathrm{d}A = B \int_A \mathrm{d}A = B A = B \pi r^2$$

4. Nun leiten Sie Φ_{mag} nach der Zeit ab:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_{\text{mag}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(B \pi r^2\right) = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \pi r^2$$

5. Setzen Sie jetzt die Ergebnisse aus den Schritten 2 und 4 in die Beziehung aus Schritt 1 ein und lösen Sie nach E_t auf. Die positive tangentiale Richtung entspricht dem Uhrzeigersinn.

$$E_t\, 2\pi r = -\frac{dB}{dt}\,\pi r^2$$

also

$$E_t = \boxed{-\frac{r}{2}\frac{dB}{dt} \quad \text{für } r < r_{LS}}$$

6. Unserer Wahl der Richtung von $\boldsymbol{A}$ (Schritt 3) gemäß ist die positive tangentiale Richtung gleich dem Uhrzeigersinn, weshalb wir erhalten:

E_t ist negativ, also ist $\boldsymbol{E}$ $\boxed{\text{entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn}}$ gerichtet.

Teilaufgabe b

1. Für einen Kreis mit dem Radius $r > r_{LS}$ (das Gebiet, in dem das Magnetfeld null ist) erhalten wir das gleiche Linienintegral wie in Schritt 2 von Teilaufgabe a:

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = E_t\, 2\pi r$$

2. Da für $r > r_{LS}$ gilt $B=0$, ist der magnetische Fluss durch A gleich $B\pi r_{LS}^2$:

$$\Phi_{mag} = B\pi r_{LS}^2$$

3. E_t berechnen Sie nun mit Hilfe des Faraday'schen Gesetzes:

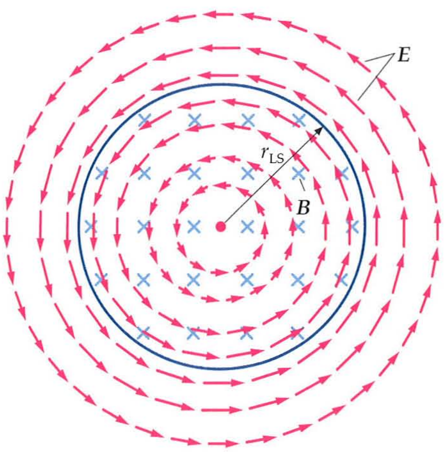
$$E_t\, 2\pi r = -\frac{dB}{dt}\,\pi r_{LS}^2$$

$$E_t = -\frac{r_{LS}^2}{2r}\frac{dB}{dt} \quad \text{für } r > r_{LS}$$

E_t ist negativ, also ist $\boldsymbol{E}$

$\boxed{\text{entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn}}$ gerichtet.

Kommentar: Die positive tangentiale Richtung entspricht dem Uhrzeigersinn. Ist $d\Phi_{mag}/dt$ positiv, so ist E_t negativ und das elektrische Feld ist entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn gerichtet (Abbildung 28.7). Beachten Sie, dass das elektrische Feld in diesem Fall nicht von bewegten Ladungen, sondern von einem veränderlichen Magnetfeld erzeugt wird. Denken Sie auch daran, dass $\boldsymbol{E}$ (und folglich die Induktionsspannung) entlang jeder geschlossenen Kurve existiert, die die Fläche begrenzt, durch die sich der Fluss ändert – gleichgültig, ob diese Kurve aus einem Draht bzw. Stromkreis besteht oder nicht.



28.7 Das Magnetfeld zeigt in die Papierebene hinein; seine Stärke nimmt zu. Das induzierte elektrische Feld ist dann entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn gerichtet.

28.3 Die Lenz'sche Regel

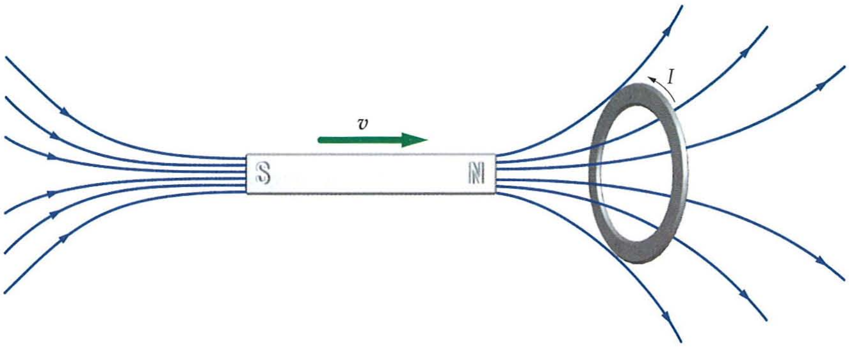
Das negative Vorzeichen im Faraday'schen Gesetz ergibt sich aus der Richtung der Induktionsspannung. Dies folgt aus der im vorangegangenen Abschnitt erläuterten Vorzeichenvereinbarung und auch aus einem allgemeinen physikalischen Prinzip, der **Lenz'schen Regel:**

> Die von einer Zustandsänderung verursachte Induktionsspannung ist stets so gerichtet, dass sie ihrer Ursache entgegenzuwirken sucht.

LENZ'SCHE REGEL

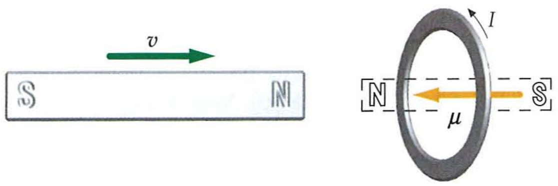
Wie Sie feststellen werden, ist die Lenz'sche Regel sehr allgemein formuliert; sie gibt nicht an, welcher Art die Zustandsänderung ist, die die Induktionspannung (und damit den Induktionsstrom) hervorruft. Auf diese Weise erfasst die Regel eine Reihe verschiedener Situationen, die wir im Folgenden besprechen wollen.

In Abbildung 28.8 sehen Sie einen Stabmagneten, der sich auf einen leitenden Ring mit dem Widerstand R zu bewegt. Durch die Bewegung des Magneten nach rechts wird im Ring eine Spannung induziert, und es fließt ein Strom. Die Lenz'sche Regel besagt, dass Induktionsspannung und -strom so gerichtet



28.8 Bewegt sich der Stabmagnet nach rechts auf den leitenden Ring zu, so wird im Ring eine Spannung induziert, und in der angegebenen Richtung fließt ein Strom. Dieser Strom erzeugt seinerseits ein Magnetfeld, das auf den Stabmagneten eine Kraft ausübt, die der Annäherung entgegenwirkt.

sein müssen, dass sie ihrer Ursache (der Verschiebung des Magneten) entgegenwirken. Der Induktionsstrom im Ring bewirkt selbst ein Magnetfeld, das auf den sich nähernden Magneten eine Kraft ausübt, die nach links gerichtet sein muss. Abbildung 28.9 zeigt das beim Herankommen des Stabmagneten im Ring induzierte magnetische Moment: Der Ring verhält sich wie ein kleiner Stabmagnet, dessen Nordpol nach links und dessen Südpol nach rechts weist. Gleichnamige Pole stoßen einander ab; folglich stößt das induzierte magnetische Moment des Rings den Stabmagneten ab, wirkt also dessen Annäherung entgegen. Der im Ring induzierte Strom fließt deshalb in der in Abbildung 28.9 angegebenen Richtung.



28.9 Das magnetische Moment μ (gestrichelt angedeutet in Form eines Stabmagneten) des Rings wird vom induzierten Strom hervorgerufen und wirkt der Bewegung des Stabmagneten entgegen: Der Stabmagnet nähert sich dem Ring, also stößt das induzierte magnetische Moment ihn ab.

Nehmen wir einmal an, die Richtung des Stroms in Abbildung 28.9 wäre der eingezeichneten Richtung genau entgegengesetzt. Die magnetische Kraft auf den ankommenden Stabmagneten wirkte dann nach rechts und der Magnet würde beschleunigt. Die Zunahme der Geschwindigkeit wiederum riefe eine Zunahme der induzierten Stromstärke hervor, wodurch die Kraft auf den Magneten erneut ansteigen würde – und so fort. Eine angenehme Vorstellung: Wenn wir einen Magneten in die Nähe einer Leiterschleife brächten, würde der Magnet von der Schleife immer schneller angezogen, ohne dass wir etwas dazu tun müssten. Sicher haben Sie es schon bemerkt: Dieses Szenario verletzt den Energieerhaltungssatz. Die Energie ist natürlich eine Erhaltungsgröße, weshalb die Aussage der Lenz'schen Regel mit der Realitiät im Einklang steht.

Häufig verwendet wird eine alternative Formulierung der Lenz'schen Regel, die sich auf den magnetischen Fluss bezieht:

> Ändert sich der magnetische Fluss durch eine Fläche, so wird ein Strom induziert, der seinerseits ein Magnetfeld und damit einen magnetischen Fluss durch dieselbe Fläche hervorruft, der seiner Ursache entgegengesetzt gerichtet ist.

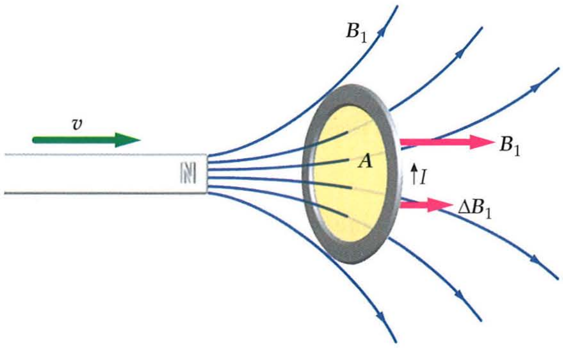
LENZ'SCHE REGEL IN ALTERNATIVER FORMULIERUNG

Die Anwendung dieser alternativen Formulierung wird in Beispiel 28.5 demonstriert.

BEISPIEL 28.5: Lenz'sche Regel und Induktionsstrom

Ermitteln Sie die Richtung des Induktionsstroms in dem in Abbildung 28.8 gezeigten Ring unter Zuhilfenahme der alternativen Formulierung der Lenz'schen Regel.

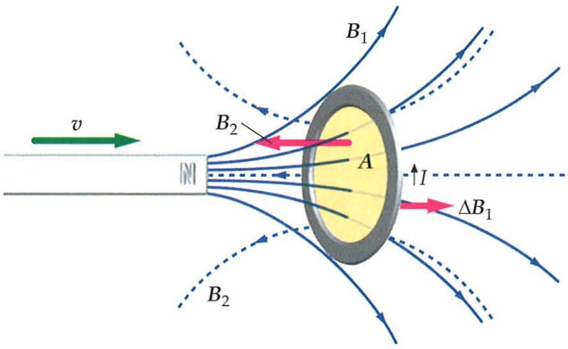
Problembeschreibung: Stellen Sie mit Hilfe der alternativen Formulierung der Lenz'schen Regel zunächst die Richtung des Magnetfelds fest, das der im Ring induzierte Strom hervorruft. Die Richtung des Stroms erhalten Sie dann durch Anwendung der Rechte-Hand-Regel.



Lösung:

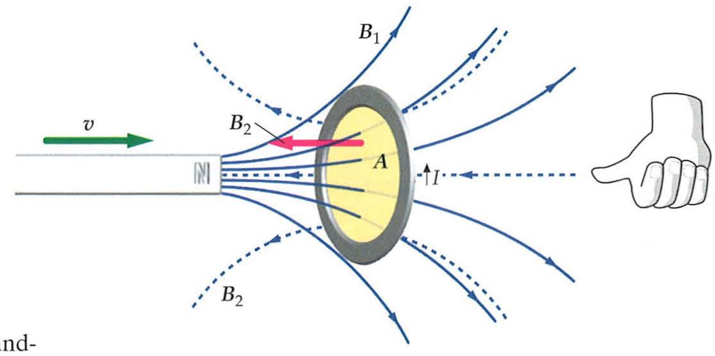
1. Skizzieren Sie die Leiterschleife mit der umschlossenen ebenen Fläche $\boldsymbol{A}$ (Abbildung 28.10). Von $\boldsymbol{A}$ ausgehend zeichnen Sie den Vektor $\Delta\boldsymbol{B}_1$ ein, der die Änderung des Magnetfelds $\boldsymbol{B}_1$ des sich nähernden Stabmagneten angibt.

28.10



2. Zeichnen Sie nun den Vektor $\boldsymbol{B}_2$ für das Magnetfeld des im Ring induzierten Stroms ein (Abbildung 28.11). Die Richtung von $\boldsymbol{B}_2$ erhalten Sie aus der alternativen Formulierung der Lenz'schen Regel.

28.11



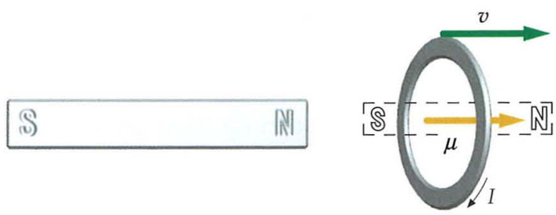
3. Aus der Richtung von $\boldsymbol{B}_2$ folgt mit Hilfe der Rechte-Hand-Regel die Richtung des im Ring induzierten Stroms.

28.12

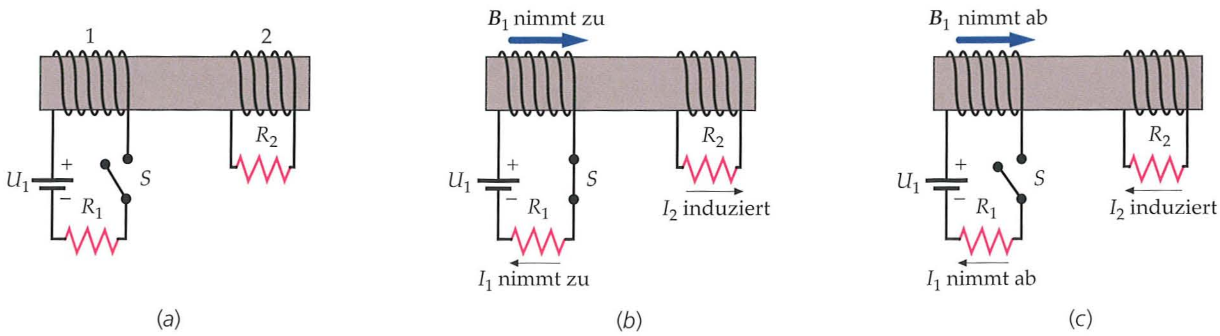
ÜBUNG: Ermitteln Sie die Richtung des Induktionsstroms in dem in Abbildung 28.8 gezeigten Ring unter Zuhilfenahme der alternativen Formulierung der Lenz'schen Regel, wenn sich der Magnet nach links (vom Ring weg) bewegt. (*Lösung:* Entgegengesetzt zu der in Abbildung 28.12 gezeigten Richtung.)

Abbildung 28.13 zeigt einen ruhenden Stabmagneten, von dem sich der leitende Ring weg bewegt. Die Richtungen des induzierten Stroms und des entstehenden magnetischen Moments sind in der Skizze angegeben. In diesem Fall zieht der Stabmagnet den Ring an und wirkt so wieder der Bewegung des Rings entgegen, wie es die Lenz'sche Regel verlangt.

In Abbildung 28.14 sehen Sie zwei induktiv gekoppelte Stromkreise: Eine Änderung des Stroms in Stromkreis 1 bewirkt eine Änderung des magnetischen Flusses in Stromkreis 2. Nehmen wir an, der Schalter S ist zu Beginn des Versuchs geöffnet, so dass in Kreis 1 kein Strom fließt (Abbildung 28.14a). Wird der Schalter geschlossen (Abbildung 28.14b), so vergeht eine



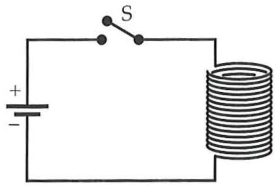
28.13 Bewegt sich der Ring vom (ruhenden) Stabmagneten weg, so erzeugt der induzierte Strom ein magnetisches Moment, das eine Anziehung zwischen Ring und Magnet bewirkt und so wieder der Relativbewegung entgegenwirkt.



28.14 a) Zwei induktiv gekoppelte Stromkreise. b) Wird der Schalter geschlossen, so nimmt I_1 in der gezeigten Richtung zu. Der veränderliche magnetische Fluss durch die Spule von Kreis 2 induziert dort einen Strom I_2. Dieser Strom erzeugt ein Magnetfeld, das dem induzierenden Fluss infolge von I_1 entgegenwirkt. c) Wird der Schalter geöffnet, so fällt I_1 ab und wieder ändert sich der Fluss durch Kreis 2. Der induzierte Strom I_2 versucht, dem entgegenzuwirken, also den Fluss durch Kreis 2 aufrechtzuerhalten.

bestimmte Zeit, bis der Strom in Kreis 1 von null ausgehend seinen Gleichgewichtswert U_1/R_1 erreicht hat. Während die Stromstärke ansteigt, ändert sich aber auch der magnetische Fluss durch die Spule in Kreis 2, wodurch hier in der gezeigten Richtung ein Strom induziert wird. Hat der Strom in Kreis 1 seinen Gleichgewichtswert erreicht, so ändert sich der magnetische Fluss durch die Spule in Kreis 2 nicht mehr; es wird also kein Strom mehr induziert. Wenn man den Schalter wieder öffnet, so fällt der Strom in Kreis 1 auf null ab; währenddessen wird in Kreis 2 erneut ein Strom induziert, diesmal jedoch in Gegenrichtung (Abbildung 28.14c). Machen Sie sich bewusst, dass nur ein *veränderlicher magnetischer Fluss* zur Induktion einer Spannung führt. Diese Spannung hängt nicht von der Größe des Flusses ab, sondern nur von der Geschwindigkeit seiner Änderung. Durch einen großen, aber konstanten Fluss wird keine Spannung induziert.

