

Einige Begriffe aus der Optik

Einen entscheidenden Beitrag zum Verständnis und zur praktischen Anwendbarkeit lieferte Pierre de Fermat, indem er zeigte, dass das Brechungs- und Reflexionsgesetz vom Prinzip der minimalen Ausbreitungszeit (Fermat'sches Prinzip), dessen Weiterentwicklungen im 19. Jahrhundert einen Kernpunkt der modernen Mechanik und Theorie des Elektromagnetismus bilden sollten, abgeleitet werden kann (siehe Abbildung 1).

Das Fermat'sche Prinzip

Einführung des Begriffes des optischen Widerstandes (dieser ist heute unter der modernen Bezeichnung *Brechungsindex* bekannt); dieser soll proportional der **(optischen) Dichte** des Mediums sein.

$$n = \frac{c}{v} \quad (1)$$

In der Definition 1 ist c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und v die (Geschwindigkeit) in einem optisch dichten Medium. An Stelle des zurückgelegten Weges definieren wir nun die optische Weglänge (\overline{OWL}) zwischen den Punkten PP' als

$$\overline{OWL}(PP') = \int_P^{P'} n(x, y, z) d\ell = \int_P^{P'} \frac{c}{v} d\ell \quad (2)$$

Daraus ergibt sich, dass die optische Weglänge proportional zur zurückgelegten Zeit des Lichtstrahles ist:

$$\overline{OWL}(PP') = \int_P^{P'} \frac{c}{v} d\ell = \int_P^{P'} \frac{c}{d\ell} dt d\ell = c \cdot \Delta t \quad (3)$$

Nehmen wir an, ein Strahl gehe von P nach P' und wir wollen den Weg, den er dabei nimmt, ermitteln. Das Fermat'schen Prinzip besagt nun, dass eine kleine Abweichung (erster Ordnung ϵ) des Strahles vom Weg den er tatsächlich einnimmt (wahrer Weg) eine Änderung der optischen Weglänge

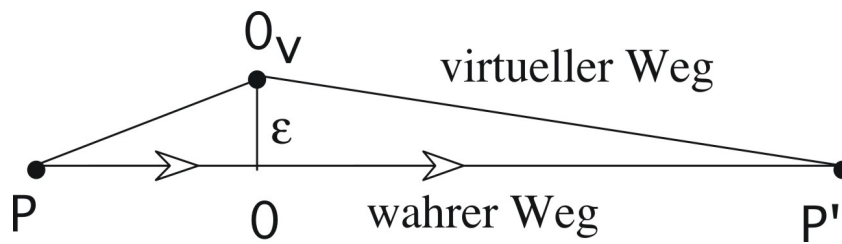


Abbildung 1: Fermat'sches Prinzip

$I(\epsilon)$ von mindestens zweiter Ordnung ϵ^2 bedingt.

$$I(\epsilon, \epsilon \rightarrow 0) = \overline{OWL}(\text{virtueller Weg}) - \overline{OPW}(\text{wahrer Weg}) = \text{const} \cdot \epsilon^2 \quad (4)$$

Entwickeln von $I(\epsilon)$ in eine Taylorreihe um $\epsilon = 0$ ergibt dann, dass das Fermat'sche Prinzip mit der Bedingung $\left. \frac{d[OWL]}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0$ identisch ist. Das heißt, der wahre Weg ist ein Extremwert in Bezug auf kleine Änderungen der optischen Weglänge.

Das Fermat'sche Prinzip besagt damit, dass das Licht jenen Weg zwischen zwei Punkten zurücklegen muss, dessen optische Weglänge der kürzesten Zeit entspricht.

