$$\Phi_{0x}^{''} = \frac{\Phi_6' - \Phi_5'}{h} = 2\frac{\Phi_2 - \Phi_0 - (\Phi_0 - \Phi_4)}{h^2} = 2\frac{\Phi_2 + \Phi_4 - 2\Phi_0}{h^2}$$

Analoge Betrachtung in y-Richtung liefert:

$$\Phi_{0y}^{''} = 2\frac{\Phi_1 + \Phi_3 - 2\Phi_0}{h^2}$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0 = 2\frac{\Phi_2 + \Phi_4 - 2\Phi_0}{h^2} + 2\frac{\Phi_1 + \Phi_3 - 2\Phi_0}{h^2} \rightarrow$$
$$\Phi_0 = \frac{\Phi_2 + \Phi_4 + \Phi_1 + \Phi_3}{4}$$

Das Potential in einem diskreten Gitterpunkt entspricht also dem Mittelwert der vier benachbarten Potentiale, ist aber vom Gitterpunktabstand, falls dieser genügend klein gewählt ist, unabhängig. Auf diese Art ist es möglich, die Laplace-Gleichung bei vorgegebenen Potentialrandbedingungen numerisch zu lösen.

7 Teilchensysteme

Fast alle unsere Überlegungen (betreffend Mechanik) galten streng genommen für Punktmassen Ausgedehnte Körper können wir als eine Summe von Punktmassen ansehen, wobei es innere Kräfte geben muss, die die Lage der Punktmassen zueinander bestimmen. Diese inneren Kräfte beeinflussen aber die Dynamik des Körpers nicht bzw. nur auf eine Art, die man von der von den sogenannten äußeren Kräften verursachten Bewegung trennen kann. Äußere Kräfte können einerseits die Bewegung des Schwerpunktes (siehe folgendes) beeinflussen (es gelten dann die Newton´schen Axiome wie für eine im Schwerpunkt befindliche Punktmasse) oder aber die Rotation des Körpers verändern (Drehbewegung, siehe folgendes)

7.1 Schwerpunkt

Die Bewegung irgendeines Körpers oder Teilchensystems lässt sich beschreiben, wenn man die Bewegung des Massenmittelpunkts (sozusagen die Grundbewegung des Systems) und die Bewegung aller Einzelteile des Systems in Bezug auf den Massenmittelpunkt kennt. Betrachten wir zunächst ein einfaches System aus zwei Teilchen in einer Dimension. Wenn zwei punktförmige Teilchen mit den Massen m_1 und m_2 die Koordinaten x_1 und x_2 auf der x-Achse haben, dann ist die Koordinate x_s des Massenmittelpunkts definiert durch

$$\underbrace{(m_1 + m_2)}_{m} \cdot x_s = m_1 x_1 + m_2 x_2 \tag{31}$$

Gibt es nur zwei Teilchen, liegt der Massenmittelpunkt genau auf der Verbindungslinie zwischen den beiden Teilchen; haben die Teilchen gleiche Massen, liegt der Massenmittelpunkt genau in der Mitte zwischen ihnen . Haben die zwei Teilchen ungleiche Masse, so liegt der Massenmittelpunkt dichter an dem schwereren der beiden Teilchen. In diesem Fall könnte man sehr leicht die Bewegung des Systems durch Lösen der Bewegungsgleichung bestimmen und dann feststellen, dass sich in der Tat der Massenmittelpunkt so wie eine Punktmasse m, die sich in ihm befindet, bewegt.