Im nächsten Beispiel betrachten wir den in Abbildung 28.15 gezeigten Stromkreis. Fließt ein Strom, so entsteht in der Spule ein magnetischer Fluss; ändert sich der Strom, so ändert sich auch der Fluss und es wird eine Spannung induziert, die ihrer Ursache (der Stromänderung) entgegenwirkt. Diesen Vorgang nennt man **Selbstinduktion**. Die Selbstinduktion ist dafür verantwortlich, dass der Strom in einem Stromkreis nicht sprunghaft, also innerhalb unendlich kurzer Zeit, von null auf einen bestimmten Wert ansteigen (bzw. von einem bestimmten Wert auf null abfallen) kann. Joseph Henry beobachtete diesen Effekt erstmals beim Experimentieren mit einer Schaltung wie der in Abbildung 28.15 gezeigten, wobei die Spule sehr viele Windungen aufwies. In solchen Anordnungen bewirken bereits schwache Ströme einen beträchtlichen magnetischen Fluss.



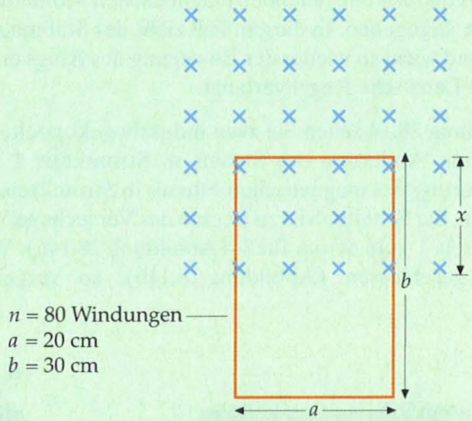
28.15 Eine Spule mit vielen Windungen erzeugt bei gegebenem Spulenstrom einen großen magnetischen Fluss. Ändert sich der Strom, so wird in der Spule eine große Spannung induziert, die der Flussänderung entgegenzuwirken sucht.

Beim Öffnen des Kreises fiel Henry auf, dass am Schalter ein Funken übersprang. Die Ursache ist eine durch die schnelle Änderung des Flusses induzierte Spannung, die ihrer Ursache entgegenwirkt (in diesem Fall also den Stromfluss aufrechtzuerhalten sucht). So kommt eine beträchtliche Potenzialdifferenz über dem Schalter zustande; das elektrische Feld zwischen den Kontakten ist stark genug, um die Moleküle der umgebenden Luft zu ionisieren, also leitfähig zu machen, und damit einen Funkenüberschlag (einen Durchschlag) auszulösen.

Einen Fall, in dem die Flussänderung durch die Bewegung der Induktionsspule zustande kommt, illustriert Beispiel 28.6, bevor im nächsten Abschnitt das Thema Induktion durch Bewegung allgemein behandelt wird.

BEISPIEL 28.6: Anwendung der Lenz'schen Regel bei einer bewegten Spule

Gegeben ist eine rechteckige Spule mit n Windungen sowie den Seitenlängen a und b; es sei $n=80$, $a=20$ cm und $b=30$ cm. Die Spule befindet sich zur Hälfte (Abbildung 28.16) in einem Magnetfeld mit einer Stärke von 0,8 T, das in die Papierebene hineinzeigt. Der Widerstand der Spule ist 30 Ω. Berechnen Sie Betrag und Richtung des induzierten Stroms, wenn sich die Spule mit einer Geschwindigkeit von 2 m/s a) nach rechts, b) nach oben und c) nach unten bewegt.



28.16

Problembeschreibung: Der Induktionsstrom ist gleich dem Quotienten aus der induzierten Spannung und dem Widerstand der Spule. Um die Induktionsspannung bei der Bewegung der Spule zu berechnen, müssen wir ermitteln, wie schnell sich der Fluss durch die Spule ändert. Der Fluss ist proportional zum Abstand x. Aus der Lenz'schen Regel ergibt sich schließlich die Richtung des induzierten Stroms.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Der induzierte Strom ist gleich der Spannung, geteilt durch den Widerstand:

$$I = \frac{U_{\text{ind}}}{R}$$

2. Der Zusammenhang zwischen induzierter Spannung und magnetischem Fluss ist durch das Faraday'sche Gesetz gegeben:

$$U_{\text{ind}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\text{mag}}}{\mathrm{d}t}$$

3. Der magnetische Fluss durch die Spule ist n-mal so groß wie der Fluss durch jede einzelne Windung. Wir vereinbaren, dass $\boldsymbol{A}$ in die Papierebene hinein zeigt. Der Fluss durch die von einer Windung umschlossene Fläche A ist gleich $B\,a\,x$:

$$\Phi_{\text{mag}} = n\,\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} = n\,B\,a\,x$$

4. Bewegt sich die Spule nach rechts (oder links), so ändert sich der Fluss nicht (vorausgesetzt, dass die Spule das Magnetfeld selbst nicht verlässt). Folglich wird kein Strom induziert:

$$U_{\text{ind}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\text{mag}}}{\mathrm{d}t} = 0$$

also

$$I = \boxed{0}$$

Teilaufgabe b

1. Berechnen Sie, wie schnell sich der Fluss ändert, wenn die Spule nach oben bewegt wird. In diesem Fall wird x größer, also ist $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ positiv:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_{\text{mag}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(n\,B\,A\,x) = n\,B\,a\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

2. Berechnen Sie nun die Stromstärke:

$$|I| = \frac{|U|}{R} = \frac{n\,B\,a(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)}{R}$$
$$= \frac{(80)\cdot(0{,}8\text{ T})\cdot(0{,}20\text{ m})\cdot(2\text{ m/s})}{30\ \Omega}$$
$$= 0{,}853\text{ A}$$

3. Wenn sich die Spule nach oben bewegt, so nimmt der magnetische Fluss durch $\boldsymbol{A}$ zu. Der induzierte Strom muss ein Magnetfeld erzeugen, dessen Fluss durch $\boldsymbol{A}$ abnimmt, wenn x größer wird. Das Skalarprodukt eines solchen Magnetfelds mit $\boldsymbol{A}$ muss negativ sein; das Magnetfeld zeigt folglich aus der Papierebene heraus und wird von einem Strom erzeugt, der entgegengesetzt der Uhrzeigerrichtung fließt:

$I = \boxed{0{,}853\ \mathrm{A,\ entgegengesetzt\ der\ Uhrzeigerrichtung}}$

Teilaufgabe c

Wenn sich die Spule nach unten bewegt, so nimmt der magnetische Fluss durch A ab. Der induzierte Strom muss ein Magnetfeld erzeugen, dessen Fluss durch A zunimmt, wenn x kleiner wird. Das Skalarprodukt eines solchen Magnetfelds mit $\boldsymbol{A}$ muss positiv sein; das Magnetfeld zeigt folglich in die Papierebene hinein und wird von einem Strom erzeugt, der in Uhrzeigerrichtung fließt:

$I = \boxed{0{,}853\ \mathrm{A,\ in\ Uhrzeigerrichtung}}$

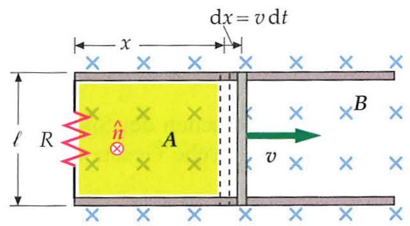
28.4 Induktion durch Bewegung

Wird ein Leiter in einem Magnetfeld bewegt, so wird eine Spannung induziert.

Durch die Bewegung eines Leiters in einem Magnetfeld wird eine Spannung induziert.

INDUKTIONSSPANNUNG DURCH BEWEGUNG

Anwendungen dazu sind die bewegte Spule aus Beispiel 28.6 sowie die Flipspule in Beispiel 28.7 oder auch ein gleitender Leiter wie in Abbildung 28.17.



28.17 Ein elektrisch leitender Stab gleitet, umgeben von einem Magnetfeld, auf leitenden Schienen. Bewegt sich der Stab nach rechts, so nimmt der Flächeninhalt von A und folglich der magnetische Fluss durch A (in die Papierebene hinein) zu. Im Stromkreis wird eine Spannung $B\ell v$ induziert, und es fließt ein Strom entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn. Der magnetische Fluss, den dieser Strom erzeugt, wirkt seiner Ursache entgegen und ist aus der Papierebene heraus gerichtet.

In Abbildung 28.17 sehen Sie einen dünnen, elektrisch leitenden Stab, der auf leitenden Schienen nach rechts gleitet. Die Schienen sind über einen Widerstand miteinander verbunden. Ein homogenes Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ zeigt in die Papierebene hinein.

Wir betrachten den magnetischen Fluss durch die von dem Stromkreis umschlossene Fläche $\boldsymbol{A}$. Der Flächenvektor $\boldsymbol{A}$ soll in die Papierebene hinein zeigen. Wenn sich der Stab nach rechts bewegt, nimmt der Inhalt der Fläche und folglich der magnetische Fluss durch A zu. Deshalb wird im Stromkreis eine Spannung induziert. Ist ℓ der Abstand der Schienen und x die Entfernung zwischen dem linken Schienenende und dem Stab zu einem bestimmten Zeitpunkt, so ist die vom Stromkreis umschlossene Fläche gleich ℓx und der magnetische Fluss durch A ist

$$\Phi_{\mathrm{mag}} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = BA = B\ell x\,.$$

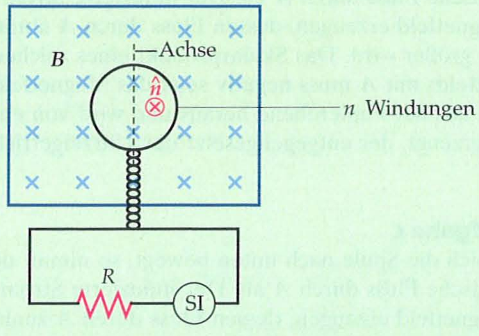
Bewegt sich der Stab um ein kleines Stück dx, nimmt der Flächeninhalt um $A = \ell x$ und der magnetische Fluss Φ_{mag} um $\Phi_{\mathrm{mag}} = B\ell x$ zu. Die Änderungsrate des Flusses ist

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{mag}}}{\mathrm{d}t} = B\ell\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = B\ell v$$

mit $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ als Geschwindigkeit des Stabs.

BEISPIEL 28.7: Durch eine Flipspule fließende Ladung

Die Ebene einer kleinen Spule mit n Windungen liegt senkrecht zur Richtung eines homogenen, statischen Magnetfelds (Abbildung 28.18). Die Spule ist mit einem Stromintegrator (SI) verbunden, einem Gerät zur Messung der Ladung, die insgesamt durch die Spule fließt. Wie groß ist diese Ladung, wenn die Spule bezüglich der eingezeichneten Achse um 180° gedreht wird?



28.18

Problembeschreibung: Wird die in Abbildung 28.18 skizzierte Spule gedreht, so ändert sich der magnetische Fluss durch die Spule und eine Spannung U_{ind} wird induziert. Folglich fließt ein Strom $I = U_{\mathrm{ind}}/R$ (R ist der Gesamtwiderstand des Stromkreises). Weil $I = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ ist, erhalten wir die insgesamt durch den Integrator fließende Ladung q durch Integration von I, also $q = \int \mathrm{d}q = \int I\,\mathrm{d}t$.

Lösung:

1. Die Ladung $\mathrm{d}q$ ist gleich dem Strom, multipliziert mit der Zeit $\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}q = I\,\mathrm{d}t$$

2. Den Zusammenhang zwischen der Spannung U_{ind} und dem Strom I gibt das Ohm'sche Gesetz an:

$$U_{\mathrm{ind}} = R\,I$$

also

$$U_{\mathrm{ind}}\,\mathrm{d}t = R\,I\,\mathrm{d}t$$

3. Die Spannung ist gemäß dem Faraday'schen Gesetz mit dem magnetischen Fluss Φ_{mag} verknüpft:

$$U_{\mathrm{ind}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{mag}}}{\mathrm{d}t}$$

oder

$$U_{\mathrm{ind}}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{mag}}$$

4. Ersetzen Sie im Ergebnis von Schritt 2 $U_{\mathrm{ind}}\,\mathrm{d}t$ durch $-\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{mag}}$ (Schritt 3) und $I\,\mathrm{d}t$ durch $\mathrm{d}q$ (Schritt 1):

$$-\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{mag}} = R\,\mathrm{d}q \quad \text{also} \quad \mathrm{d}q = -\frac{1}{R}\,\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{mag}}$$

5. Die Gesamtladung q ergibt sich durch Integration dieser Beziehung:

$$q = \int_0^q \mathrm{d}q = -\frac{1}{R}\int_{\Phi_{\mathrm{mag,A}}}^{\Phi_{\mathrm{mag,E}}} \mathrm{d}\Phi_{\mathrm{mag}} = -\frac{1}{R}\left(\Phi_{\mathrm{mag,E}} - \Phi_{\mathrm{mag,A}}\right)$$

$$= -\frac{\Delta\Phi_{\mathrm{mag}}}{R}$$

28.19

6. Der magnetische Fluss durch die Spule ist $\Phi_{\mathrm{mag}} = n\,\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{A}$ ist die ebene, von der Spule umschlossene Fläche (Abbildung 28.19). Zu Beginn zeigt der Flächenvektor in die Papierebene hinein; die Fläche $\boldsymbol{A}$ dreht sich dann mit der Spule. Berechnen Sie die Änderung von Φ_{mag}, wenn die Spule sich um 180° dreht:

$$\Delta\Phi_{\mathrm{mag}} = \Phi_{\mathrm{mag,E}} - \Phi_{\mathrm{mag,A}} = n\,\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}_{\mathrm{E}} - n\,\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}_{\mathrm{A}}$$
$$= n\,B\,(-A - (+A))$$
$$= -2\,n\,B\,A$$

7. Die Ladung q erhalten Sie durch Zusammenfassung der Ergebnisse der letzten beiden Schritte:

$$q = \boxed{\frac{2\,n\,B\,A}{R}}$$

Kommentar: Beachten Sie, dass die Ladungsmenge q nicht davon abhängt, wie schnell die Spule gedreht wird. Entscheidend ist die Änderung des magnetischen Flusses durch die Spule. – Mit Hilfe einer derartigen, auch *Flipspule* genannten Anordnung kann man die Stärke von Magnetfeldern messen. Misst der Stromintegrator beim Umdrehen der Spule eine Ladungsmenge q, so ergibt sich die Magnetfeldstärke gemäß $B = Rq/(2nA)$.

ÜBUNG: Zu Beginn eines Versuchs liegt die Ebene einer Flipspule mit 40 Windungen, einem Radius von 3 cm und einem Widerstand von 16 Ω senkrecht zu einem statischen, homogenen Magnetfeld von 0,50 T. Welche Ladungsmenge fließt durch die Spule, wenn diese um 90° gedreht wird? (*Lösung:* 3,53 mC.)

Im Stromkreis wird folglich die Spannung

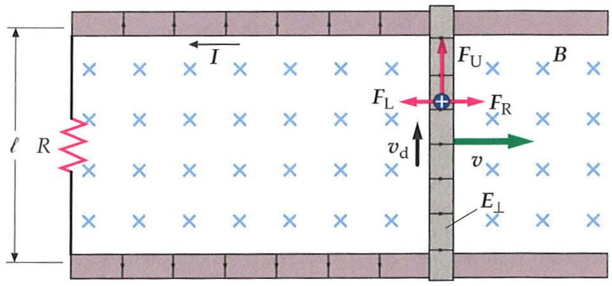
$$U_{\text{ind}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\text{mag}}}{\mathrm{d}t} = -B\ell v$$

induziert. Das negative Vorzeichen gibt an, dass das induzierte elektrische Feld entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn gerichtet ist – es wirkt seiner Ursache entgegen. (Wenn der Daumen Ihrer rechten Hand in die Richtung von $\boldsymbol{A}$ zeigt, also in die Papierebene hinein, so biegt sich Ihre Handfläche im Uhrzeigersinn.)

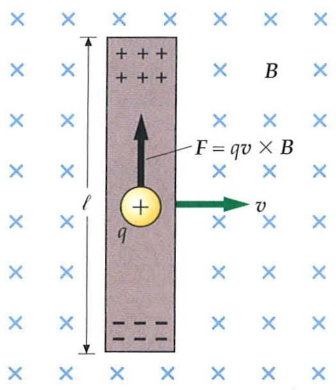
Die Richtung des induzierten Felds können wir anhand der Lenz'schen Regel nachprüfen. Der Strom wird durch die Bewegung des Stabs nach rechts induziert; der induzierte Strom muss also eine magnetische Kraft hervorrufen, die nach links gerichtet ist. Gleichung 26.4 gibt die magnetische Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter an, $I\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{B}$. Die Richtung von $\boldsymbol{\ell}$ ist parallel zum fließenden Strom und zum induzierten Feld. Zeigt $\boldsymbol{\ell}$ aufwärts, so wirkt die Kraft nach links, was unser obiges Ergebnis (das induzierte Feld ist entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn gerichtet) bestätigt. Wenn man den Stab nach rechts anschiebt (ihm also eine Anfangsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ verleiht) und ihn dann loslässt, so bremst ihn die vom induzierten Strom bewirkte Kraft ab, bis er zur Ruhe kommt. Um die Bewegung des Stabs aufrechtzuerhalten, müsste auf ihn ständig eine äußere Kraft von links einwirken.