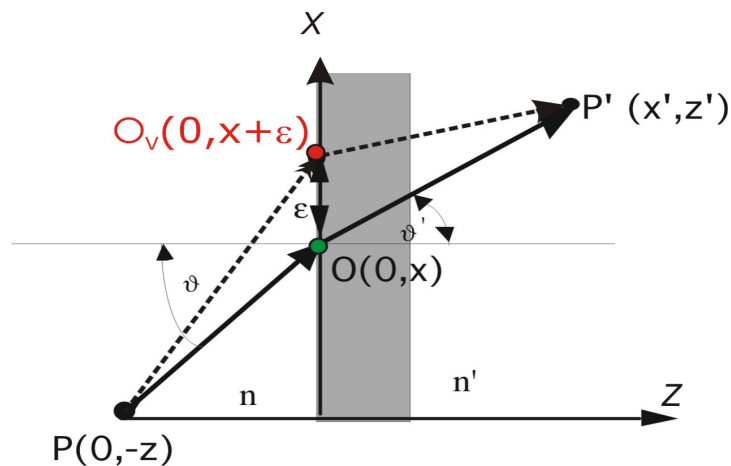


Abbildung 2: Fermat'sches Prinzip und Brechungsgesetz

Wir können nun leicht zeigen (siehe Abbildung 2), dass das Fermat'sche Prinzip direkt das schon bekannte Brechungsgesetz sowie das Reflexionsgesetz liefert. Betrachten wir dazu die zwei Punkte P

und P' , die sich nun in zwei verschiedenen Medien befinden sollen. Für die optische Weglänge und das Fermat'sche Prinzip können wir dann anschreiben:

$$\begin{aligned} \overline{OWL}(PO_V P') &= n\sqrt{(x+\epsilon)^2 + z^2} + n'\sqrt{(x'-x-\epsilon)^2 + z'^2} \\ \left. \frac{d[\overline{OWL}]}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} &= n \underbrace{\frac{x}{\sqrt{z^2 + x^2}}}_{\sin \vartheta} - n' \underbrace{\frac{(x' - x)}{\sqrt{(x' - x)^2 + z'^2}}}_{\sin \vartheta'} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Das heißt:

$$n' \sin \vartheta' = n \sin \vartheta \quad (6)$$

Beachten Sie bitte, dass das Fermat'sche Prinzip nicht die Ursache (der physikalische Grund) für die Lichtausbreitung gemäß der kürzesten Zeit ist, sondern die mathematische Beschreibung einer Beobachtung. Der wahre physikalische Mechanismus hinter dem Fermat'schen Prinzip hat mit der konstruktiven Interferenz von Wellen zu tun. *Der Extremwert der optischen Weglänge ist identisch mit der Richtung, entlang der die konstruktive Interferenz ein Maximum ist.*

Isaac Newton schließlich lieferte die bis dato genaueste Beschreibung der Lichtphänomene (in *Opticks*). Er zeigte z.B. die Farbzerlegung weißen Lichtes mittels eines Prismas. Sein Modell bestand in der Annahme, dass Licht ein Strom von Teilchen (Größe der Teilchen bestimmt Farbe) sei, die sich im Äther (ein immer vorhandenes Medium) ausbreiten. Er ist auch der Entdecker der Newton'schen Ringe, die zwar eine Interferenzerscheinung darstellen, jedoch von Newton, der das Wellenmodell ablehnte, anders erklärt wurden.

Huygens'sches Prinzip

Huygens' Vorstellung von Licht war, dass ein leuchtender Körper eine Serie von Pulsen aussendet, die sich durch die Vermittlung des Äthers weiterpflanzen. Seine Theorie war nun die, dass *jeder Punkt einer sich fortpflanzenden Störung imstande ist, neue Pulse zu erzeugen, die zur Störung eine Zeit später beitragen.*

Wir wissen, dass sich eine Kugelwelle oder ganz allgemein eine Störung im dreidimensionalen Raum ausbreitet, sind aber noch nicht darauf eingegangen, wie man eine solche Störung erzeugt. Das hängt sicherlich vom jeweiligen Problem ab. Innerhalb eines mechanischen Mediums wie z.B. einer Flüssigkeit werden Störungen durch die Kräfte zwischen benachbarten Teilchen des Mediums übertragen. Die physikalische Quelle der Störung selbst wirkt über die gleichen Kräfte lokal auf das

sie umgebende Medium. Man könnte vermuten, dass es nicht davon abhängt, ob eine bestimmte Stelle des Mediums durch die Quelle selbst oder durch das sie umgebende Medium angeregt wird. Tatsächlich ist es sinnvoll, jede angeregte Stelle im Medium als Quelle einer Kugelwelle anzusehen. Das Huygens'sche Prinzip besteht nun darin, eine Störung zu einer bestimmten Zeit als Überlagerung vieler einzelner Störungen zu betrachten, von denen jede als Punktquelle einer kugelförmigen wellenähnlichen Störung wirkt. Das Huygenssche Prinzip ermöglicht uns, die räumliche Lage einer Störung zu einem späteren Zeitpunkt zu berechnen, wenn man sie nur zu einer früheren Zeit kennt. Dieses Modell liefert uns jedoch keine quantitative Information über die resultierende Amplitude. Das bleibt späteren Theorien vorbehalten.