Gleichung 31 kann man sehr leicht auf ein System aus vielen Massen verallgemeinern:

$$\underbrace{\left(\sum m_i\right)}_{m} \cdot \vec{r}_s = \sum m_i \vec{r}_i \tag{32}$$

Für eine kontinuierliche Massenverteilung gilt wieder

$$m\vec{r}_s = \int \vec{r} \cdot dm \tag{33}$$

7.2 Bewegung des Massenmittelpunktes

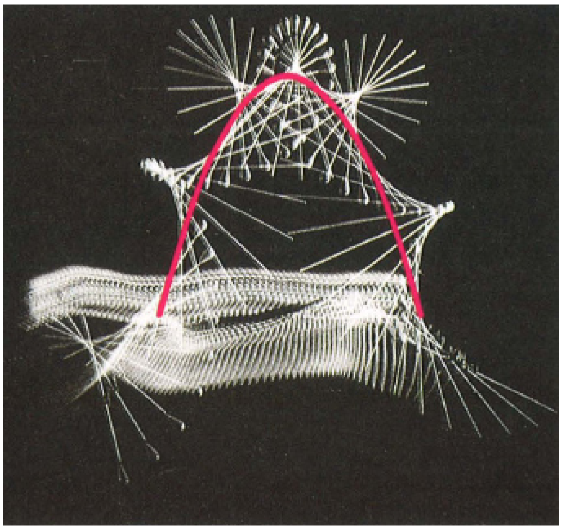


Abbildung 17: Komplexe bewegung eines Körpers und einfache Bewegung des Massenmittelpunktes

Abbildung 17 zeigt in einer stroboskopischen Aufnahme, wie sich ein in die Luft geworfener Stock bewegt. Obwohl die Bewegung des Stocks insgesamt ziemlich kompliziert ist, ist die Bewegung seines Massenmittelpunkts ganz einfach. Während der Stock in der Luft ist, bewegt sich der Massenmittelpunkt auf einer parabelförmigen Bahn, derselben Bahn, die sich beim Wurf eines punktförmigen Teilchens ergäbe. Wir können allgemein zeigen, dass die Beschleunigung des Massenmittelpunkts in einem System von Teilchen gleich ist der resultierenden äußeren Kraft, die auf das System wirkt, geteilt durch die Gesamtmasse des Systems. Wirft man den Stock in die Luft, so erfährt der Massenmittelpunkt nur eine nach unten gerichtete Beschleunigung, nämlich die Erdbeschleunigung g; um die Beschleunigung zu finden, berechnen wir zunächst die Geschwindigkeit, indem wir Gleichung 32 zweimal nach der Zeit differenzieren und berücksichtigen, dass nach dem zweiten Newton'schen Axiom $m_i a_i$ gleich der Summe der Kräfte auf das i-te Teilchen ist.

Der Term auf der rechten Seite gibt dann die Summe aller Kräfte an, die auf jedes einzelne Teilchen in dem System wirken. Einige dieser Kräfte sind interne oder innere Kräfte, d. h. Kräfte, die ein Teilchen in dem System auf ein anderes Teilchen in dem System ausübt; andere Kräfte sind externe oder äußere Kräfte, d. h. Kräfte, die auf ein Teilchen des Systems von einem anderen Teilchen außerhalb des Systems ausgeübt werden. Nach dem dritten Newton 'schen Axiom treten alle Kräfte immer in Paaren von Aktion und Reaktion auf. Zu jeder inneren Kraft auf ein Teilchen eines Systems gibt es also immer eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete innere Kraft auf ein anderes Teilchen des Systems. Summieren wir alle inneren Kräfte, ergänzt sich jedes Aktions-Reaktions-Paar zu null. Auf das System wirken also nur externe Kräfte. Damit erhalten wir

$$\vec{F}_{ext} = \sum F_{i,\text{ext}} = m\vec{a}_s \tag{34}$$

Die Gleichung besagt, dass die resultierende äußere Kraft auf ein System gleich ist dem Produkt aus Gesamtmasse m des Systems und der Beschleunigung des Massenmittelpunkts $\vec{a}_s$ des Systems. Es gilt also: Der Massenmittelpunkt eines Systems von Teilchen bewegt sich wie ein einziges Teilchen der Masse $m = \sum m_i$ unter dem Einfluss der resultierenden äußeren Kraft, die auf das System wirkt. Eine wichtige Konsequenz