Ein anderer Weg, die Richtung des induzierten Felds und des induzierten Stroms zu überprüfen, ist folgender: Wir betrachten die Richtung der magnetischen Kraft, die auf die gemeinsam mit dem Stab nach rechts bewegten Ladungsträger wirkt. Die Geschwindigkeit der Ladungsträger ist natürlich ebenfalls $\boldsymbol{v}$; die magnetische Kraft ist dann gegeben als $\boldsymbol{F} = q\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$. Ist q positiv, so zeigt diese Kraft nach oben und das induzierte elektrische Feld ist daher entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn gerichtet.

Die Spannung ist die pro Ladungseinheit an den Ladungsträgern verrichtete Arbeit. Welche Kraft verrichtet nun diese Arbeit in dem in Abbildung 28.19 gezeigten Stromkreis? Wie im Folgenden erläutert werden soll, kommt es hier zu einer Überlagerung einer magnetischen Kraft und einer elektrischen Kraft (Abbildung 28.20). Wir legen fest, dass der Strom von unten nach oben durch den Stab fließt. Die Driftgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_{\text{d}}$ eines positiven Ladungsträgers zeigt deshalb nach oben. Eine magnetische Kraft ($\boldsymbol{F}_{\text{L}} = q\,\boldsymbol{v}_{\text{d}} \times \boldsymbol{B}$) wirkt dann nach links auf die Ladungsträger, wodurch die linke Seite des Stabs positiv und die rechte Seite negativ geladen wird.



28.20 Ein positiver Ladungsträger bewegt sich aufwärts in einem Stab, der selbst nach rechts bewegt wird. Auf ihn wirken elektrische und magnetische Kräfte. Die resultierende elektromagnetische Kraft zeigt nach oben, in die gleiche Richtung wie die Driftgeschwindigkeit. Die von dieser Kraft pro Ladungseinheit an dem bewegten Ladungsträger verrichtete Arbeit ist gleich der induzierten Spannung.



28.21 Die auf einen positiven Ladungsträger in einem leitenden, durch ein Magnetfeld bewegten Stab wirkende magnetische Kraft besitzt eine aufwärts gerichtete Komponente. Einige Ladungsträger bewegen sich in Richtung der Spitze des Stabs, wodurch an dessen unterem Ende ein negativer Ladungsüberschuss verbleibt. Durch die Ladungstrennung entsteht im Stab ein nach unten gerichtetes elektrisches Feld vom Betrag $|\boldsymbol{E}_\parallel| = |\boldsymbol{v}|\,|\boldsymbol{B}|$. Die Potenzialdifferenz zwischen Spitze und Ende des Stabs ist dann $|\boldsymbol{E}_\parallel|\,\ell = |\boldsymbol{v}|\,|\boldsymbol{B}|\,\ell$.

Durch die Ladungstrennung entsteht innerhalb des Stabs ein nach rechts gerichtetes elektrisches Feld $\boldsymbol{E}_\perp$, das auf die Ladungsträger eine Kraft $\boldsymbol{F}_\mathrm{R} = q\,\boldsymbol{E}_\perp$ nach rechts ausübt. Die Summe $\boldsymbol{F}_\mathrm{L} + \boldsymbol{F}_\mathrm{R}$ muss null sein, weil auf die Ladungsträger keine resultierende Kraft in horizontaler Richtung wirkt. Die Bewegung der Ladungsträger gemeinsam mit dem Stab ruft zusätzlich eine aufwärts gerichtete magnetische Kraft $\boldsymbol{F}_\mathrm{U} = q\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ hervor; $\boldsymbol{v}$ ist die Geschwindigkeit, mit der sich Stab und Ladungsträger nach rechts bewegen. Die insgesamt an einem Ladungsträger im Stab verrichtete Arbeit ist demnach gleich der Arbeit, die $\boldsymbol{F}_\mathrm{U}$ verrichtet, und ist gegeben durch $|\boldsymbol{F}_\mathrm{U}|\,\ell = q\,|\boldsymbol{v}|\,|\boldsymbol{B}|\,\ell$. Dividiert man dies durch die Ladung q, so erhält man die Arbeit pro Ladungseinheit, $|\boldsymbol{v}|\,|\boldsymbol{B}|\,\ell$. Die Spannung ist gleich dieser Arbeit:

$$U_\mathrm{ind} = |\boldsymbol{v}|\,|\boldsymbol{B}|\,\ell\,. \qquad (28.6)$$

INDUKTIONSSPANNUNG IN EINEM SENKRECHT ZU SEINER LÄNGSACHSE UND ZU $\boldsymbol{B}$ BEWEGTEN STAB

Gleichung 28.6 gibt die von allen drei genannten Kräften ($\boldsymbol{F}_\mathrm{L}, \boldsymbol{F}_\mathrm{R}$ und $\boldsymbol{F}_\mathrm{U}$) insgesamt pro Ladungseinheit verrichtete Arbeit an. Die Kräfte $\boldsymbol{F}_\mathrm{L}$ und $\boldsymbol{F}_\mathrm{R}$ sind jedoch senkrecht zur Geschwindigkeit der Ladungsträger gerichtet und verrichten deshalb keine Arbeit. Nur durch die magnetische Kraft $\boldsymbol{F}_\mathrm{U}$ wird also an den Ladungsträgern eine Arbeit verrichtet.

Abbildung 28.21 zeigt einen positiven Ladungsträger in einem elektrisch leitenden Stab, der sich mit konstanter Geschwindigkeit in einem homogenen Magnetfeld bewegt; das Feld zeigt in die Papierebene hinein. Da sich der Ladungsträger mit dem Stab waagerecht fortbewegt, wirkt auf ihn eine aufwärts gerichtete magnetische Kraft $q\,|\boldsymbol{v}|\,|\boldsymbol{B}|$. Durch die Kraftwirkung werden alle Ladungsträger im Stab nach oben gedrückt, wodurch eine positive Ladung am oberen Ende und eine negative Ladung am unteren Ende entsteht und sich ein elektrisches Feld $\boldsymbol{E}_\parallel$ aufbaut. Diese Verschiebung der Ladungsträger hält an, bis die von diesem Feld nach unten ausgeübte Kraft $q\,|\boldsymbol{E}_\parallel|$ die nach oben gerichtete magnetische Kraft $q\,|\boldsymbol{v}|\,|\boldsymbol{B}|$ gerade kompensiert. Im Gleichgewicht ist die elektrische Feldstärke im Stab gleich

$$|\boldsymbol{E}_\parallel| = |\boldsymbol{v}|\,|\boldsymbol{B}|\,.$$

Das elektrische Feld ist abwärts orientiert, parallel zur Längsachse des Stabs. Die zugehörige Potenzialdifferenz über der Länge ℓ des Stabs ist dann

$$U = |\boldsymbol{E}_\parallel|\,\ell = |\boldsymbol{v}|\,|\boldsymbol{B}|\,\ell$$

wobei sich die Spitze des Stabs auf dem höheren Potenzial befindet. Fließt kein Strom durch den Stab, so ist die Potenzialdifferenz entlang des Stabs gleich der Induktionsspannung, $|\boldsymbol{v}|\,|\boldsymbol{B}|\,\ell$. Wenn ein Strom fließt, ist die Potenzialdifferenz gleich

$$U = |\boldsymbol{v}|\,|\boldsymbol{B}|\,\ell - I\,R \qquad (28.7)$$

POTENZIALDIFFERENZ ENTLANG EINES BEWEGTEN STABS

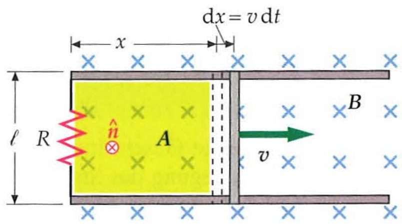
mit R als Ohm'schem Widerstand des Stabs.

BEISPIEL 28.8: Ein U-förmiger Leiter und ein gleitender Stab

Für Abbildung 28.19 sollen folgende Parameter gelten: $|\boldsymbol{B}| = 0{,}6$ T, $v = 8$ m/s, $\ell = 15$ cm und $R = 25\ \Omega$; die Widerstände des Stabs und der Schienen seien zu vernachlässigen. Berechnen Sie a) die im Stromkreis induzierte Spannung, b) den induzierten Strom, c) die erforderliche Kraft, um den Stab mit konstanter Geschwindigkeit zu bewegen und d) die im Widerstand umgesetzte Leistung.

ZUR ÜBUNG

Problembeschreibung:



Lösung:

Decken Sie zunächst die rechte Spalte ab und versuchen sie jeweils, die Ergebnisse selbst zu ermitteln.

Schritte	Ergebnisse
1. Berechnen Sie die induzierte Spannung aus Gleichung 28.6.	$U_{\mathrm{ind}} = \lvert\boldsymbol{v}\rvert\,\lvert\boldsymbol{B}\rvert\,\ell = \boxed{0{,}720\ \mathrm{V}}$
2. Den Strom erhalten Sie aus dem Ohm'schen Gesetz.	$I = \dfrac{U_{\mathrm{ind}}}{R} = 28{,}8\ \mathrm{mA}$
3. Um den Stab mit konstanter Geschwindigkeit zu bewegen, muss man eine Kraft aufwenden, deren Betrag gleich der vom Magnetfeld auf den Stab ausgeübten Kraft ist ($\lvert I\,\ell\,\boldsymbol{B}\rvert$, siehe Gleichung 26.4), die aber entgegengesetzt gerichtet ist. Berechnen Sie den Betrag der Kraft.	$\lvert\boldsymbol{F}\rvert = \lvert I\,\ell\,\boldsymbol{B}\rvert = 2{,}59\ \mathrm{mN}$
4. Berechnen Sie nun die im Widerstand umgesetzte Leistung.	$P = I^2R = \boxed{20{,}7\ \mathrm{mW}}$

! Plausibilitätsprüfung: Auch aus der Beziehung $P = |\boldsymbol{F}|\ |\boldsymbol{v}|$ erhalten Sie eine Leistung von 20,7 mW.

Kommentar: Das Potenzial an der Spitze des Stabs ist höher als das Potenzial an dessen unterem Ende.

ÜBUNG: Ein 40 cm langer Stab bewegt sich senkrecht zu seiner Längsachse mit einer Geschwindigkeit von 12 m/s in einer Ebene, auf der ein Magnetfeld von 0,30 T senkrecht steht. Wie groß ist die im Stab induzierte Spannung? (*Lösung:* 1,44 V.)

In den Beispielen 28.8 und 28.9 werden für bewegte Leiter die Beziehungen für Leistung, Kraft und Geschwindigkeit untersucht.

Die allgemeine Gleichung für eine durch Bewegung induzierte Spannung ist

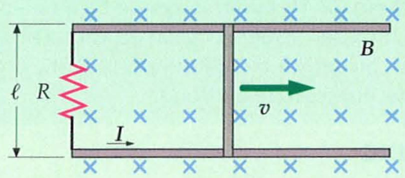
$$U_{\mathrm{ind}} = \oint_C (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{mag}}}{\mathrm{d}t} \qquad (28.8)$$

INDUKTIONSSPANNUNG DURCH BEWEGUNG, ALLGEMEIN

mit $\boldsymbol{v}$ als Geschwindigkeit des Leiterelements $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$. Integriert wird zu einem bestimmten Zeitpunkt. Die Anwendung des Vektorprodukts in Gleichung 28.8 verdeutlicht Beispiel 28.10.

BEISPIEL 28.9: Magnetische Reibung

Ein Stab mit der Masse m gleitet reibungsfrei auf elektrisch leitenden Schienen, umgeben von einem statischen, homogenen Magnetfeld $\boldsymbol{B}$, das in die Papierebene hineinzeigt (Abbildung 28.22). Der Stab wird von außen angeschoben, so dass er sich mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 nach rechts bewegt. Zum Zeitpunkt $t=0$ wird der Stab plötzlich losgelassen. Daraufhin bewegt er sich eine Zeit lang weiter nach rechts, wobei er durch die magnetische Kraft gebremst wird. Geben Sie die Geschwindigkeit v des Stabs als Funktion der Zeit an.



28.22

Problembeschreibung: Die Geschwindigkeit des Stabs ändert sich, weil eine magnetische Kraft auf den induzierten Strom wirkt. Durch die Bewegung des Stabs im Magnetfeld wird die Spannung $U_{\text{ind}} = |\boldsymbol{v}|\,|\boldsymbol{B}|\,\ell$ induziert, und es fließt ein Strom $I = U_{\text{ind}}/R$. In der Folge wirkt auf den Stab die magnetische Kraft $\boldsymbol{F} = I\,\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{B}$. Ist diese Kraft bekannt, so können wir mit Hilfe des zweiten Newton'schen Axioms die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit ausdrücken. Die positive x-Richtung soll nach rechts zeigen.

Lösung:

1. Wenden Sie das zweite Newton'sche Axiom auf den Stab an:

$$F_x = m\,a_x = m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

2. Auf den Stab wirkt die magnetische Kraft, deren Betrag proportional zum Strom und deren Richtung parallel zur negativen x-Achse ist (Abbildung 28.22):

$$F_x = -I\,B\,\ell$$

3. Der Strom ergibt sich als Quotient aus der Induktionsspannung und dem Widerstand des Stabs:

$$I = \frac{U_{\text{ind}}}{R} = \frac{B\,\ell\,v}{R}$$

4. Fügen Sie die Ergebnisse der ersten Schritte zusammen. Sie erhalten die magnetische Kraft, die auf den Stab wirkt:

$$F_x = -I\,B\,\ell = -\frac{B\,\ell\,v}{R}\,B\,\ell = -\frac{B^2\,\ell^2\,v}{R}$$

5. Das zweite Newton'sche Axiom liefert dann:

$$-\frac{B^2\,\ell^2\,v}{R} = m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

6. Trennen Sie nun die Variablen und integrieren Sie über die Geschwindigkeit in den Grenzen v_0 und v_{E} sowie über die Zeit in den Grenzen 0 und t_{E}:

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{B^2\,\ell^2}{m\,R}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{v_0}^{v_{\text{E}}} \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{B^2\,\ell^2}{m\,R}\int_0^{t_{\text{E}}} \mathrm{d}t$$

$$\ln\frac{v_{\text{E}}}{v_0} = -\frac{B^2\,\ell^2}{mR}\,t_{\text{E}}$$

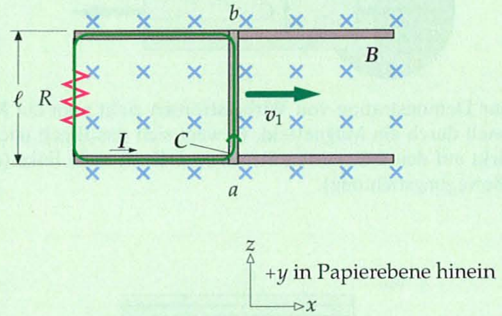
7. Lösen Sie für $v = v_{\text{E}}$ und $t = t_{\text{E}}$ nach v auf:

$$v = v_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{m\,R}{B^2\ell^2}$$

Kommentar: Wäre die Kraft konstant, so nähme die Geschwindigkeit des Stabs linear mit der Zeit ab. Die Kraft ist aber proportional zur Geschwindigkeit des Stabs, wie wir es in Schritt 4 erhalten haben, und folglich am Anfang groß, mit abnehmender Geschwindigkeit aber immer kleiner. Im Prinzip kommt der Stab niemals zur Ruhe, bewegt sich aber innerhalb einer endlichen Strecke.

BEISPIEL 28.10: Überprüfung der Beziehung $U_{\text{ind}} = v\,B\,\ell$

Betrachten Sie den Stromkreis in Abbildung 28.23. Die positiven Richtungen der x-, y- und z-Achse zeigen nach rechts, in die Papierebene hinein bzw. nach oben. Der Stab bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_1 nach rechts. Das umgebende homogene, statische Magnetfeld zeigt in die Papierebene hinein. Integrieren Sie die Beziehung $U_{\text{ind}} = \oint_C (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ und zeigen Sie, dass die im Stromkreis induzierte Spannung durch Gleichung 28.6 gegeben ist.



28.23

Problembeschreibung: Wir teilen den Stromkreis in zwei Teile: einen bewegten (C_1) und einen ruhenden (C_2).