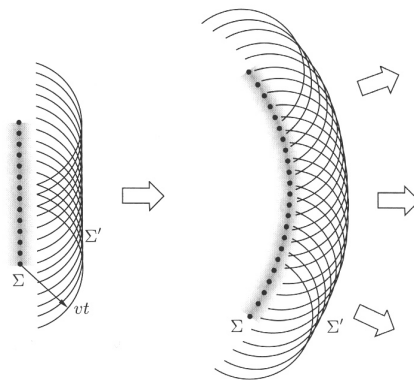


Abbildung 3: Nach dem Huygens'schen Prinzip pflanzt sich eine Welle so fort, als ob sie aus einer Anordnung von Punktquellen bestünde, deren jede eine Kugelwelle aussendet.

Das Huygens'sche Prinzip enthält zwei wichtige Regeln über die Art und Weise, wie zwei Sekundärwellen zu kombinieren sind. Wir wollen dies an dem in Abbildungen 3 und 4 gezeigten Beispiel erläutern, wo eine Punktquelle eine kugelförmige Störung auf einen Schirm hin aussendet, in dem sich eine Öffnung befindet. Angenommen, die Störung sei zur Zeit t gerade in der Öffnung, welche durch die Fläche σ beschrieben werde. Wir wollen wissen, wo sie sich zur Zeit $t + \Delta t$ befindet. Das Gebiet außerhalb der Geraden \overline{PA} und $\overline{P'B}$ hinter dem Schirm nennt man den geometrischen Schatten, da dort kaum Licht zu erwarten ist. Nur wenige Sekundärwellen gelangen von σ aus in dieses Gebiet. Wir nehmen deshalb an, dass wir diese Wellen vernachlässigen und die neue Störung σ' als die Einhüllende aller auslaufenden Sekundärwellen betrachten können, die abrupt am geometrischen Schattenrand abbricht. Die zurücklaufenden Wellen haben natürlich auch eine Einhüllende, die sich auf die Quelle zu bewegt. Sie entsprechen im eindimensionalen Fall dem Term $g(t + z/v)$, während die sich vorwärts ausbreitenden Wellen dem Term $f(t - z/v)$ entsprechen. *Im Huygens'schen Modell wird die rückwärtslaufende Störung einfach mit der Begründung vernachlässigt, dass solche in der Natur nicht vorkommen.* Erst spätere Theorien erklären dieses Phänomen richtig. Diese berücksichtigen

auch die Partialwellen im Schattenbereich, die zu den Beugungseffekten führen. Eine detaillierte Analyse zeigt, dass die physikalische Größe, die sich wie oben beschrieben ausbreitet, nicht die Störung selbst ist, sondern nur diejenigen Anteile, die in der Zeit- und Ortskoordinate unstetig sind. Diese Unstetigkeitsstellen sind auf Flächen beschränkt und breiten sich nach dem Huygens'schen Prinzip aus.

Auch die Ausbreitung stetiger Störungen wird in guter Näherung nach diesem Verfahren beschrieben, wenn sich die Störung über einen Bereich ändert, der klein im Vergleich zu den relevanten Objektgrößen ist. Wenn wir die Ausbreitung einer optischen Störung durch den Raum oder durch ein optisches Medium beschreiben wollen, so müssen wir lediglich das Huygens'sche Prinzip wiederholt anwenden. Um den Verlauf der Störung zur Zeit $t + 2\Delta t$ zu bestimmen, konstruiert man im Beispiel der Abbildung 4 die Einhüllende aller sich in Vorwärtsrichtung bewegenden Elementarwellen mit dem Radius $v\Delta t$, die von der Fläche σ' ausgehen. Der Verlauf der Lichtstrahlen folgt dann ganz einfach aus unserem idealisierten Modell einer lokalen optischen Störung. Für isotrope Medien gilt: Lichtstrahlen sind Geraden, die zu einer bestimmten Zeit senkrecht zur Oberfläche der Störung stehen, wobei sie in Ausbreitungsrichtung weisen.

Dies kann wie folgt zusammengefasst werden:

Jeder Punkt der vordersten Wellenfläche einer Störung, die sich wellenförmig ausbreitet (Wellenfront), kann als Sekundärquelle für sphärische Wellen (Wavelets) angesehen werden, die sich selbst wieder mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten und deren Einhüllende zu einem späteren Zeitpunkt die neue Wellenfront bildet.