Lemma 23 *Wirken keine äußeren Kräfte, bleibt der Schwerpunkt erhalten*

7.3 Kinematik der Drehbewegung: Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung

Jeder Punkt in einem Körper, der um eine feste Achse gleichförmig rotiert, bewegt sich auf einer Kreisbahn, deren Mittelpunkt auf der Drehachse liegt und deren Radius durch die Entfernung des Punkts von der Drehachse gegeben ist. Eine Linie, die man von der Achse zu einem beliebigen Punkt zieht, überstreicht in gleichen Zeiten stets gleiche Winkel (Abbildung 18). Betrachten wir eine Kreisscheibe, die sich um eine senkrecht zu ihr stehende feste Achse durch ihren Mittelpunkt dreht. r_i bezeichnet den Abstand vom Mittelpunkt der Scheibe zu ihrem i-ten Massenpunkt P_i, und θ_i ist der gegen den Uhrzeigersinn gemessene Winkel zwischen einer im Raum festgelegten Bezugsgerade und einer Linie vom Drehpunkt zum i-ten Massenpunkt. Wenn sich die Scheibe um den Winkel $d\theta$ dreht, bewegt sich dieser Massenpunkt auf einem Kreisbogen der Länge ds, so dass gilt:

$$ds = r_i \cdot d\theta \tag{35}$$

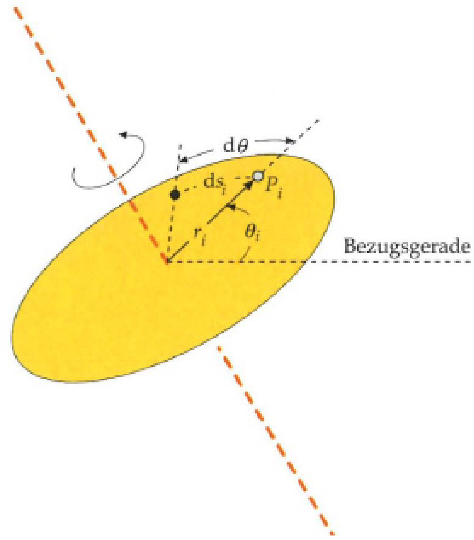


Abbildung 18: Größen bei der Drehbewegung

Dabei wird der Winkel $d\theta$ im Bogenmaß in der Hilfseinheit Radiant (Einheitenzeichen rad) angegeben. Die Entfernungen ds_i und r_i hängen vom jeweils betrachteten Punkt ab, **aber ihr Verhältnis, der so genannte Drehwinkel, ist für alle Massenpunkte der Kreisscheibe gleich**. Bei einer kompletten Umdrehung gilt für die Bogenlänge $\Delta s_i = 2\pi r_i$; der Drehwinkel $\Delta\theta$ beträgt dann $\Delta\theta = \frac{2\pi r_i}{r_i} = 2\pi\,\mathrm{rad} = 360° = 1U$ (Das U steht hier für Umdrehung.) Die Geschwindigkeit $d\theta/dt$, mit der sich der Winkel ändert, ist für alle Punktmassen der Scheibe gleich. Man nennt sie die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe und bezeichnet sie mit dem kleinen griechischen Buchstaben ω

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{36}$$

Im allgemeinen Fall, insbesondere wenn die Drehachse nicht im Raum fixiert ist, muss man die Winkelgeschwindigkeit als eine vektorielle Größe behandeln; Bei Drehungen um eine raumfeste Achse - und ausschließlich diesen Fall betrachten wir in diesem Kapitel - hat die Winkelgeschwindigkeit nur zwei mögliche Richtungen, die von der Drehrichtung abhängen. Bei einer Drehung gegen den Uhrzeigersinn nimmt θ zu, ω ist also positiv; bei einer Drehung im Uhrzeigersinn nimmt θ ab, ω ist also negativ. (Dies ist analog zu der linearen Bewegung in einer Dimension, wo man die Geschwindigkeit nicht als Vektor betrachten muss; sie kann sowohl negative als auch positive Werte annehmen.) Die Dimension der Winkelgeschwindigkeit ist die einer reziproken Zeit (T^{-1}). Die Einheit der Winkelgeschwindigkeit ω ist s^{-1}; wenn mit den Hilfseinheiten Radiant oder Umdrehung gearbeitet wird, ist die Einheit Radiant pro Sekunde $(\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1})$ bzw. Umdrehungen pro Sekunde, $U\cdot\mathrm{s}^{-1}$