Lösung:

1. Teilen Sie den Stromkreis in die Teile C_1 und C_2. In C_1 sei $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1$, in C_2 sei $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_2=0$:

$$\oint_C (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_{a,C_1}^{b} (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} + \int_{b,C_2}^{a} (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$$

$$= \int_{a,C_1}^{b} (\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} + 0$$

2. Berechnen Sie $(\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ im Teil C_1:

$$\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{v}_1\,\hat{\boldsymbol{x}} \times B\,\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{v}_1\,B\,\hat{\boldsymbol{z}}$$

und

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \mathrm{d}\ell\,\hat{\boldsymbol{z}},$$

also

$$(\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = v_1\,B\,\mathrm{d}\ell\,\hat{\boldsymbol{z}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}} = v_1\,B\,\mathrm{d}\ell$$

3. Durch Integration erhalten Sie die induzierte Spannung:

$$U_{\text{ind}} = \int_{a,C_1}^{b} (\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_{a,C_1}^{b} v_1\,B\,\mathrm{d}\ell = v_1\,B \int_{a,C_1}^{b} \mathrm{d}\ell$$

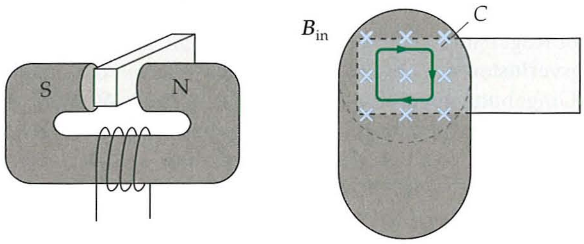
$$= \boxed{v_1\,B\,\ell}$$

28.5 Wirbelströme

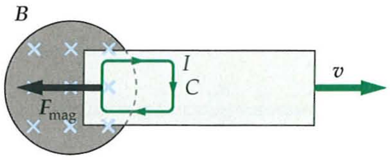
Bisher haben wir uns mit Strömen beschäftigt, die in dünnen Drähten oder Stäben – also Stromkreisen mit definierter Begrenzung – induziert wurden. Änderungen des magnetischen Flusses rufen jedoch auch Kreisströme, so genannte *Wirbelströme*, im Inneren von Metallstücken wie beispielsweise dem Kern einer Transformatorspule hervor. Wirbelströme erzeugen Wärme; dies bedeutet einen Energieverlust im Transformator.

Betrachten wir einen leitenden Stab, der sich zwischen den Polschuhen eines Elektromagneten befindet (Abbildung 28.24). Ändert sich das Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ zwischen den Polen mit der Zeit (etwa wenn in den Windungen des Magneten ein Wechselstrom fließt), so ändert sich der Fluss durch jede geschlossene Schleife innerhalb des Stabs. Ein Beispiel für einen solchen Weg ist die in der Skizze eingezeichete Kurve C. Da diese sich in einem leitfähigen Material befindet, wird entlang C eine Spannung induziert.

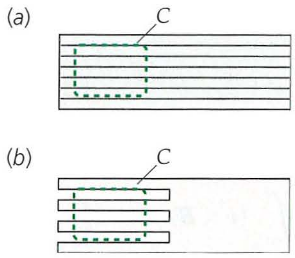
Man kann das Vorhandensein von Wirbelströmen demonstrieren, indem man ein Kupfer- oder Aluminiumblech durch den



28.24 Wirbelströme. Ändert sich das Magnetfeld, in dem sich ein Metallstab befindet, so wird entlang jedes geschlossenen Wegs innerhalb des Stabs (beispielsweise C) eine Spannung induziert, und es fließen die so genannten Wirbelströme.



28.25 Zur Demonstration von Wirbelströmen zieht man ein Metallblech schnell durch ein Magnetfeld. Bewegt sich das Blech nach rechts, wirkt auf den induzierten Strom eine Kraft nach links (entgegen der Bewegungsrichtung).



28.26 Durch Unterbrechung der Wege in einem Metallstab lassen sich Wirbelströme reduzieren. a) Der Widerstand der geschlossenen Schleife C nimmt deutlich zu, wenn der Stab aus Schichten zusammengefügt wird, die durch eine Klebstoffschicht voneinander isoliert sind. b) Einen ähnlichen Effekt hat das Anbringen von Schlitzen im Stab.

Raum zwischen den Polen eines starken Permanentmagneten zieht (Abbildung 28.25): Die Schleife C in der Skizze umschließt eine Fläche, die sich zum Teil innerhalb, zum Teil außerhalb des Magnetfelds befindet. Zieht man das Blech nach rechts, so nimmt der Fluss durch die Schleife ab (unter der Voraussetzung, dass der Flächenvektor in die Papierebene hineinzeigt). In der Schleife wird ein elektrisches Feld in Uhrzeigerrichtung induziert; es erzeugt einen Strom, der im Gebiet zwischen den Polen nach oben fließt. Das Magnetfeld übt auf diesen Strom eine nach links gerichtete, also der Bewegung des Blechs entgegenwirkende Kraft aus. Sie können diese Kraft deutlich spüren, wenn Sie versuchen, ein leitfähiges Blech schnell durch ein starkes Magnetfeld zu ziehen.

In der Regel sind Wirbelströme unerwünscht. Sie führen zu Leistungsverlusten in Form von Joule'scher Wärme, die zudem an die Umgebung abgeführt werden muss. Um die Verluste möglichst zu vermeiden, erhöht man den elektrischen Widerstand der Wege, entlang derer die Wirbelströme induziert werden: Der leitende Stab in Abbildung 28.26a wurde schichtweise aus jeweils durch eine Klebstoffschicht isolierten Blechen zusammengefügt. Wirbelströme können nun lediglich in jeder einzelnen dünnen Schicht induziert werden, größere Stromschleifen sind unterbrochen, und der Leistungsverlust sinkt deutlich ab. Einen ähnlichen Effekt erreicht man, indem man den Stab mit Schlitzen versieht (Abbildung 28.26b), wodurch die Wirbelströme ebenfalls unterbunden werden und die magnetische Kraft reduziert wird.

In manchen Fällen macht man sich Wirbelströme jedoch auch zunutze, beispielsweise zur Dämpfung nicht erwünschter Oszillationen. Ohne Dämpfung schwingt etwa die Anzeige sehr empfindlicher mechanischer Waagen viele Male um ihre Gleichgewichtslage, was das Ablesen erschwert. Abhilfe schafft hier, am Zeiger ein kleines Metallstück (z. B. ein Aluminiumblech) anzubringen, das beim Pendeln des Zeigers zwischen den Polen eines Magneten schwingt. Die induzierten Wirbelströme dämpfen die Oszillationen wirksam, und die Gleichgewichtslage stellt sich rasch ein. Eine andere wichtige Anwendung sind Wirbelstrombremsen in Schienenfahrzeugen. Ein großer Elektromagnet wird oberhalb der Schienen im Waggon angebracht. Fließt durch die Windungen der bewegten Magnetspule ein Strom, so werden in den Schienen Wirbelströme induziert, die den Zug abbremsen.

28.6 Induktivität

Selbstinduktion

Der magnetische Fluss durch einen gegebenen Stromkreis entsteht durch den Strom, der in dem Kreis selbst fließt, sowie durch Ströme in benachbarten Kreisen (die Anwesenheit von Permanentmagneten wollen wir ausschließen). Betrachten wir eine Spule, die von einem Strom I durchflossen wird. Dieser Strom erzeugt ein Magnetfeld $\boldsymbol{B}$, dessen Stärke in jedem Punkt proportional zu I ist. Folglich ist auch der magnetische Fluss durch die Spule proportional zu I:

$$\Phi_{\mathrm{mag}} = L\,I\,. \tag{28.9}$$

DEFINITION DER SELBSTINDUKTION

Den Proportionalitätsfaktor L nennt man die **Selbstinduktivität** der Spule; L hängt von der Geometrie der Spule ab. Die SI-Einheit der Induktivität ist das **Henry** (H). Wie aus Gleichung 28.9 folgt, ergibt sich die Einheit der Induktivität als Quotient der Einheiten des magnetischen Flusses und des Stroms:

$$1\,\mathrm{H} = 1\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{A}} = 1\frac{\mathrm{T\cdot m^2}}{\mathrm{A}}\,.$$

Die Selbstinduktivität jeder Spule oder jedes Stromkreises lässt sich prinzipiell folgendermaßen berechnen: Man ermittelt für eine bestimmte Stromstärke I das Magnetfeld in jedem Punkt auf einer Fläche, die von der Spule umschlossen wird, berechnet den Fluss Φ_{mag} und wendet schließlich die Beziehung $L = \Phi_{\mathrm{mag}}/I$ an. In der Praxis sind derartige Berechnungen in der Regel mühsam. Eine Ausnahme bildet eine lange, dicht gewickelte Zylinderspule. Den magnetischen Fluss durch eine solche Spule mit n Windungen und der Länge ℓ, in der ein Strom I fließt, haben wir in Beispiel 28.1 berechnet:

$$\Phi_{\mathrm{mag}} = \frac{\mu_0\, n^2 I A}{\ell} = \mu_0\,(n/\ell)^2\, I A\,\ell \tag{28.10}$$

mit (n/ℓ) als Windungsdichte. Wie erwartet ist der Fluss proportional zum Strom I mit der Selbstinduktivität als Proportionalitätsfaktor:

BEISPIEL 28.11: Selbstinduktivität einer Zylinderspule

Zu berechnen ist die Selbstinduktivität einer 10 cm langen Zylinderspule mit 100 Windungen und einer Querschnittsfläche von 5 cm^2.

Problembeschreibung: Mit Hilfe von Gleichung 28.11 berechnen wir die Selbstinduktivität in Henry.

Lösung:

1. L ist von Gleichung 28.11 gegeben:

$$L = \mu_0 \, (n/\ell)^2 \, A \, \ell$$

2. Rechnen Sie die gegebenen Größen in SI-Einheiten um (Wd. steht für Windungen):

$$\ell \; = 10 \text{ cm} = 0{,}1 \text{ m}$$

$$A \; = 5 \text{ cm}^2 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$n/\ell = (100 \text{ Wd.})/(0{,}1 \text{ m}) = 1000 \text{ Wd./m}$$

$$\mu_0 \; = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$

3. Setzen Sie alle gegebenen Größen ein:

$$L = \mu_0 \, (n/\ell)^2 \, A \, \ell$$

$$= (4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}) \cdot (10^3 \text{ Wd./m})^2 \cdot (5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2) \cdot (0{,}1 \text{ m})$$

$$= \boxed{6{,}28 \cdot 10^{-5} \text{ H}}$$

$$L = \frac{\Phi_{\text{mag}}}{I} = \mu_0 \, (n/\ell)^2 \, A \, \ell \,. \qquad (28.11)$$

SELBSTINDUKTIVITÄT EINER ZYLINDERSPULE

Mit Worten ausgedrückt: Die Selbstinduktivität einer Zylinderspule ist proportional zum Quadrat der Windungsdichte (n/ℓ) und zum Volumen der Spule $A\,\ell$. Sie hängt also, wie auch die Kapazität, nur von geometrischen Parametern ab – das illustriert Beispiel 28.11. (Hat die Spule einen Eisenkern, dann beeinflussen auch dessen Eigenschaften die Induktivität.) Betrachten wir die Einheiten in Gleichung 28.11, so stellen wir fest, dass sich μ_0 in Henry pro Meter angeben lässt:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}\,.$$

Ändert sich die Stromstärke in einem Stromkreis, so ändert sich auch der magnetische Fluss und es wird eine Spannung induziert. Da die Selbstinduktivität des Stromkreises konstant ist, hängt die Flussänderung nur von der Änderungsrate der Stromstärke ab:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_{\text{mag}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(L\,I)}{\mathrm{d}t} = L\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\,.$$

Gemeinsam mit dem Faraday'schen Gesetz ergibt sich dann

$$U_{\text{ind}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\text{mag}}}{\mathrm{d}t} = -L\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\,. \qquad (28.12)$$

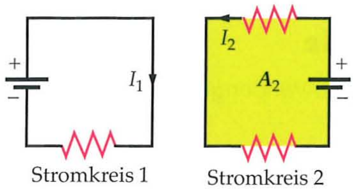
Die Selbstinduktionsspannung ist also proportional zur Änderungsrate des Stroms. Für Zylinderspulen mit vielen Windungen, in Stromkreisen symbolisiert durch , ist die Selbstinduktivität so groß, dass man dagegen die Selbstinduktivität des restlichen Kreises normalerweise vernachlässigen kann. Man nennt solche Spulen auch allgemein **Induktivität**. (Achten Sie darauf, dass im Deutschen Bauelement und Eigenschaft mit dem gleichen Begriff bezeichnet werden können!) Der Spannungsabfall an der Spule ist gegeben durch

$$U_L = U_{\text{ind}} - I\,R = -L\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} - I\,R \qquad (28.13)$$

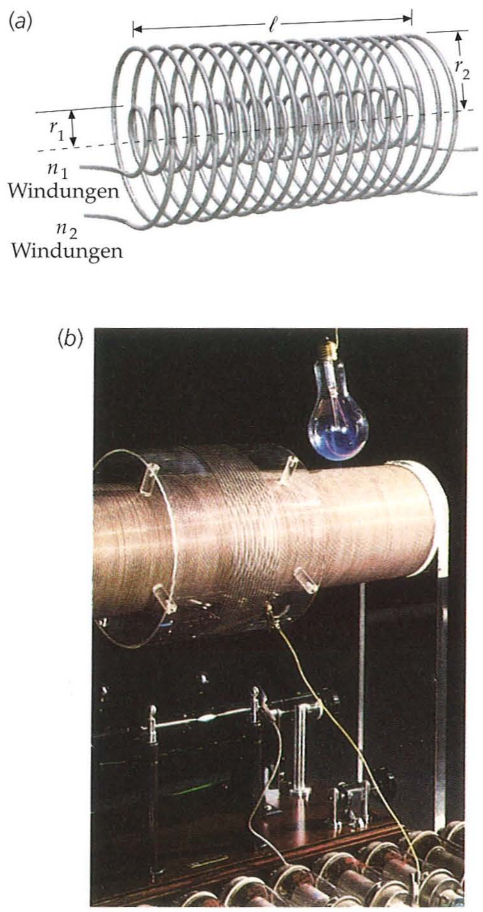
SPANNUNGSABFALL AN EINER SPULE

mit R als Innenwiderstand der Spule. Der Innenwiderstand wird gegebenenfalls vom Leitungsdraht der Spule beeinflusst und ist für eine ideale Spule null.

ÜBUNG: Wie schnell muss sich der Strom in der Spule aus Beispiel 28.11 ändern, damit eine Spannung von 20 V induziert wird?
(*Lösung:* $3{,}18 \cdot 10^5$ A/s.)



28.27 Zwei benachbarte Stromkreise. Das Magnetfeld in A_2 wird jeweils zum Teil von I_1 und I_2 hervorgerufen. Der magnetische Fluss ergibt sich dann als Summe zweier Terme, von denen der eine proportional zu I_1 ist und der andere zu I_2.



28.28 a) Eine lange, schmale Spule befindet sich im Inneren einer zweiten, gleich langen Spule. Fließt in einer der beiden Spulen ein Strom, so wird ein magnetischer Fluss in der jeweils anderen Spule erzeugt. b) Der in Bild a skizzierte Aufbau wird in dieser Tesla-Spule praktisch umgesetzt. Die Anordnung arbeitet als Transformator (siehe Kapitel 29): Eine niedrige Wechselspannung in der äußeren Spule wird in eine höhere Wechselspannung in der inneren Spule umgewandelt. Der Strom durch die äußere Spule induziert eine Spannung in der inneren Spule, die hoch genug ist, um die darüber aufgehängte Glühlampe zum Leuchten zu bringen.

Gegeninduktion

In Abbildung 28.27 sehen Sie zwei nahe beieinander liegende Stromkreise 1 und 2. Der magnetische Fluss durch einen der Kreise hängt in diesem Fall nicht nur von dem Strom ab, der in diesem Kreis fließt, sondern auch vom Strom im Nachbarkreis. Wir bezeichnen den in Kreis 1 (Abbildung 28.27, links) fließenden Strom mit I_1 und den Strom in Kreis 2 (rechts) mit I_2. Das Magnetfeld über der Fläche $\boldsymbol{A}_2$ ergibt sich dann als Überlagerung der von I_1 und I_2 hervorgerufenen Felder $\boldsymbol{B}_1$ bzw. $\boldsymbol{B}_2$, wobei die Feldstärken den jeweils zugehörigen Stromstärken proportional sind. Für den Fluss des Felds $\boldsymbol{B}_1$ durch den Kreis 2, $\Phi_{\mathrm{mag},2,1}$, können wir dann schreiben:

$$\Phi_{\mathrm{mag},2,1} = L_{2,1}\, I_1 \,. \qquad (28.14a)$$

DEFINITION DER GEGENINDUKTION

Die Größe $L_{2,1}$ ist die **Gegeninduktivität** der beiden Stromkreise. Die Gegeninduktivität hängt von der relativen geometrischen Anordnung der Kreise ab. Sind die Kreise beispielsweise weit voneinander entfernt, so ist der magnetische Fluss von $\boldsymbol{B}_1$ durch Kreis 2 und folglich auch die Gegeninduktivität gering. (Der resultierende Fluss $\Phi_{\mathrm{mag},2}$ der beiden Felder durch Kreis 2 ergibt sich aus der Summe zweier Anteile, $\Phi_{\mathrm{mag},2} = \Phi_{\mathrm{mag},2,2} + \Phi_{\mathrm{mag},2,1}$.)

Analog zu Gleichung 28.14a formulieren wir folgende Beziehung für den Fluss von $\boldsymbol{B}_2$ durch den Kreis 1:

$$\Phi_{\mathrm{mag},1,2} = L_{1,2}\, I_2 \,. \qquad (28.14b)$$

Wir wollen nun die Gegeninduktivität zweier eng gewickelter, konzentrisch angeordneter Zylinderspulen berechnen, wie sie in Abbildung 28.28 dargestellt sind. Dazu sei ℓ die Länge beider Spulen; die innere Spule mit dem Radius r_1 habe n_1 Windungen, die äußere Spule mit dem Radius r_2 habe n_2 Windungen. Durch die innere Spule fließe der Strom I_1. Zunächst bestimmen wir die Gegeninduktivität $L_{2,1}$; dazu ermitteln wir den magnetischen Fluss $\Phi_{\mathrm{mag},2,1}$, den I_1 in der äußeren Spule hervorruft.