In der Huygens-Theorie wird also angenommen, dass nur ein Punkt der Sekundärwellen (Tangente an diesen Punkt ergibt neue Wellenfront) beiträgt, der Rest jedes Wavelets wird nicht weiters beachtet. Das war nötig, um die geradlinige Ausbreitung aufrechtzuerhalten, wie Abbildung 3 veranschaulicht. Dadurch werden aber von vornherein Beugungseffekte eliminiert!

Das Brechungsgesetz 6 kann man auch aus Überlegungen des Huygens'schen Prinzips herleiten. Wir werden aber später noch eine physikalischere Begründung des Gesetzes erhalten und wollen die Herleitung aus dem Huygens'schen Prinzip daher hier auslassen.

Während des 18. Jahrhunderts gab es einen großen Richtungsstreit zwischen den Anhängern der Teilchen- und der Wellentheorie, der oft auch politisch gefärbt war. Ein endgültiger Beweis der Wellennatur des Lichtes gelang **Thomas Young** mit seinem bekannten Experiment (siehe Abbildung 5), bei dem er **Interferenzringe und Beugung** feststellte. Seine Beobachtungen veröffentlichte er zuerst anonym, aus Angst er könnte seinen Ruf verlieren und damit seine Arztpraxis schädigen. Als

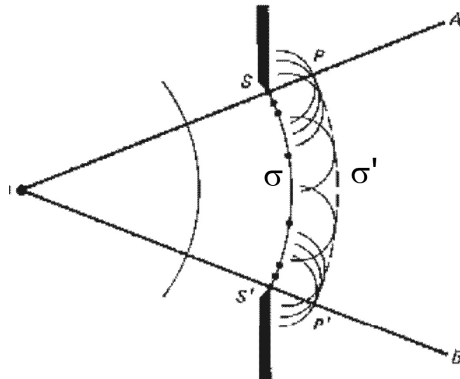


Abbildung 4: Die Huygens'sche Konstruktion und das Gesetz der geradlinigen Ausbreitung.

er seine Beobachtungen und Schlussfolgerungen schließlich der Royal Society vortrug, machte man sich über ihn lustig. Dies vor allem auch wegen seiner Ablehnung der Ideen von Newton.

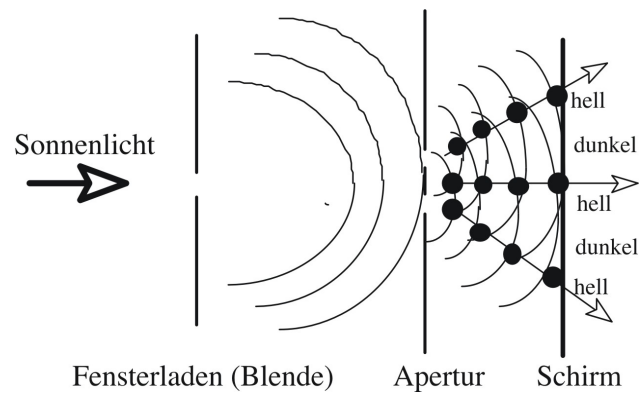


Abbildung 5: Youngs experimenteller Nachweis der Wellennatur des Lichtes.

Kapitel 1

Was ist Licht?

Wenn wir heute die Frage stellen "Was ist Licht?", müssen wir die Grundzüge der Quantenmechanik mit ins Spiel bringen. Wir können zuerst einmal vereinfacht feststellen, dass es Experimente gibt, die die **Wellennatur** des Lichtes voraussetzen (*nur so erklärt werden können*), andererseits aber auch andere Experimente eine **Teilchennatur (Photonen)** nahelegen, bzw. nur mit dem Teilchenbild verstanden werden können. Daraus resultiert der bekannte Begriff **Teilchen-Welle-Dualismus**.

Was ist nun Licht, wie wir es heute verstehen? Dazu müssen wir hier einige vorgezogene Überlegungen anstellen, die im Detail erst nächstes Semester im Rahmen der **Quantenphysik** besprochen werden.

Um die entscheidenden Konsequenzen aus der Quantenphysik für Licht und Photonen zu verstehen, müssen wir nur einige Kernaussagen der Quantentheorie, wie sie unserem heutigen Verständnis der Natur entsprechen, verstehen. Diese seien im Folgenden kurz zusammengefasst.

Das Experiment besteht aus einer Anordnung, wie in Abbildung 1.1 gezeigt.