Die zeitliche Änderung der Winkelgeschwindigkeit wird Winkelbeschleunigung α genannt:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{37}$$

7.4 Zentripetal und Zentrifugalbeschleunigung

Die lineare Geschwindigkeit υ_t eines Massenpunkts der Scheibe ist tangential zur Kreisbahn des Punkts gerichtet und hat den Betrag ds_t/dt. Mit den vorhin eingeführten Größen können wir die Tangentialgeschwindigkeit"des i-ten Massenpunkts gemäß

$$\upsilon_{t,i} = \frac{r_i d\theta}{dt} \tag{38}$$

mit der Winkelgeschwindigkeit der Scheibe verknüpfen, so dass gilt:

$$\upsilon_{t,i} = r_i\omega$$

In ähnlicher Weise ergibt sich die tangentiale Beschleunigung eines Massenpunkts der Scheibe

$$a_{t,i} = \frac{d\upsilon_{t,i}}{dt} = r_i\frac{d\omega}{dt} = r\alpha \tag{39}$$

Gleichung 39 ist jedoch unvollständig, wenn man die eigentliche (und nicht nur die tangentiale Komponente) Beschleunigung betrachtet:

$$a_i = \frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt} = \vec{r}_i\frac{d\omega}{dt} + \omega\frac{d\vec{r}_i}{dt} \tag{40}$$

Beschränken wir uns auf den einfachsten Fall, dass sich die Massenpunkte mit konstanter Winkelgeschwindigkeit drehen, dann ist der erste Term in 40 null und damit bleibt in der Beschleunigung nur der zweite Term über. Bei den Drehungen, die wir hier betrachten, ist zwar der Radius $\vec{r}_i$ dem Betrag nach konstant, ändert aber die Richtung, so dass gilt (siehe dazu auch Abbildung 19):

$$a_i = \omega\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\upsilon_{t,i}}{r_i}\cdot\upsilon_{t,i} = \frac{\upsilon_{t,i}^2}{r_i} = r_i\omega^2 \tag{41}$$

Jeder Massenpunkt auf der Scheibe erfährt alsoeine radiale Beschleunigung, die so genannte Zentripetalbeschleunigung. Die Normalbeschleunigung ist immer nach innen zur Drehachse hin gerichtet.

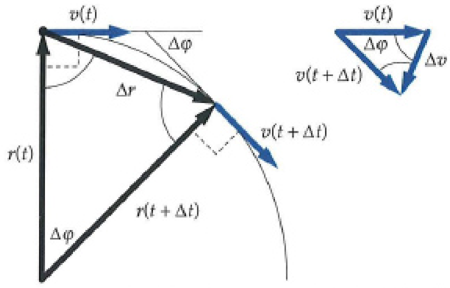


Abbildung 19: Radiusänderung bei Drehbewegung

7.4.1 Scheinkräfte

Der Übergang von einem Inertialsystem auf ein beschleunigtes System (z.B. die Scheibe in Abbildung 18) führt immer zum Auftreten von sogenannten Scheinkräften.

Damit z.B ein Auto durch eine Kurve fährt, muss auf dieses Auto eine radial nach innen gerichtete Zentripetalbeschleunigung a_{zp} wirken (Das in der Kurve fahrende Auto sei also unser beschleunigtes System). Sitzen wir in diesem Auto, spüren wir allerdings eine ganz andere Beschleunigung, nämlich eine Beschleunigung a_{zf}, die uns radial nach außen treibt. Die Beschleunigung a_{zp} heißt Zentrifugalbeschleunigung, die auf uns wirkende Kraft $F_{zf} = m \cdot a_{zp}$ heißt Zentrifugalkraft. Diese Kraft zählt zu den Trägheits- oder Scheinkräften, die immer dann auftreten, wenn wir uns in einem beschleunigten Bezugssystem - wie dem durch eine Kurve fahrenden Auto - befinden. Ein System ohne Scheinkräfte, das entsprechend dem Trägheitssatz seine (geradlinig gleichförmige) Bewegung beibehält, nennt man ein Inertialsystem.