Der Strom I_1 erzeugt ein innerhalb der inneren Spule konstantes Magnetfeld mit der Feldstärke

$$B_1 = \mu_0\,(n_1/\ell)\, I_1\,, \quad r < r_1 \,. \qquad (28.15)$$

Außerhalb der inneren Spule ist dieses Magnetfeld vernachlässigbar schwach. Das Feld der inneren Spule erzeugt demnach in der äußeren Spule den Fluss

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathrm{mag},2,1} &= n_2\, B_1\,(\pi r_1^2)\\ &= (n_2/\ell)\,\ell\, B_1\,(\pi r_1^2) = \mu_0\,(n_2/\ell)\,(n_1/\ell)\,\ell\,(\pi r_1^2)\, I_1 \,.\end{aligned}$$

Beachten Sie dabei, dass die Fläche zur Berechnung des Flusses durch die äußere Spule nicht deren Fläche πr_2^2 ist, sondern die Fläche der inneren Spule, πr_1^2, weil wir das Magnetfeld der inneren Spule – wie bereits betont – außerhalb dieser Spule vernachlässigen können. Für die Gegeninduktion erhalten wir daraus

$$L_{2,1} = \frac{\Phi_{\mathrm{mag},2,1}}{I_1} = \mu_0\,(n_2/\ell)\,(n_1/\ell)\,\ell\pi r_1^2 \,. \qquad (28.16)$$

ÜBUNG: Berechnen Sie die Gegeninduktivität $L_{1,2}$ der in Abbildung 28.28 gezeigten konzentrischen Spulen, indem Sie den Fluss durch die innere Spule ermitteln, der von einem Strom I_2 durch die äußere Spule hervorgerufen wird. (*Lösung:* $L_{1,2} = L_{2,1} = \mu_0\,(n_2/\ell)\,(n_1/\ell)\,\ell\,\pi\,r_1^2$.)

28.7 Die Energie des Magnetfelds

Ein Kondensator speichert, wie wir wissen, elektrische Energie; eine Spule oder Induktivität speichert magnetische Energie. Betrachten wir den Stromkreis in Abbildung 28.29: Eine Spule L und ein Widerstand R sind mit einer Spannungsquelle U_0 und einem Schalter S in Reihe geschaltet. R und L sollen dem Ohm'schen Widerstand bzw. der Induktivität des gesamten Stromkreises entsprechen. Zu Beginn des Versuchs ist der Schalter geöffnet, es fließt kein Strom. Kurz nachdem der Schalter geschlossen wurde, fließt der Strom I; der Spannungsabfall beträgt am Widerstand $-IR$, an der Spule $-L\,\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$. (Die Potenzialdifferenz an der Spule ist gleich der durch Gleichung 28.12 gegebenen Spannung, wenn der Innenwiderstand der Spule vernachlässigbar klein ist.)

Wir wenden die Kirchhoff'sche Maschenregel auf den Stromkreis an und erhalten

$$U_0 - I\,R - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0\,. \qquad (28.17)$$

Durch Multiplikation beider Seiten und Umstellen der Gleichung ergibt sich daraus

$$U_0 I = I^2 R + L\,I\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\,. \qquad (28.18)$$

Der Term $U_0 I$ gibt die von der Batterie gelieferte Leistung (potenzielle elektrische Energie pro Zeit) an; der Term $I^2 R$ entspricht der Leistung, die am Widerstand ankommt (und dort in Wärme umgesetzt wird), während die Leistung $L\,I\,\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ auf die Spule entfällt. Die in die Spule fließende Energie bezeichnen wir mit E_{mag}. Dann ist

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{mag}}}{\mathrm{d}t} = L\,I\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\,,$$

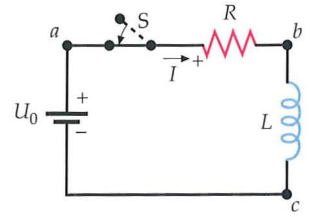
woraus folgt:

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{mag}} = L\,I\,\mathrm{d}I\,.$$

Wir integrieren diesen Ausdruck vom Zeitpunkt $t = 0$ (der Strom ist null) bis zu $t = \infty$ (der Strom hat seinen Endwert I_{E} erreicht):

$$E_{\mathrm{mag}} = \int \mathrm{d}E_{\mathrm{mag}} = \int_0^{I_{\mathrm{E}}} L\,I\,\mathrm{d}I = \frac{1}{2}L\,I_{\mathrm{E}}^2\,.$$

In einer Spule, durch die ein Strom I fließt, wird also folgende Energie gespeichert:



28.29 Sobald der Schalter dieses Stromkreises geschlossen wird, nimmt die Stromstärke zu und in der Spule wird eine Gegenspannung vom Betrag $L\,\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ induziert. Die Summe aus den Spannungsabfällen über dem Widerstand (IR) und über der Spule ($L\,\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$) ist gleich der Spannung U_0 der Spannungsquelle.

$$E_{\mathrm{mag}} = \frac{1}{2}L\,I^2\,. \qquad (28.19)$$

IN EINER SPULE GESPEICHERTE ENERGIE

Ein Strom, der durch eine Spule fließt, erzeugt ein Magnetfeld innerhalb der Spulenwindungen. Die in der Spule gespeicherte Energie können wir uns als Energie dieses Magnetfelds vorstellen. Im Spezialfall einer langen Zylinderspule ist der Zusammenhang zwischen der Magnetfeldstärke und dem Strom I sowie der Windungsdichte n/ℓ gegeben durch

$$B = \mu_0\,(n/\ell)\,I\,,$$

die Selbstinduktivität ist gemäß Gleichung 28.11

$$L = \mu_0^2\,(n/\ell)^2\,A\,\ell$$

mit A als Querschnittsfläche und ℓ als Länge der Spule. Wir setzen in Gleichung 28.19 $B/(\mu_0\,(n/\ell))$ für I und $\mu_0\,(n/\ell)^2\,A\,\ell$ für L ein und erhalten

$$E_{\mathrm{mag}} = \frac{1}{2}L\,I^2 = \frac{1}{2}\mu_0\,(n/\ell)^2\,A\,\ell\left(\frac{B}{\mu_0\,(n/\ell)}\right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}A\,\ell\,.$$

BEISPIEL 28.12: Energiedichte eines elektromagnetischen Felds

In einem bestimmten Gebiet des Raums überlagern einander ein homogenes Magnetfeld mit einer Stärke von 0,020 T und ein homogenes elektrisches Feld mit einer Stärke von $2{,}5 \cdot 10^6$ N/C. Berechnen Sie a) die Energiedichte des elektromagnetischen Felds und b) die Energie in einem kubischen Volumen mit der Kantenlänge $\ell = 12$ cm.

Problembeschreibung: Die Gesamtenergiedichte w_{em} ist die Summe der Energiedichten des elektrischen und des magnetischen Felds, $w_{\text{em}} = w_{\text{el}} + w_{\text{mag}}$. Die Energie in einem Volumen V ergibt sich durch die Beziehung $E = w_{\text{em}}\, V$.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Berechnen Sie die Energiedichte des elektrischen Felds:

$$w_{\text{el}} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,E^2 = \frac{1}{2}(8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)\cdot(2{,}5\cdot 10^6\ \text{N/C})^2 = 27{,}7\ \text{J/m}^3$$

2. Berechnen Sie nun die Energiedichte des magnetischen Felds:

$$w_{\text{mag}} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{(0{,}02\ \text{T})^2}{2\left(4\pi\cdot 10^{-7}\ \text{N/A}^2\right)} = 159\ \text{J/m}^3$$

3. Die Gesamtenergiedichte des elektromagnetischen Felds ergibt sich als Summe der Resultate der Schritte 1 und 2:

$$w_{\text{em}} = w_{\text{el}} + w_{\text{mag}} = 27{,}7\ \text{J/m}^3 + 159\ \text{J/m}^3 = \boxed{187\ \text{J/m}^3}$$

Teilaufgabe b

Die Gesamtenergie im angegebenen Volumen ist $E = w_{\text{em}}\,V$ mit $V = \ell^3$:

$$E = w_{\text{em}}\,V = w_{\text{em}}\,\ell^3 = (187\ \text{J/m}^3)\cdot(0{,}12\ \text{m})^3 = \boxed{0{,}323\ \text{J}}$$

Dabei ist $A\,\ell$ das von der Spule umschlossene Volumen, in dem das Magnetfeld herrscht. Die Energie pro Volumeneinheit ist dann die **Energiedichte des Magnetfelds**

$$w_{\text{mag}} = \frac{B^2}{2\mu_0}\,. \qquad (28.20)$$

ENERGIEDICHTE DES MAGNETFELDS

Wir haben diese Beziehung für einen speziellen Fall, die lange Zylinderspule, hergeleitet. Trotzdem gilt sie allgemein. Gleichung 28.20 gibt die Energiedichte eines beliebigen Magnetfelds im Raum an. Machen Sie sich die Ähnlichkeit dieses Ausdrucks mit der Gleichung für die Energiedichte eines elektrischen Felds w_{el} bewusst (Gleichung 24.13):

$$w_{\text{el}} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,E^2\,.$$

Wie Beispiel 28.12 illustriert, entspricht die Gesamtenergiedichte eines elektromagnetischen Felds der Summe aus w_{el} und w_{mag}.

28.8 *RL*-Stromkreise*

Der Stromkreis in Abbildung 28.29 enthält einen Widerstand und eine Spule. Solche Schaltungen nennt man ***RL*-Kreise**. Da alle Stromkreise bei Raumtemperatur einen Widerstand und eine Selbstinduktivität aufweisen, kann die folgende Analyse des RL-Kreises prinzipiell verallgemeinert werden. (Alle realen Stromkreise haben außerdem eine bestimmte Kapazität. Wir werden dies allerdings erst in Kapitel 29 besprechen, wenn wir uns mit Wechselstromkreisen befassen. Vorläufig vereinfachen wir die Analyse, indem wir die Kapazität vernachlässigen und uns auf die Induktivität konzentrieren.)

Aus der Anwendung der Kirchhoff'schen Maschenregel auf den Stromkreis aus Abbildung 28.29 ergab sich Gleichung 28.17:

$$U_0 - I\,R - L\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0\,.$$

Bevor wir diese Gleichung lösen, wollen wir einige allgemeine Eigenschaften des Stroms betrachten. Unmittelbar nach dem Schließen des Schalters ist die Stromstärke im Kreis null; also ist auch $I\,R$ null, und die negative Induktionsspannung $L\,\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ ist gleich der Spannung der Batterie, U_0. Für $I=0$ erhalten wir aus Gleichung 28.17

$$\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right|_{I=0} = \frac{U_0}{L}\,. \qquad (28.21)$$

Steigt die Stromstärke an, so nimmt $I\,R$ zu und $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ ab. Beachten Sie dabei, dass der Strom nicht abrupt von null auf einen endli-

BEISPIEL 28.13: Stromstärke in einer Spule

Eine Spule mit einer Selbstinduktivität von 5 mH und einem Widerstand von 15 Ω wird mit einer 12-V-Spannungsquelle mit vernachlässigbarem Innenwiderstand verbunden. a) Wie groß ist die maximale Stromstärke? b) Wie groß ist die Zeitkonstante des Stromkreises? c) Wie lange (in Vielfachen der Zeitkonstante) dauert es, bis die Stromstärke 99 % ihres Endwerts erreicht hat?

Problembeschreibung: Die maximale Stromstärke ist erreicht, wenn $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t = 0$ ist (siehe Gleichung 28.22). Gleichung 28.23 gibt die Zeitabhängigkeit der Stromstärke an: $I = I_\mathrm{E}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$ mit $\tau = L/R$.

Lösung:

1. Die maximale Stromstärke berechnen Sie aus Gleichung 28.22:

$$I_\mathrm{E} = \frac{U_0}{R} = \frac{12\ \mathrm{V}}{15\ \Omega} = \boxed{0{,}800\ \mathrm{A}}$$

2. Berechnen Sie nun die Zeitkonstante τ:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{H}}{15\ \Omega} = \boxed{333\ \mu\mathrm{s}}$$

3. Mit Hilfe von Gleichung 28.23 erhalten Sie die Zeit t, für die $I = 0{,}99\, I_\mathrm{E}$ ist:

$$I = I_\mathrm{E}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$$

$$\mathrm{e}^{-t/\tau} = \left(1 - \frac{I}{I_\mathrm{E}}\right) \quad \text{also} \quad -\frac{t}{\tau} = \ln\left(1 - \frac{I}{I_\mathrm{E}}\right)$$

und folglich

$$t = -\tau \ln\left(1 - \frac{I}{I_\mathrm{E}}\right) = -\tau \ln(1 - 0{,}99)$$

$$= -\tau \ln(0{,}01) = +\tau \ln(100) = \boxed{4{,}61\tau}$$

Kommentar: Nachdem fünf Zeitkonstanten vergangen sind, hat der Strom über 99 % seines Maximalwerts erreicht.

ÜBUNG: Wie viel Energie ist in der Spule gespeichert, nachdem die maximale Stromstärke erreicht wurde? (*Lösung:* $E_\mathrm{mag} = \frac{1}{2} L I_\mathrm{E}^2 = 1{,}6 \cdot 10^{-3}$ J.)

chen Wert springen kann, weil die Induktivität des Stromkreises ungleich null ist. Wenn L nicht vernachlässigt werden kann, ist $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ endlich und die Stromstärke über der Zeit stetig. Nach kurzer Zeit hat der Strom einen positiven Wert I erreicht. Die Änderungsrate des Stroms kurz nach dem Schließen des Schalters ist

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{U_0}{L} - \frac{IR}{L}.$$

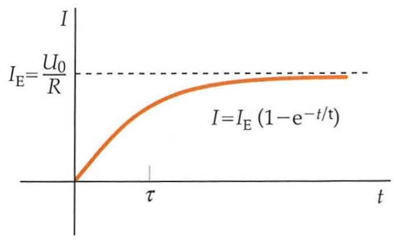
Zu diesem Zeitpunkt nimmt der Strom noch zu, inzwischen aber langsamer als zum Zeitpunkt $t = 0$. Den Endwert der Stromstärke I_E erhalten wir, indem wir $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ gleich null setzen:

$$I_\mathrm{E} = \frac{U_0}{R}. \tag{28.22}$$

In Abbildung 28.30 wurde der Strom in dem beschriebenen Stromkreis als Funktion der Zeit aufgetragen. Beachten Sie die Analogie zum Verlauf der Ladung eines Kondensators als Funktion der Zeit, wenn der Kondensator in einem RC-Kreis aufgeladen wird (Abbildung 25.41).

Gleichung 28.17 hat dieselbe Form wie Gleichung 25.36 für die Aufladung eines Kondensators, und wir lösen sie in analoger Weise durch Variablentrennung und Integration:

$$I = \frac{U_0}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-(R/L)t}\right) = I_\mathrm{E}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right). \tag{28.23}$$

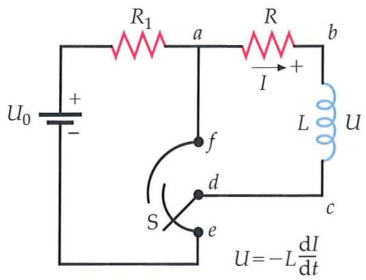


28.30 Die Stromstärke in einem RL-Kreis als Funktion der Zeit. Zum Zeitpunkt $t = \tau = L/R$ hat der Strom 63 % seines Maximalwerts U_0/R erreicht.

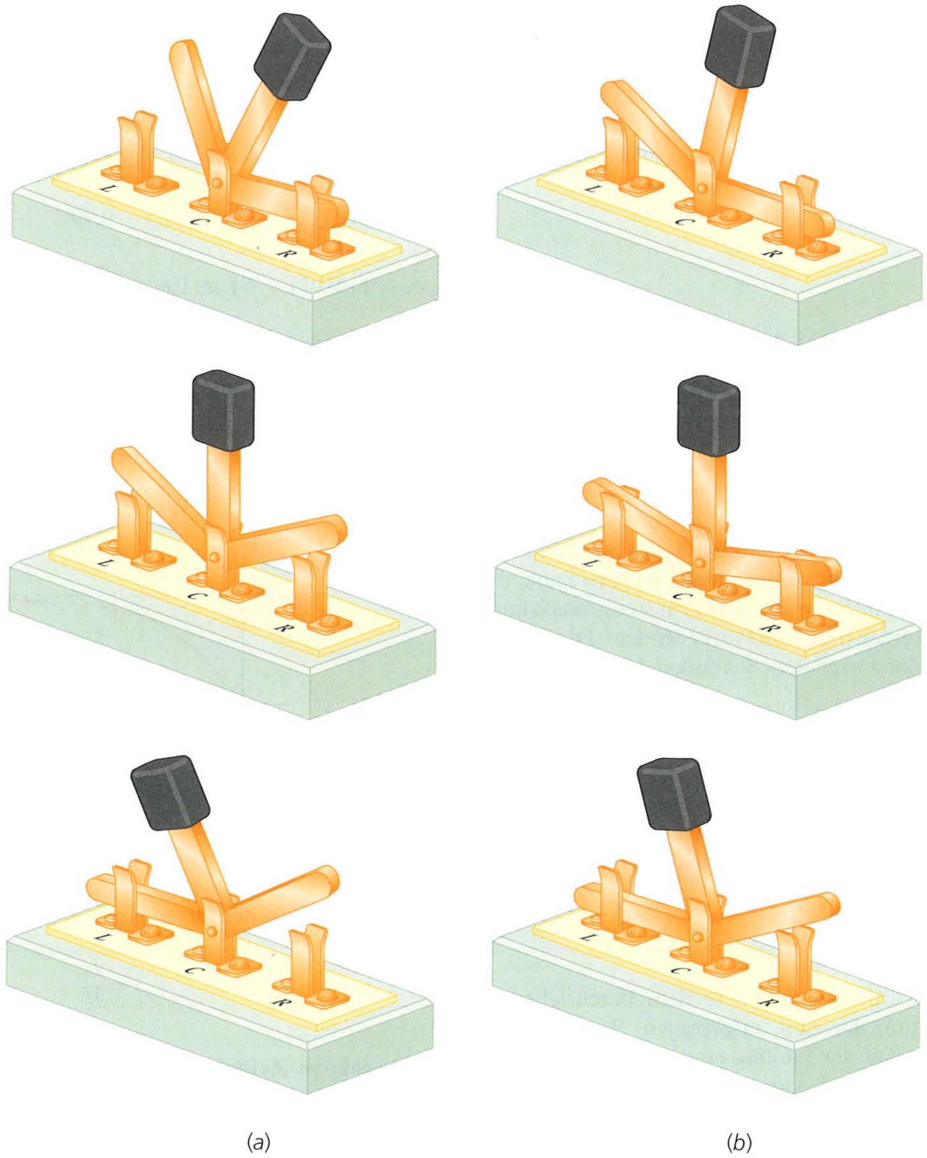
Hier ist $I_\mathrm{E} = U_0/R$ der Strom bei $t \to \infty$ und

$$\tau = \frac{L}{R} \tag{28.24}$$

die **induktive Zeitkonstante** des Stromkreises. Je größer die Selbstinduktivität L und je kleiner der Widerstand R ist, desto länger dauert es, bis die Stromstärke einen vorgegebenen Bruchteil ihres Endwerts I_E erreicht hat – wie Beispiel 28.13 illustriert.



28.31 Ein RL-Stromkreis mit unterbrechungslosem Umschalter: Die Batterie kann aus dem Stromkreis entfernt werden, ohne dass der Stromfluss durch die Spule unterbrochen wird. Der Spulenstrom erreicht seinen Maximalwert, wenn der Schalter auf Position e steht. Anschließend wird der Schalter schnell auf Position f umgelegt.



28.32 a) Umschaltkontakte arbeiten in der Regel mit Unterbrechung: Die Verbindung R wird unterbrochen, bevor die Verbindung L geschlossen wird. b) Bei einem unterbrechungslosen Umschalter wird die zweite Verbindung bereits geschlossen, bevor die erste unterbrochen wird. Befindet sich der Schalter in Mittelposition, so sind beide Verbindungen hergestellt.

BEISPIEL 28.14: Wärmeerzeugung am Widerstand

Wie viel Energie wird an dem Widerstand aus Abbildung 28.31 in Wärme umgewandelt, wenn der Spulenstrom von seinem Maximalwert I_0 auf null abfällt?

Problembeschreibung: Die am Widerstand umgesetzte Leistung $I^2 R$ ist eine Funktion der Zeit. Die gesamte Energiemenge erhalten wir deshalb durch Integration.

Lösung:

1. Die umgesetzte Leistung ist $I^2 R$: $$P = I^2 R$$

2. Die in Wärme umgesetzte potenzielle Energie E_{el} erhalten Sie durch Intergration von $P\,\mathrm{d}t$ in den Grenzen $t=0$ und $t=\infty$: $$E_{\text{el}} = \int_0^\infty I^2 R\,\mathrm{d}t$$

3. Den Strom I gibt Gleichung 28.26 an: $$I = I_0\,\mathrm{e}^{-(R/L)t}$$

4. Setzen Sie diesen Ausdruck für den Strom in das Integral aus Schritt 2 ein: $$E_{\text{el}} = \int_0^\infty I^2 R\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty I_0^2\,\mathrm{e}^{-2(R/L)t} R\,\mathrm{d}t$$ $$= I_0^2 R \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2(R/L)t}\,\mathrm{d}t$$

5. Die Integration erfolgt durch Substitution ($x=2Rt/L$): $$E_{\text{el}} = I_0^2 R \frac{\mathrm{e}^{-2(R/L)t}}{-2(R/L)}\Bigg|_0^\infty = I_0^2 R \frac{-L}{2R}(0-1) = \boxed{\tfrac{1}{2} L I_0^2}$$

! Plausibilitätsprüfung: Die insgesamt in Wärme umgewandelte Energie ist gleich der zu Beginn in der Spule gespeicherten Energie $\frac{1}{2} L I_0^2$.

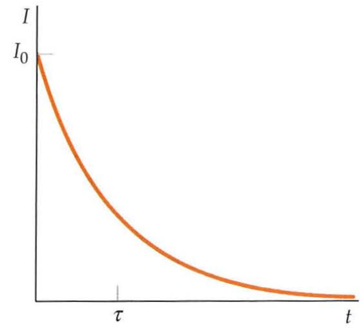
Der Stromkreis in Abbildung 28.31 enthält einen unterbrechungslosen Umschalter. So kann die Batterie aus dem Kreis ausgekoppelt werden, ohne dass der Stromfluss durch die Spule unterbrochen wird. Der Schutzwiderstand R_1 verhindert, dass die Batterie beim Umlegen des Schalters kurzgeschlossen wird. Zu Beginn des Versuchs befinde sich der Schalter in Position *e*. Batterie, beide Widerstände und die Spule sind jetzt in Reihe geschaltet; es handelt sich also um einen Stromkreis, wie wir ihn eben besprochen haben, mit dem einzigen Unterschied, dass der Gesamtwiderstand nun $R_1 + R$ ist und der Maximalstrom folglich $U/(R_1+R)$. Wir nehmen an, dass der Schalter diese Position bereits eine Zeit lang eingenommen hat und sich der Endwert des Stroms einstellen konnte, den wir I_0 nennen wollen. Zum Zeitpunkt $t=0$ legen wir den Schalter rasch auf die Position *f* um. Die Spannungsquelle brauchen wir nun nicht mehr zu berücksichtigen; unser Stromkreis *abcda* enthält lediglich den Widerstand R und die Spule, es fließt der Strom I_0. Wir wenden die Kirchhoff'sche Maschenregel auf diesen Kreis an:

$$-IR - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Durch Variablentrennung erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}I}{I} = -\frac{R}{L}\,\mathrm{d}t. \tag{28.25}$$

Gleichung 28.25 hat die gleiche Form wie Gleichung 25.31 für die Entladung eines Kondensators. Wir integrieren und lösen nach I auf:



28.33 Die Stromstärke im Kreis aus Abbildung 28.31 nimmt exponentiell mit der Zeit ab.

$$I = I_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{28.26}$$

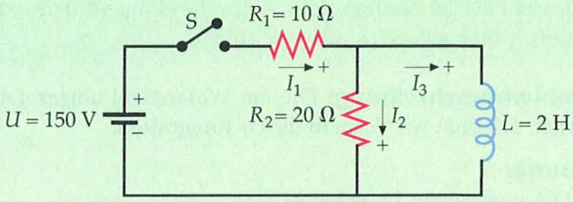
mit $\tau = L/R$ als Zeitkonstante. In Abbildung 28.33 ist die Stromstärke als Funktion der Zeit aufgetragen.

ÜBUNG: Berechnen Sie die Zeitkonstante eines Stromkreises mit einem Widerstand von 85 Ω und einer Induktivität von 6 mH.
(*Lösung:* 70,6 µs.)

In den Beispielen 28.14 und 28.15 wird der exponentielle Stromabfall herangezogen, um die umgewandelte Energie bzw. den Potenzialabfall zu bestimmen.

BEISPIEL 28.15: Anfangsstrom und Maximalstrom

Betrachten Sie den in Abbildung 28.34 skizzierten Stromkreis und berechnen Sie die Stromstärken I_1, I_2 und I_3 a) unmittelbar nach dem Schließen des Schalters S und b) lange nachdem der Schalter geschlossen wurde. – Nachdem der Schalter eine lange Zeit geschlossen war, wurde er wieder geöffnet. Berechnen Sie c) die drei Stromstärken und d) den Spannungsabfall am Widerstand $R_2 = 20\ \Omega$ unmittelbar nach dem Öffnen des Schalters. e) Wie groß sind die drei Stromstärken, nachdem der Schalter lange geöffnet war?



28.34

Problembeschreibung: a) Um unsere Analyse zu vereinfachen, machen wir uns zunutze, dass der Strom durch eine Spule sich nicht abrupt ändern kann. Bevor der Schalter geschlossen wird, ist der Spulenstrom null; unmittelbar nach dem Schließen des Schalters muss der Spulenstrom demnach ebenfalls null sein. b) Hat der Strom seinen Endwert erreicht, so ist dI/dt und deshalb auch der Spannungsabfall an der Spule null. Die Spule wirkt dann wie ein Nullwiderstand (wie ein gerader Leiter, dessen Widerstand null ist). c) und d) Unmittelbar nach dem Öffnen des Schalters ist die Stromstärke genauso groß wie kurz zuvor. e) Nachdem der Schalter lange Zeit geöffnet war, müssen alle der Ströme auf null gefallen sein.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Der Schalter wurde gerade geöffnet. Der Spulenstrom ist null (wie kurz vor dem Öffnen). Die Knotenregel liefert die Beziehung zwischen I_1 und I_2:

$$I_3 = \boxed{0}$$

$$I_1 = I_2 + I_3$$

also

$$I_1 = I_2$$

2. Den Strom in der linken Schleife erhalten Sie durch Anwendung der Maschenregel:

$$U - I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0$$

und folglich

$$I_1 = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{150\ \text{V}}{10\ \Omega + 20\ \Omega} = \boxed{5\ \text{A}} = I_2$$

Teilaufgabe b

1. Nachdem eine längere Zeit vergangen ist, sind alle Ströme stationär und die Spule wirkt wie ein Nullwiderstand. Der Spannungsabfall an R_2 ist deshalb null. Wenden Sie die Maschenregel auf die rechte Schleife an und lösen Sie nach I_2 auf:

$$-L\frac{dI_3}{dt} + I_2 R_2 = 0$$

$$0 + I_2 R_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \boxed{0}$$

2. Wenden Sie nun die Maschenregel auf die linke Schleife an und lösen Sie nach I_1 auf:

$$U - I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0$$

$$U - I_1 R_1 - 0 = 0$$

also

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{150\ \text{V}}{10\ \Omega} = \boxed{15\ \text{A}}$$

3. Rechnen Sie I_3 mit Hilfe der Knotenregel aus:

$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$15\ \text{A} = 0 + I_3$$

$$I_3 = \boxed{15\ \text{A}}$$

Teilaufgabe c

Wenn der Schalter wieder geöffnet wird, fällt I_1 *sofort* auf null ab. Der Spulenstrom hingegen geht allmählich zurück, im Moment des Öffnens ist er also noch $I_3 = 15$ A. Durch Anwendung der Knotenregel erhalten Sie I_2:

$$I_3 = \boxed{15\ \mathrm{A}}$$

$$I_1 = I_2 + I_3$$

also

$$I_2 = I_1 - I_3 = 0 - 15\ \mathrm{A} = \boxed{-15\ \mathrm{A}}$$

Teilaufgabe d

Den Spannungsabfall am Widerstand R_2 liefert das Ohm'sche Gesetz:

$$U_R = I_2\,R_2 = (-15\ \mathrm{A}) \cdot (20\ \Omega) = \boxed{-300\ \mathrm{V}}$$

Teilaufgabe e

Nachdem der Schalter lange geöffnet war, müssen alle Stromstärken auf null gefallen sein:

$$I_1 = I_2 = I_3 = \boxed{0}$$

Kommentar: Vielleicht sind Sie überrascht, dass der Spannungsabfall am Widerstand R_2 in Teilaufgabe d größer ist als die Batteriespannung – er ist gleich der Induktionsspannung der Spule.

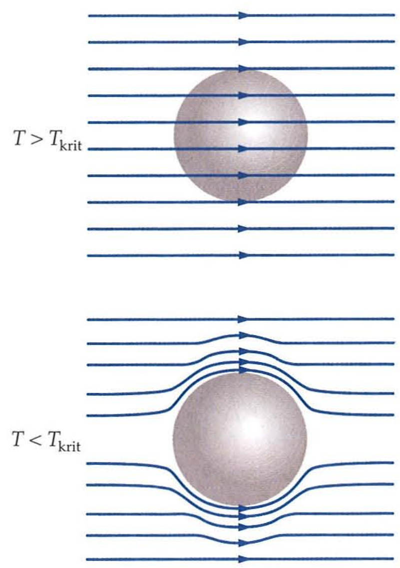
ÜBUNG: Im skizzierten Stromkreis sei $R_2 = 200\ \Omega$, der Schalter sei bereits lange Zeit geschlossen. Wie groß ist der Spannungsabfall an R_2 unmittelbar nach dem Öffnen des Schalters? (*Lösung:* 3000 V.)

28.9 Magnetische Eigenschaften von Supraleitern*

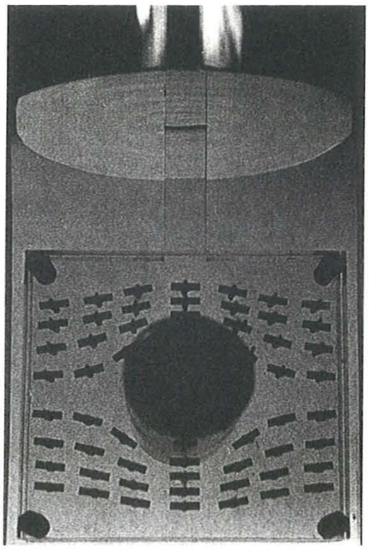
Der elektrische Widerstand supraleitender Materialien ist unterhalb einer materialabhängigen kritischen Temperatur T_{krit} (auch als Sprungtemperatur bezeichnet) null. In Anwesenheit eines Magnetfelds $\boldsymbol{B}$ ist T_{krit} niedriger als ohne Feld, und zwar umso niedriger, je stärker das Feld ist. Überschreitet die Magnetfeldstärke einen kritischen Wert B_{krit}, so gibt es keine Temperatur mehr, unterhalb derer das Material supraleitend wird.

Der Meißner-Ochsenfeld-Effekt

Wird ein Supraleiter in einem Magnetfeld auf Temperaturen unterhalb seiner kritischen Temperatur abgekühlt, so wird das Magnetfeld innerhalb des Materials null (Abbildung 28.35), wie Walter Meißner und Robert Ochsenfeld 1933 erstmals beobachteten. Diese heute als **Meißner-Ochsenfeld-Effekt** bezeichnete Erscheinung beruht darauf, dass an der Oberfläche des Supraleiters Supraströme induziert werden, die ihrerseits ein dem äußeren Feld entgegengerichtetes Magnetfeld erzeugen; die beiden Felder kompensieren einander im Inneren des Materials. Das magnetische Schweben („Levitation"; siehe Foto) beruht auf der Abstoßung zwischen dem Magnetfeld eines Permanentmagneten und dem Magnetfeld, das durch die in einem Supraleiter induzierten Ströme zustande kommt. Nur in bestimmten, so genannten **Typ-I-Supraleitern** tritt ein vollständig ausgebildeter Meißner-Ochsenfeld-Effekt auf. Für einen solchen Supraleiter wurde in Abbildung 28.36a das Produkt aus Magnetisierung M und μ_0 als Funktion des äußeren Magnetfelds B_{aus} aufgetragen. Bei Magnetfeldstärken unterhalb des kritischen Werts B_{krit} ist das im Supraleiter induzierte Feld $\mu_0 M$ dem äußeren Feld vom Betrag her gleich, aber entgegengesetzt gerichtet. Für Typ-I-Supraleiter sind die Werte von B_{krit} so klein, dass sich die Materialien nicht als Wicklungen supraleitender Magnete eignen.



28.35 Meißner-Ochsenfeld-Effekt in einer supraleitenden Kugel, die in einem konstanten äußeren Magnetfeld abgekühlt wird. Fällt die Temperatur unter den kritischen Wert T_{krit}, so wird das Magnetfeld innerhalb der Kugel null.



Versuch zur Demonstration des Meißner-Ochsenfeld-Effekts. Ein supraleitender Zylinder aus Zinn befindet sich in einem Magnetfeld, das senkrecht zu seiner Längsachse zeigt. Die Richtungen der Feldlinien werden durch schwach magnetisierte, zwischen Luzitscheiben drehbar gelagerte Kompassnadeln sichtbar gemacht.

Das magnetische Schweben beruht auf der Abstoßung zwischen dem Magnetfeld des Permanentmagneten und dem Magnetfeld, das die im Supraleiter induzierten Ströme erzeugen.

Typ-II-Supraleiter weisen Magnetisierungskurven ähnlich Abbildung 28.36b auf. Meist handelt es sich um Legierungen oder Metalle, die im normalleitenden Zustand einen großen Widerstand besitzen. Typ-II-Supraleiter unterscheiden sich in ihren elektrischen Eigenschaften nur im Bereich zwischen $B_{\mathrm{krit},1}$ und einer zweiten kritischen Magnetfeldstärke $B_{\mathrm{krit},2}$, die mehrere hundert Male höher sein kann als $B_{\mathrm{krit},1}$, von anderen Supraleitern. Felder schwächer als $B_{\mathrm{krit},1}$ bewirken einen vollständigen Meißner-Ochsenfeld-Effekt. Die gesamte Probe ist dann supraleitend, wie es bei einem Typ-I-Supraleiter der Fall ist. Zwischen $B_{\mathrm{krit},1}$ und $B_{\mathrm{krit},2}$ durchdringt das Magnetfeld die Probe nur teilweise, wobei die Feldlinien zu Flusswirbeln (Vortices) zusammengepresst sind. Oberhalb von $B_{\mathrm{krit},2}$ ist das Material normalleitend. – Für die Legierung Nb_3Ge beispielsweise liegt $B_{\mathrm{krit},2}$ bei 34 T. Werkstoffe dieser Art können zum Bau starker supraleitender Magnete verwendet werden.