Scheinkräfte entstehen bei der Transformation der Bewegungsgleichungen von einem Inertialsystem I in ein beschleunigtes System B.

7.5 Kinetische Energie der Drehbewegung

Die kinetische Energie eines starren Körpers, der um eine feste Achse rotiert, ist die **Summe der kinetischen Energie aller Massenpunkte**, die zusammen den Körper bilden. Die kinetische Energie des i-ten Massenpunkts mit der Masse m_i ist

$$E_{kin,i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Die geamte Energie ergibt sich dann durch Summation über alle Massenpunkte, wobei $v_i = r_i \omega$ verwendet wird zu:

$$E_{kin} = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \frac{1}{2} \sum_i \left(m_i r_i^2 \omega^2 \right) = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum_i m_i r_i^2 \right)}_{\text{Trägheitsmoment } I} \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (42)$$

Die eingeklammerte Summe in dem Term auf der rechten Seite nennt man das Trägheitsmoment I des Körpers bezüglich der Drehachse:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \tag{43}$$

bzw.

$$I = \int r^2 dm \tag{44}$$

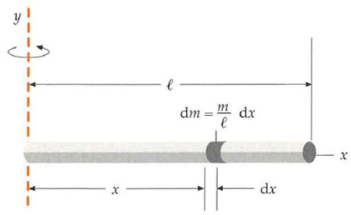
bei kontinuierlicher Masseverteilung.

Beispiel 24

Trägheitsmoment eines homogenen Stabs

Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines homogenen Stabs der Länge ℓ und der Masse m bezüglich einer Achse, die senkrecht zum Stab durch eines der Enden verläuft. Der Stab soll eine vernachlässigbare Dicke haben.

Problembeschreibung: Der Stab liegt auf der x-Achse, ein Ende befindet sich im Ursprung. Um das Trägheitsmoment I bezüglich der y-Achse zu berechnen, betrachten wir ein Massenelement $\mathrm{d}m$ im Abstand x von der Achse (Abbildung 9.5). Da die Gesamtmasse m entlang der Länge ℓ homogen verteilt ist, ist die Masse pro Einheitslänge (die lineare Massendichte) gegeben durch $\lambda = m/\ell$.



Lösung:

1. Das Trägheitsmoment ist gegeben durch das Integral: $I = \int_0^\ell x^2 \,\mathrm{d}m$

2. Um das Integral zu berechnen, brauchen wir einen Zusammenhang von $\mathrm{d}m$ und $\mathrm{d}x$. Drücken Sie $\mathrm{d}m$ mit Hilfe der Massendichte λ und von $\mathrm{d}x$ aus: $\mathrm{d}m = \lambda\,\mathrm{d}x = \frac{m}{\ell}\,\mathrm{d}x$

3. Setzen Sie ein und berechnen Sie das Integral. Wählen Sie die Integralgrenzen so, dass das Massenelement $\mathrm{d}m$ entlang der Massenverteilung in Richtung von zunehmendem x verschoben wird:

$$I = \int x^2\,\mathrm{d}m = \int_0^\ell x^2 \frac{m}{\ell}\,\mathrm{d}x = \frac{m}{\ell}\int_0^\ell x^2\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{m}{\ell}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^\ell = \frac{m}{\ell}\cdot\frac{\ell^3}{3} = \boxed{\frac{1}{3}m\,\ell^2}$$

Kommentar: Das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse ist ebenfalls $\frac{1}{3}m\,\ell^2$; das Trägheitsmoment bezüglich der x-Achse ist null, da wir angenommen hatten, dass der Stab eine vernachlässigbare Dicke hat, die gesamte Masse also auf der x-Achse konzentriert ist.

Beispiele für einige Körper bezüglich verschiedener achsen sind in der folgenden Abbildung 20 zusammengefasst.

7.5.1 Der Steiner'sche Satz

Die Berechnung des Trägheitsmoments lässt sich in vielen Fällen durch einen Satz vereinfachen, der das Trägheitsmoment bezüglich einer Achse durch den Massenmittelpunkt mit dem Trägheitsmoment bezüglich einer beliebigen anderen, zur ersten parallelen Achse verknüpft. Dieser Satz heißt im Deutschen nach dem Schweizer Mathematiker Jakob Steiner (1796 -1863) der Steiner'sche

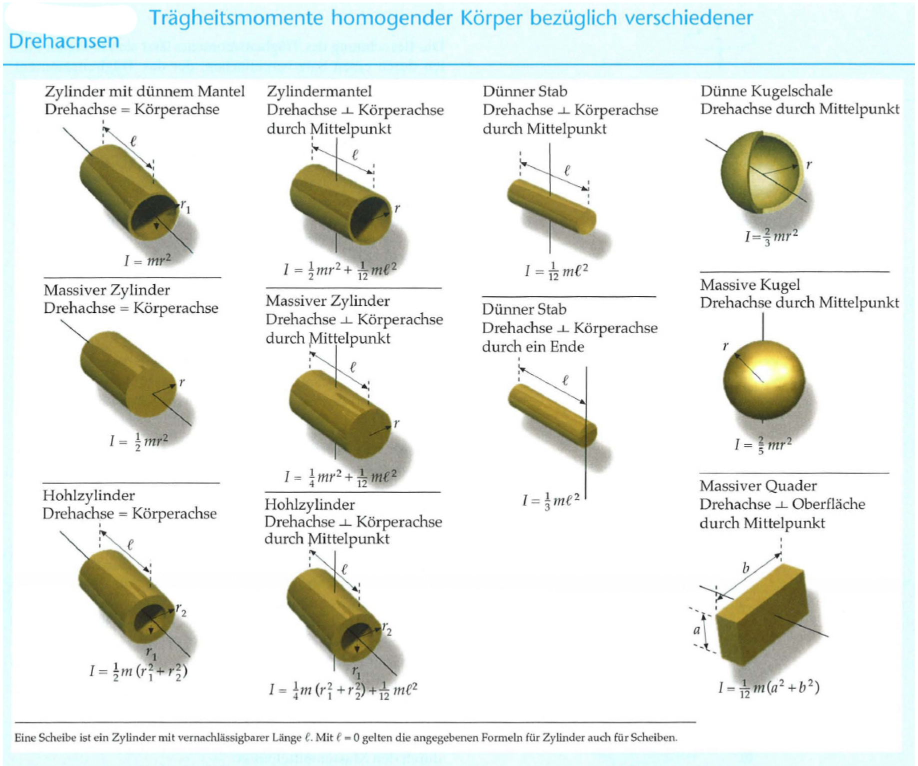


Abbildung 20: Trägheitsmomente einiger Körper

Satz, in der englischsprachigen Literatur findet man ihn unter der Bezeichnung Parallel-Axis Theorem. Wenn ein Körper der Masse m das Trägheitsmoment I_s bezüglich einer Achse durch den Massenmittelpunkt hat, dann ist das Trägheitsmoment I bezüglich einer parallelen Achse im Abstand h von der ersten Achse gegeben durch

$$I = I_s + mh^2 \tag{45}$$

7.6 Das zweite Newton'sche Axiom für Drehbewegungen: Der Drehimpuls

Um einen Kreisel (Scheibe) zum Rotieren zu bringen, muss man ihn ändrehen". Dazu benötigt man z.B zwei Kräfte F_1 und F_2 in Drehung versetzt wird, die am Rand der Scheibe in tangentialer Richtung angreifen. **Die Richtung der Kräfte ist wesentlich**: Würden die beiden Kräfte in radialer Richtung wirken, würde sich die Scheibe nicht drehen.