Die Flussquantisierung

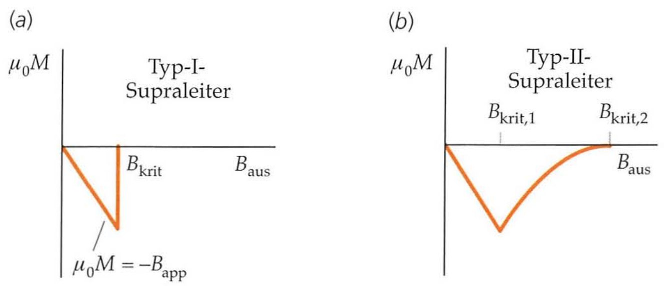
Wir betrachten einen stromdurchflossenen supraleitenden Ring, der die Fläche $\boldsymbol{A}$ umschließt. Der Strom im Ring (und gegebenenfalls auch Ströme außerhalb des Rings) erzeugt einen magnetischen Fluss $\Phi_{\mathrm{mag}} = B_{\mathrm{n}}\,A$ durch $\boldsymbol{A}$. Ändert sich der Fluss durch $\boldsymbol{A}$, so wird gemäß Gleichung 28.5 eine Spannung im Ring induziert, die der Änderungsrate des Flusses proportional ist. Ein Supraleiter hat aber keinen elektrischen Widerstand, und eine induzierte endliche Spannung würde einen unendlichen Strom bewirken. Aus diesem Grund kann sich der magnetische Fluss durch die Fläche nicht ändern, er ist sozusagen eingefroren.

Aus der quantenmechanischen Behandlung der Supraleitung folgt, dass der Gesamtfluss durch die umschlossene Fläche $\boldsymbol{A}$ gequantelt ist und nur die Werte

$$\Phi_{\mathrm{mag}} = n\,\frac{h}{2e} \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{28.27}$$

annehmen kann. Die kleinste Einheit des Flusses, das **Flussquant** oder **Fluxon**, ist

$$\Phi_{\mathrm{mag},0} = \frac{h}{2e} = 2{,}0678 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{T \cdot m^2}\,. \tag{28.28}$$



28.36 Das Produkt aus μ_0 und der Magnetisierung M, aufgetragen als Funktion des äußeren Magnetfelds, für Typ-I- und Typ-II-Supraleiter. a) In einem Typ-I-Supraleiter ist das resultierende Magnetfeld unterhalb einer kritischen äußeren Feldstärke $B_{\mathrm{krit},1}$ null, weil das Feld, das durch die an der Oberfläche induzierten Ströme erzeugt wird, das äußere Feld exakt aufhebt. Oberhalb des kritischen Felds verhält sich das Material wie ein normaler Leiter mit einer Magnetisierung, die so schwach ist, dass man sie im Maßstab dieses Diagramms nicht erkennt. b) Einen Typ-II-Supraleiter beginnt das Magnetfeld bei $B_{\mathrm{krit},1}$ zu durchdringen, jedoch bleibt das Material bis $B_{\mathrm{krit},2}$ supraleitend. Oberhalb dieses kritischen Werts geht es in den normalleitenden Zustand über.

Zusammenfassung

1. Das Faraday'sche Gesetz und die Lenz'sche Regel gehören zu den Grundgesetzen der Physik.
2. Die Selbstinduktivität eines Bauelements bringt die Beziehung zwischen dem magnetischen Fluss durch das Element und der Stromstärke zum Ausdruck.

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen	
1. Magnetischer Fluss		
Definition	$\Phi_{\mathrm{mag}} = \int_A \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$	(28.1)
Homogenes Feld; ebene Fläche, umschlossen von einer Spule mit n Windungen	$\Phi_{\mathrm{mag}} = n\,\lvert\boldsymbol{B}\rvert\,\lvert\boldsymbol{A}\rvert \cos\theta$ mit A als ebener Fläche, die von einer Windung umschlossen wird.	(28.3)
Einheit	$1\ \mathrm{Wb} = 1\ \mathrm{T} \cdot \mathrm{m}^2$	(28.2)
In einem Stromkreis	$\Phi_{\mathrm{mag}} = L\,I$	(28.9)
In zwei benachbarten Stromkreisen	$\Phi_{\mathrm{mag},1} = L_1 I_1 + L_{1,2} I_2$ $\Phi_{\mathrm{mag},2} = L_2 I_2 + L_{2,1} I_1$	(28.14)
Quantisierung	$\Phi_{\mathrm{mag}} = n\,\frac{h}{2\,e}$ mit $n = 1, 2, 3, \ldots$	(28.27)
Fluxon	$\Phi_{\mathrm{mag},0} = \frac{h}{2\,e} = 2{,}0678 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{T} \cdot \mathrm{m}^2$	(28.28)
2. Induktionsspannung		
Faraday'sches Gesetz (auch für Induktion durch Bewegung)	$U_{\mathrm{ind}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{mag}}}{\mathrm{d}t}$	(28.4)
Induktion (zeitabhängiges Magnetfeld, C stationär)	$U_{\mathrm{ind}} = \oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$	(28.5)
Induktion durch Bewegung (statisches Magnetfeld, C nicht stationär)	$U_{\mathrm{ind}} = \oint_C (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ mit $\boldsymbol{v}$ als Geschwindigkeit des Leiters.	(28.8)
Senkrecht zu seiner Längsachse und zu $\boldsymbol{B}$ bewegter Stab	$U_{\mathrm{ind}} = \lvert\boldsymbol{v}\rvert\,\lvert\boldsymbol{B}\rvert\,\ell$	(28.6)
Selbstinduktion (Gegenspannung)	$U_{\mathrm{ind}} = -L\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$	(28.12)
3. Faraday'sches Gesetz	$U_{\mathrm{ind}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{mag}}}{\mathrm{d}t}$	(28.4)
4. Lenz'sche Regel	Die von einer Zustandsänderung verursachte Induktionsspannung und der dadurch hervorgerufene Induktionsstrom sind stets so gerichtet, dass sie ihrer Ursache entgegenzuwirken suchen.	
Alternative Formulierung	Ändert sich der magnetische Fluss durch eine Fläche, so wird ein Strom induziert, der seinerseits ein Magnetfeld und damit einen magnetischen Fluss durch dieselbe Fläche hervorruft, der seiner Ursache entgegengesetzt gerichtet ist.	

5. Induktivität		
Selbstinduktivität	$L = \dfrac{\Phi_{\text{mag}}}{I}$	(28.9)
Selbstinduktivität einer Zylinderspule	$L = \mu_0\,(n/\ell)^2 A\,\ell$	(28.11)
Gegeninduktion	$L_{2,1} = \dfrac{\Phi_{\text{mag},2,1}}{I_1} = \dfrac{\Phi_{\text{mag},1,2}}{I_2} = L_{1,2}$	(28.16)
Einheiten	$1\ \text{H} = 1\dfrac{\text{Wb}}{\text{A}} = 1\dfrac{\text{T}\cdot\text{m}^2}{\text{A}}$ $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\ \text{H/m}$	
6. Energie des Magnetfelds		
In einer Spule gespeicherte Energie	$E_{\text{mag}} = \dfrac{1}{2}\,L\,I^2$	(28.19)
Energiedichte im Magnetfeld	$w_{\text{mag}} = \dfrac{B^2}{2\mu_0} = \dfrac{1}{2}\,\mu_0^{-1}\,B^2$	(28.20)
7. *RL*-Stromkreise*		
Spannungsabfall an einer Spule	$U_L = U_{\text{ind}} - I\,R = -L\,\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} - I\,R$ mit R als Innenwiderstand der Spule; für eine ideale Spule gilt $R=0$.	(28.13)
Energiezufuhr aus einer Spannungsquelle an eine Spule	In einer Reihenschaltung aus einem Widerstand R, einer Spule L und einer Spannungsquelle U_0 erreicht der Strom nach Einschalten der Quelle seinen Maximalwert I_E nicht sofort, sondern erst nach einer bestimmten Zeit. Ist die Stromstärke im Moment des Einschaltens ($t=0$) null, so ist sie zu einem späteren Zeitpunkt t gegeben durch $I = \dfrac{U_0}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) = I_{\text{E}}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right).$	(28.23)
Zeitkonstante τ	$\tau = \dfrac{L}{R}$	(28.24)
Abbau der Feldenergie einer Spule über einen Widerstand	In einer Reihenschaltung aus einem Widerstand R und einer Spule L fällt der Strom nicht sofort, sondern erst im Laufe einer bestimmten Zeit auf null ab. Ist die Stromstärke zu Beginn ($t=0$) gleich I_0, so beträgt sie zu einem späteren Zeitpunkt t $I = I_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}.$	(28.26)

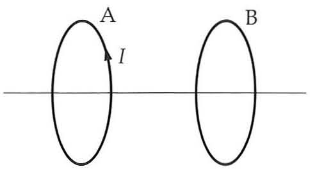
Aufgaben

Gelegentlich enthalten die Aufgaben mehr Angaben, als für die Lösung erforderlich sind. Bei einigen anderen dagegen werden Daten aus dem Allgemeinwissen, aus anderen Quellen oder sinnvolle Schätzungen benötigt.

- • Einfache Aufgaben mit nur einem Rechenschritt.
- •• Mittelschwere Aufgaben, können die Kombination verschiedener Konzepte erfordern.
- ••• Anspruchsvolle Aufgaben.

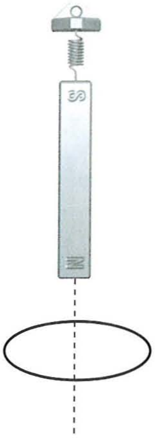
Verständnisaufgaben

28.1 •• Zwei Leiterschleifen sind parallel zueinander angeordnet (Abbildung 28.37). In der Schleife A fließt, von links gegen die Ebenen der Schleifen gesehen, ein Strom entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn. In welcher Richtung fließt der Strom in Schleife B, wenn die Stromstärke in A a) zunimmt und b) abnimmt? Geben Sie jeweils an, ob die Schleifen einander abstoßen oder anziehen.



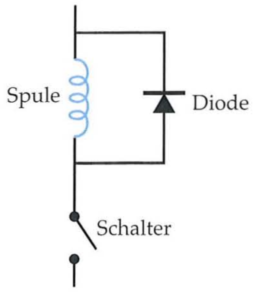
28.37 Zu Aufgabe 28.1.

28.2 •• Ein Stabmagnet ist so am Ende einer Spiralfeder befestigt, dass er eine einfache harmonische Bewegung entlang der Achse einer Leiterschleife ausführt (Abbildung 28.38). a) Skizzieren Sie qualitativ den Verlauf des Flusses Φ_{mag} durch die Schleife in Abhängigkeit von der Zeit. Markieren Sie den Zeitpunkt t_1, zu dem sich der Magnet gerade auf halbem Wege durch die Schleife befindet. b) Skizzieren Sie den Verlauf des Stroms I in der Schleife als Funktion der Zeit. Die Uhrzeigerrichtung, von oben gesehen, soll zu positiven Werten von I gehören.



28.38 Zu Aufgabe 28.2.

28.3 • In Stromkreisen, die ein- und ausgeschaltet werden können, schützt man Spulen häufig durch Parallelschaltung einer Diode (Abbildung 28.39). (Eine Diode ist eine Art Einwegventil für den Strom; dieser kann nur in Pfeilrichtung, nicht entgegengesetzt dazu fließen.) Warum ist ein solcher Schutz erforderlich? Erläutern Sie, wie sich in Abwesenheit der Diode die Spannung an der Spule ändert, wenn der Schalter plötzlich geöffnet wird, während durch die Spule ein Strom fließt.



28.39 Zu Aufgabe 28.3.

28.4 • Ein Stabmagnet wird senkrecht in ein langes Rohr hineingeworfen. Besteht das Rohr aus einem Metall, so erreicht der Magnet rasch seine Endgeschwindigkeit; besteht das Rohr aus Pappe, so dauert es wesentlich länger, bis der Magnet die Endgeschwindigkeit erreicht hat. Erklären Sie dies.

Schätzungs- und Näherungsaufgaben

28.5 • Vergleichen Sie die im elektrischen Feld und im Magnetfeld der Erde gespeicherten Energiedichten. An der Erdoberfläche gilt $E \sim 100$ V/m und $B \sim 5 \cdot 10^{-5}$ T.

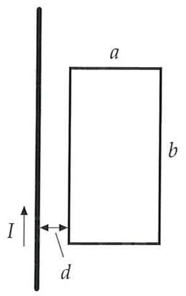
28.6 •• Beim Einschlag eine Blitzes wird innerhalb von ungefähr einer Mikrosekunde eine Ladungsmenge von etwa 30 C vom Himmel in die Erde übertragen. Welche Spannung wird in einer Antenne (einer einfachen Leiterschleife mit einer Querschnittsfläche von 0,1 m^2) induziert, wenn 300 m von ihr entfernt ein Blitz einschlägt?

Der magnetische Fluss

28.7 • Betrachten Sie eine kreisrunde Spule mit 25 Windungen und einem Radius von 5 cm, die sich in der Nähe des Äquators befindet. Das Erdmagnetfeld hat dort eine Stärke von 0,7 G und zeigt nach Norden. Wie groß ist der magnetische Fluss durch die Spule, wenn deren Ebene a) waagerecht, b) senkrecht mit der Achse in Richtung Norden, c) senkrecht mit der Achse in Richtung Osten und d) senkrecht mit der Achse in einem Winkel von 30° zur Nordrichtung orientiert ist?

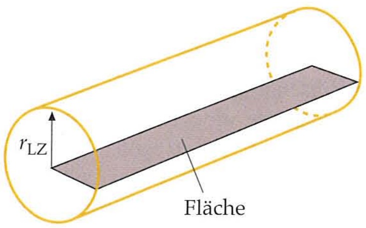
28.8 •• Eine kreisrunde Spule mit 15 Windungen und einem Radius von 4 cm befindet sich in einem homogenen, 4000 G starken, in die positive x-Richtung zeigenden Magnetfeld. Geben Sie den magnetischen Fluss durch die Spule an, wenn der Normalenvektor $\hat{n}$ der Spulenebene wie folgt gerichtet ist: a) $\hat{n}=\hat{x}$, b) $\hat{n}=\hat{y}$, c) $\hat{n}=(\hat{x}+\hat{y})/\sqrt{2}$, d) $\hat{n}=\hat{z}$ und e) $\hat{n}=0{,}6\hat{x}+0{,}8\,\hat{y}$.

28.9 •• Durch einen langen, geraden Leiter fließt ein Strom I. Neben dem Draht befindet sich eine rechteckige Leiterschleife mit den Seitenlängen a und b; die Seite b ist parallel zum Draht angeordnet, der kleinste Abstand zwischen Draht und Schleife ist d (Abbildung 28.40). a) Formulieren Sie einen Ausdruck für den magnetischen Fluss durch die rechteckige Schleife. (*Hinweis:* Betrachten Sie zunächst den Fluss durch einen Streifen mit dem Flächeninhalt $\mathrm{d}A=b\,\mathrm{d}x$ und integrieren Sie dann von $x=a$ bis $x=d+a$.) b) Rechnen Sie den Fluss aus für $a=5$ cm, $b=10$ cm, $d=2$ cm und $I=20$ A.



28.40 Zu Aufgabe 28.9.

28.10 ••• Durch einen langen, zylindrischen Leiter mit dem Radius r_{LZ} fließt homogen über den Querschnitt verteilt ein Strom I. Geben Sie den magnetischen Fluss pro Längeneinheit durch die in Abbildung 28.41 markierte Fläche an.



28.41 Zu Aufgabe 28.10.

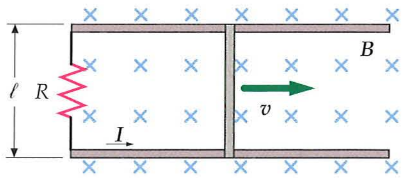
Induktionsspannung und Faraday'sches Gesetz

28.11 •• Eine kreisrunde Spule mit 100 Windungen hat einen Durchmesser von 2 cm und einen Widerstand von 50 Ω. Senkrecht zur Ebene der Spule ist ein homogenes äußeres Magnetfeld mit einer Stärke von 1 T ausgerichtet. Plötzlich kehrt sich die Feldrichtung um. a) Berechnen Sie die insgesamt durch die Spule tretende Ladung. Die Umkehr der Feldrichtung dauere 0,1 s; berechnen Sie b) den mittleren Spulenstrom und c) die mittlere Spannung in der Spule.

28.12 •• Eine kreisrunde Spule mit 300 Windungen und einem Radius von 5 cm ist mit einem Stromintegrator verbunden. Der Gesamtwiderstand des Stromkreises beträgt 20 Ω. Zu Beginn des Versuchs bildet die Ebene der Spule einen Winkel von 90° mit der Richtung des Erdmagnetfelds an einem bestimmten Ort. Dann wird die Spule um 90° gedreht; dabei wird am Stromintegrator eine Ladungsmenge von 9,4 μC abgelesen. Berechnen Sie die Stärke des Erdmagnetfelds an diesem Ort.