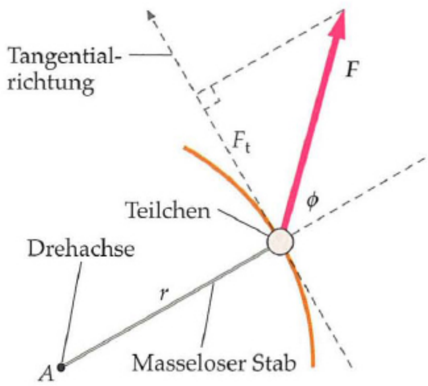


Abbildung 21: Ein Teilchen mit der Masse m ist durch einen masselosen Stab in seiner Bewegung auf eine Kreisbahn mit dem Radius $\vec{r}$,. beschränkt. Wirkt eine Kraft $\vec{F}$ auf das Teilchen, so kann man für die Tangentialkomponente der Kraft das zweite Newton'sche Axiom anwenden

Abbildung 21 zeigt ein Teilchen der Masse m, das an einem masselosen starren Stab der Länge r,. angebracht ist. Betrachten wir eine Achse am anderen Ende des Stabs, um die der Stab rotieren kann. Dann muss sich das Teilchen auf einer Kreisbahn vom Radius r,. bewegen. Wenn eine einzige Kraft $\vec{F}$ in der gezeigten Weise auf das Teilchen wirkt, dann können wir das zweite Newton'sche Axiom auf das Teilchen anwenden. Für die tangentiale Komponente ergibt sich $F_t = ma_t$.

Wir wollen eine Gleichung ableiten, in der die Drehgrößen mitenthalten sind. Ersetzen wir a_t, durch $r\alpha$ (Gleichung 39) mit Winkelbeschleunigung α und multiplizieren beide Seiten mit r, ergibt sich

$$rF_t = mr^2\alpha \tag{46}$$

Das Produkt rF_t, heißt das mit der Kraft F_t, verbundene Drehmoment M:

$$M = rF_t \tag{47}$$

Eigentlich ist das Drehmoment wie die Winkelgeschwindigkeit ein Vektor. Solange das Drehmoment, wie in diesem Kapitel, nur eine Komponente besitzt, gilt $M = rF_t$.. Im allgemeinen Fall gilt aber $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ und dann ist aber die Reihenfolge von r und F, von großer Bedeutung.

Setzt man die Definition des Drehmoments in Gleichung 46 ein, erhält man

$$M = mr^2\alpha \tag{48}$$

Einen starren Körper, der um eine feste Achse rotiert, kann man sich als eine Ansammlung von einzelnen Teilchen denken, von denen sich jedes auf einer Kreisbahn bewegt. Alle Teilchen haben dieselbe Winkelgeschwindigkeit ω und dieselbe Winkelbeschleunigung α. Mit Gleichung 48 gilt für das i-te dieser Teilchen

$$M_i = m_i r_i^2 \alpha \tag{49}$$

Dabei ist M_i das Drehmoment, das mit der Gesamtkraft auf das i-te Teilchen verbunden ist. Summiert man beide Seiten dieser Gleichung über alle Teilchen, ergibt sich

$$\sum M_i = \sum m_i r_i^2 \alpha = \left(\sum m_i r_i^2\right) \alpha = I\alpha \tag{50}$$

Wir haben schon gesehen, dass die resultierende Kraft auf ein Teilchensystem gleich der Summe der resultierenden äußeren Kräfte ist, die auf das System wirken, weil die inneren Kräfte (also die Kräfte, die die Teilchen des Systems aufeinander ausüben) sich paarweise neutralisieren. Die Behandlung von internen Drehmomenten, die die Teilchen des Systems aufeinander ausüben, führt zu einem ganz ähnlichen Ergebnis: Das resultierende Drehmoment auf ein System ist gleich der Summe der resultierenden äußeren Drehmomente, die auf das System wirken.

Wir können 50 noch etwas umformen und erhalten

$$M_{ext} = \sum M_{\mathrm{ext},i} = I\alpha$$

Das ist für die Drehbewegung das Analogon für das zweite Newton 'sche Axiom der Linearbewegung: $\vec{F}_{\mathrm{ext}} = m\vec{a}$.