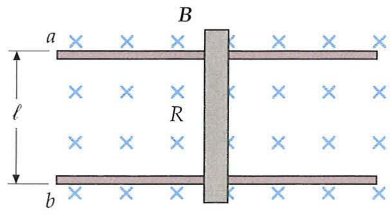
Induktion durch Bewegung

28.13 • Betrachten wir Abbildung 28.42. Es sei $B=0{,}8$ T, $v=10$ m/s, $\ell=20$ cm und $R=2$ Ω. Berechnen Sie a) die im Stromkreis induzierte Spannung, b) den davon hervorgerufenen Strom und c) die zur Bewegung des Stabs mit konstanter Geschwindigkeit erforderliche Kraft (vernachlässigen Sie die Reibung). d) Welche Leistung wird dem System durch die Kraft aus Teilaufgabe c zugeführt? e) Geben Sie die Leistung (Rate der Wärmeerzeugung) I^2R an.



28.42 Zu Aufgabe 28.13.

28.14 •• Der Stab in Abbildung 28.43 habe den Widerstand R, der Widerstand der waagerecht angeordneten Schienen sei vernachlässigbar gering. An die Punkte a und b des Stromkreises sei eine Batterie mit der Spannung U und einem vernachlässigbaren Innenwiderstand angeschlossen, so dass der Strom im Stab von oben nach unten fließt. Zum Zeitpunkt $t=0$ befinde sich der Stab in Ruhe. a) Geben Sie einen Ausdruck für die auf den Stab wirkende Kraft als Funktion von dessen Geschwindigkeit v an. Schreiben Sie das zweite Newton'sche Axiom für den Stab auf, wenn dieser sich mit der Geschwindigkeit v bewegt. b) Zeigen Sie, dass der Stab schließlich eine Endgeschwindigkeit erreicht, mit der er sich weiterbewegt. Geben Sie einen Ausdruck für diese Geschwindigkeit an. c) Wie groß ist die Stromstärke im Kreis, wenn der Stab seine Endgeschwindigkeit erreicht hat?

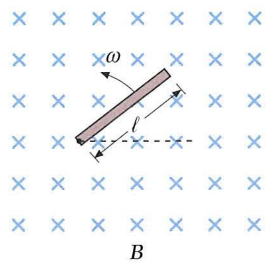


28.43 Zu den Aufgaben 28.14 und 28.15.

28.15 •• Der Stab in Abbildung 28.43 habe den Widerstand R, während der Widerstand der Schienen vernachlässigbar gering sei. An die Punkte a und b sei ein Widerstand mit der Ladung q_0 und der Kapazität C angeschlossen, so dass im Stab von oben nach unten ein Strom fließt. Zum Zeitpunkt $t=0$ befinde sich der Stab in Ruhe. a) Formulieren Sie die Bewegungsgleichung für den Stab auf den Schienen. b) Nach einer bestimmten Zeit erreicht der Stab eine Endgeschwindigkeit. Zeigen Sie, dass diese mit der Endladung des Kondensators verknüpft ist.

28.16 •• Eine quadratische Leiterschleife mit der Fläche A wird mit einer konstanten Kraft F aus einem konstanten, sehr starken, senkrecht zur Ebene der Schleife orientierten Magnetfeld gezogen, wobei sich zu Versuchsbeginn die Hälfte des Drahts innerhalb des Magnetfelds befindet. Zum Herausziehen ist die Zeit t erforderlich. Nun wird die Kraft verdoppelt, alle anderen Parameter bleiben gleich. Welche Zeit wird jetzt zum Herausziehen benötigt: a) t, b) $t/\sqrt{2}$, c) $t/2$ oder d) $t/4$?

28.17 ••• Ein Metallstab mit der Länge ℓ rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eines seiner Enden. Senkrecht zur Rotationsebene orientiert ist ein homogenes Magnetfeld B (Abbildung 28.44). a) Zeigen Sie, dass auf einen Körper mit der Ladung q, der sich im Abstand r von der Drehachse befindet, die magnetische Kraft $B\,q\,r\,\omega$ wirkt. b) Zeigen Sie, dass sich zwischen den Enden des Stabs die Potenzialdifferenz $U = \frac{1}{2}\,B\,\omega\,\ell^2$ aufbaut. c) Zeichnen Sie eine beliebige radial gerichtete Linie in die Rotationsebene ein. Bezüglich dieser Linie soll $\theta = \omega\,t$ gemessen werden. Zeigen Sie, dass die Fläche des Kreisausschnitts, der von dieser Linie und dem Stab begrenzt wird, gegeben ist durch $A = \frac{1}{2}\,\ell^2\,\theta$. Berechnen Sie den magnetischen Fluss durch diese Fläche und zeigen Sie, dass die Anwendung des Faraday'schen Gesetzes auf den Kreisausschnitt die Beziehung $U_{\text{ind}} = \frac{1}{2}\,B\,\omega\,\ell^2$ liefert.



28.44 Zu Aufgabe 28.17.

Induktivität

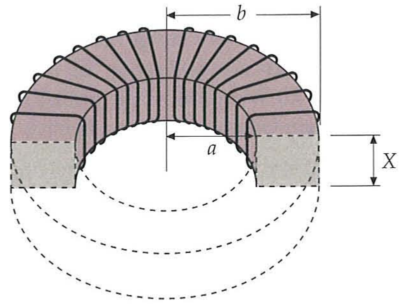
28.18 •• Durch eine 25 cm lange Zylinderspule mit 400 Windungen und einem Radius von 1 cm fließt ein Strom von 3 A. Berechnen Sie a) B auf der Achse im Mittelpunkt der Spule, b) den magnetischen Fluss durch die Spule (B sei homogen), c) die Selbstinduktivität der Spule und d) die in der Spule induzierte Spannung, wenn sich der Strom mit einer Rate von 150 A/s ändert.

28.19 •• Zwei Zylinderspulen mit Radien von 2 cm bzw. 5 cm und mit 300 bzw. 1000 Windungen seien koaxial angeordnet. Beide Spulen sind 25 cm lang. Berechnen Sie die Gegeninduktivität.

28.20 ••• Betrachten Sie eine Ringspule mit rechteckigem Querschnitt (Abbildung 28.45). Zeigen Sie, dass die Induktivität der Spule gegeben ist durch

$$L = \frac{\mu_0\,n^2\,x\,\ln(b/a)}{2\pi}$$

mit n als Anzahl der Windungen, a als innerem Radius, b als äußerem Radius und x als Höhe des Rings.



28.45 Zu Aufgabe 28.20.

Die Energie des Magnetfelds

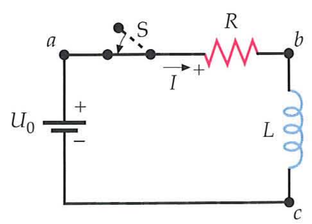
28.21 •• Wir betrachten eine ebene elektromagnetische Welle, etwa eine Lichtwelle. Die Beziehung zwischen der elektrischen und der magnetischen Feldstärke lautet hier $E = c\,B$ mit der Lichtgeschwindigkeit $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}$. Zeigen Sie, dass die Energiedichten des elektrischen und des magnetischen Felds in diesem Fall gleich sind.

28.22 •• Durch eine Zylinderspule mit 2000 Windungen, einer Querschnittsfläche von 4 cm² und einer Länge von 30 cm fließt ein Strom von 4 A. a) Berechnen Sie die in der Spule gespeicherte magnetische Energie aus $\frac{1}{2}\,L\,I^2$. b) Geben Sie die magnetische Energie pro Volumeneinheit in der Spule an; teilen Sie dazu Ihr Ergebnis aus Teilaufgabe a durch das Volumen der Spule. c) Wie groß ist B innerhalb der Spule? d) Berechnen Sie die Energiedichte des Magnetfelds mit Hilfe der Beziehung $w_{\text{mag}} = B^2/2\,\mu_0$ und vergleichen Sie das Resultat mit Ihrem Ergebnis aus Teilaufgabe b.

28.23 •• Die Wicklung einer Ringspule mit einem mittleren Radius von 25 cm und einem kreisrunden Querschnitt, dessen Radius 2 cm beträgt, besteht aus einem supraleitenden Material. Der Wicklungsdraht ist 1000 m lang. Durch die Spule fließt ein Strom von 400 A. a) Wie viele Windungen besitzt die Spule? b) Wie groß ist das Magnetfeld beim mittleren Radius? c) Nehmen Sie an, B sei über der Fläche der Spule konstant. Berechnen Sie die Energiedichte des Magnetfelds und die insgesamt in der Spule gespeicherte Energie.

RL-Stromkreise*

28.24 •• Betrachten Sie den Stromkreis aus Abbildung 28.46; es sei $U_0 = 12$ V, $R = 3\ \Omega$ und $L = 0{,}6$ H. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter geschlossen. Berechnen Sie für den Zeitpunkt $t = 0{,}5$ s a) die von der Batterie abgegebene Leistung, b) die Rate der Wärmeerzeugung und c) die in der Spule gespeicherte Leistung.



28.46 Zu Aufgabe 28.24 und 28.28.

28.25 •• In einem RL-Kreis fließt zum Zeitpunkt $t=0$ kein Strom. Zwischen $t=0$ und $t=4$ s steigt die Stromstärke auf die Hälfte ihres Maximalwerts an. a) Geben Sie die Zeitkonstante des Stromkreises an. b) Wie groß ist die Selbstinduktivität des Stromkreises, wenn sein Gesamtwiderstand gleich 5 Ω ist?

28.26 •• Berechnen Sie aus Gleichung 28.26 den Anfangsanstieg der Funktion $I(t)$, $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ zum Zeitpunkt $t=0$. Zeigen Sie, dass die Stromstärke nach einer Zeitkonstante auf null abgefallen wäre, wenn sie gleichmäßig mit dieser Rate abnähme.

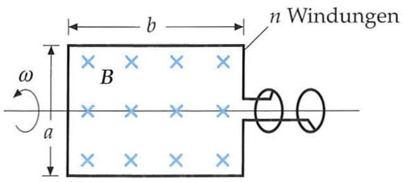
28.27 • Durch eine Spule fließt zu Versuchsbeginn ein Strom von 5 A, der mit einer Rate von 10 A/s zunimmt. Der Spannungsabfall an der Spule ist dann 140 V. Wenn der Strom vom gleichen Anfangswert ausgehend mit der angegebenen Rate abnimmt, beträgt der Spannungsabfall nur 60 V. Geben Sie Widerstand und Selbstinduktivität der Spule an.

28.28 ••• In dem in Abbildung 28.46 skizzierten Stromkreis sei $U_0=12$ V, $R=3$ Ω und $L=0{,}6$ H. Zum Zeitpunkt $t=0$ wird der Schalter geschlossen. Betrachten Sie den Zeitraum zwischen $t=0$ und $t=\tau$. a) Wie viel Energie wird in diesem Zeitraum insgesamt von der Batterie abgegeben? b) Wie viel Energie wird im Widerstand in Wärme umgewandelt? c) Wie viel Energie wird in der Spule gespeichert? (*Hinweis:* Geben Sie die Energie als Funktion der Zeit an und integrieren Sie zwischen $t=0$ und $t=\tau$.)

Allgemeine Aufgaben

28.29 • Senkrecht zu einer kreisrunden Spule mit sechs Windungen und einem Radius von 3 cm ist ein Magnetfeld mit $B=5000$ G gerichtet. a) Berechnen Sie den magnetischen Fluss durch die Spule. b) Wie groß ist dieser Fluss, wenn die Spule einen Winkel von 20° mit der Richtung des Magnetfelds einschließt?

28.30 •• In Abbildung 28.47 sehen Sie einen Wechselstromgenerator, bestehend aus einer rechteckigen, mit Schleifringen verbundenen Leiterschleife mit den Seitenlängen a und b sowie n Windungen. Die Schleife dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω in einem homogenen Magnetfeld $\boldsymbol{B}$. a) Zeigen Sie, dass die Potenzialdifferenz zwischen den Schleifringen gegeben ist durch $U=nBab\omega\,\sin\omega t$. b) Es sei $a=1$ cm, $b=2$ cm, $n=1000$ und $B=2$ T. Mit welcher Winkelgeschwindigkeit ω muss die Schleife rotieren, damit eine Spannung mit einem Maximalwert von 110 V induziert wird?

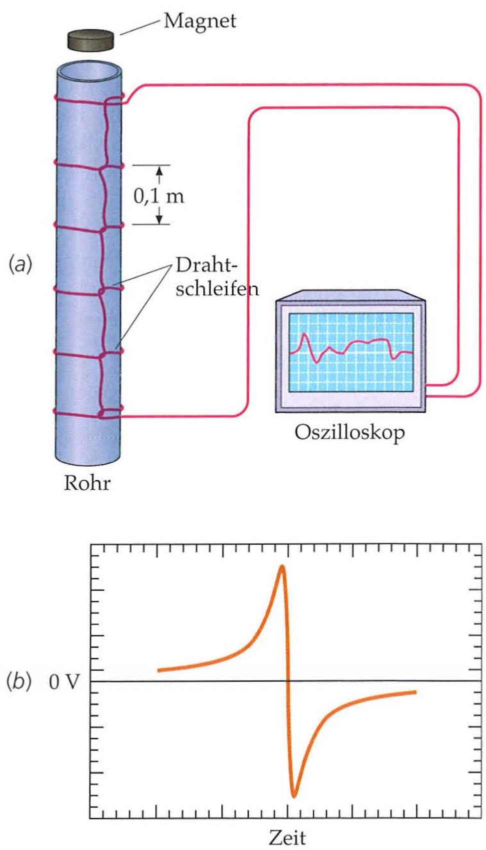


28.47 Zu Aufgabe 28.30.

28.31 •• Zwei Spulen, L_1 und L_2, seien parallel geschaltet, so dass eine Spule jeweils nicht vom Magnetfeld der anderen durchdrungen wird. Zeigen Sie, dass für die effektive Induktivität L der Anordnung dann gilt:

$$\frac{1}{L}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}.$$

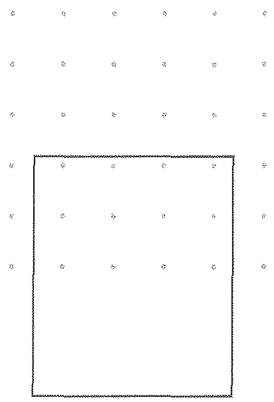
28.32 •• In Abbildung 28.48a ist eine Anordnung skizziert, mit deren Hilfe man die Gravitationsbeschleunigung messen kann. Um ein langes Plastikrohr ist ein Draht gewickelt, so dass im Abstand von 10 cm einzelne Drahtschleifen entstehen. Nun lässt man einen starken Permanentmagneten senkrecht von oben in das Rohr fallen. Jedesmal, wenn der Magnet durch eine Schleife tritt, steigt die Spannung an, erreicht einen Maximalwert, fällt durch den Nullpunkt auf einen großen negativen Wert ab und steigt wieder bis zum Nullpunkt (Abbildung 28.48b). a) Erklären Sie, wie das Experiment funktioniert. b) Warum muss das Rohr aus einem Isolator bestehen? c) Erklären Sie die Form des Signals in Abbildung 28.48b qualitativ. d) In der nachfolgenden Tabelle sind die Zeiten für die Nulldurchläufe der Spannung während eines solchen Experiments angegeben. Berechnen Sie daraus einen Wert für g.



28.48 Zu Aufgabe 28.32.

Nr. der Schleife	Nulldurchgang (s)
1	0,011189
2	0,063133
3	0,10874
4	0,14703
5	0,18052
6	0,21025
7	0,23851
8	0,26363
9	0,28853
10	0,31144
11	0,33494
12	0,35476
13	0,37592
14	0,39107

28.33 •• Die in Abbildung 28.49 skizzierte rechteckige Spule mit einer Länge von 30 cm, einer Breite von 25 cm und 80 Windungen befindet sich zur Hälfte in einem Magnetfeld $B = 1{,}4\,\mathrm{T}$, das aus der Papierebene heraus zeigt. Der Widerstand der Spule beträgt 24 Ω. Berechnen Sie Betrag und Richtung des induzierten Stroms, wenn die Spule mit einer Geschwindigkeit von 2 m/s a) nach rechts, b) nach oben, c) nach links und d) nach unten bewegt wird.



28.49 Zu Aufgabe 28.33.

28.34 •• Durch eine lange Zylinderspule mit der Windungsdichte (n/ℓ) fließt ein Strom $I = I_0 \sin \omega t$. Die Spule hat einen kreisrunden Querschnitt mit dem Radius r_{LS}. Geben Sie einen Ausdruck für das induzierte elektrische Feld in einer radialen Entfernung r von der Achse an für a) $r < r_{\mathrm{LS}}$ und b) $r > r_{\mathrm{LS}}$.

28.35 ••• Eine Spule mit n Windungen und einer Fläche A hängt an einem Draht mit linearem Rückstellmoment κ. Die beiden Enden des Spulendrahts sind miteinander verbunden; die Spule hat den Widerstand R und das Trägheitsmoment I. Wenn der Draht nicht verdrillt ist $(\theta = 0)$, ist die Spulenebene vertikal und parallel zu einem homogenen horizontalen Magnetfeld B. Nun wird die Spule um einen kleinen Winkel $\theta = \theta_0$ gedreht und losgelassen. Zeigen Sie, dass die Spule dann eine gedämpfte harmonische Schwingung vollführt mit $\theta(t) = \theta_0\, \mathrm{e}^{-\beta t} \cos \omega t$, wobei

$$\omega = \sqrt{\kappa/I} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{N^2 B^2 A^2}{R I}$$

ist.