1.1 Wahrscheinlichkeitsamplituden

1.1.1 Wellenfunktionen und Wahrscheinlichkeitsamplitude, Unschärferelation

Zunächst wissen wir, dass die neue Methode, die Welt in der Quantenmechanik – in dem neuen System - darzustellen, darin besteht, jedem Ereignis, das eintreten kann, eine Amplitude zuzuordnen. Wenn das Ereignis die Wahrnehmung eines Teilchens einschließt, dann können wir die Amplitude dafür angeben, dieses ein Teilchen an verschiedenen Orten und zu verschiedenen Zeiten zu finden. Die Wahrscheinlichkeit, dieses Teilchen anzutreffen, ist dann proportional zum Absolutquadrat der Amplitude. Im Allgemeinen variiert diese Amplitude, ein Teilchen an verschiedenen Orten zu verschiedenen Zeiten anzutreffen, mit Ort und Zeit.

In besonderen Fällen kann es sein, dass die Wahrscheinlichkeitsamplitude wie $e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ sinusförmig in Raum und Zeit variiert, wobei \vec{r} der Ortsvektor von irgendeinem Ursprung aus ist. (Vergessen Sie nicht, dass die Wahrscheinlichkeitsamplituden komplexe Zahlen und keine reellen Zahlen sind.) Solch eine Amplitude variiert entsprechend einer bestimmten Frequenz ω und Wellenzahl \vec{k} . Dann zeigt sich, dass dies einer klassischen Grenzsituation entspricht, wo wir geglaubt hätten, ein Teilchen vor uns zu haben, dessen Energie E bekannt ist und mit der Frequenz durch $E = h \nu$ zusammenhängt, und dessen Impuls \vec{p} ebenfalls bekannt ist und mit der Wellenzahl durch $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ zusammenhängt. Das bedeutet, dass der Teilchenbegriff begrenzt ist. Die Vorstellung eines Teilchens - seines Ortes, seines Impulses usw. -, die wir so oft benutzen, ist in gewisser Weise unbefriedigend. Wenn zum Beispiel die Amplitude, ein Teilchen an verschiedenen Orten anzutreffen, durch $e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ gegeben ist, so ist ihr Absolutquadrat eine Konstante, und das würde bedeuten, dass die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen anzutreffen, an allen Punkten gleich ist. Das heißt, dass wir nicht wissen wo es ist – es kann überall sein – hinsichtlich seiner Lage besteht eine große Unsicherheit.

Wenn andererseits der Ort eines Teilchens mehr oder weniger gut bekannt ist und wir ihn beinahe genau voraussagen können, dann muss die Wahrscheinlichkeit, es an verschiedenen Orten anzutreffen, auf einen bestimmten Bereich beschränkt sein, dessen Länge wir Δx nennen. Außerhalb dieses Bereiches ist die Wahrscheinlichkeit gleich Null. Nun ist diese Wahrscheinlichkeit das Absolutquadrat einer Amplitude und wenn das Absolutquadrat Null ist, so ist auch die Amplitude Null, so dass wir einen Wellenzug haben, dessen Länge Δx ist, und die Wellenlänge (der Abstand zwischen den Wellenknoten im Zug) dieses Wellenzuges ist das, was mit dem Teilchenimpuls korrespondiert.

Hier stoßen wir auf etwas Merkwürdiges bei den Wellen, eine sehr einfache Angelegenheit, die überhaupt nichts mit Quantenmechanik zu tun hat. Es ist etwas, das jeder kennt, der sich mit Wellen beschäftigt, selbst wenn er keine Quantenmechanik kennt: nämlich, dass wir keine eindeutige Wellenlänge für einen kurzen Wellenzug definieren können. Solch ein Wellenzug hat keine definierte Wellenlänge. Es besteht eine Unbestimmtheit in der Wellenzahl, die mit der endlichen Länge des Zuges zusammenhängt, und daraus ergibt sich eine Unbestimmtheit im Impuls.

1.1.2 Doppelspaltversuch

Wir wollen uns diese an Hand "des grundlegenden Experiments" der Quantentheorie veranschaulichen.

Wir führen das "Experiment" entweder real oder (hier) als Computersimulation durch. Als Teilchen verwenden wir zuerst Kugeln (z.B. Gewehrkugeln), dann Elektronen und schließlich Licht. Wir können dabei die Geschwindigkeit (Energie) der Teilchen bzw. des Lichts variieren. Außerdem können wir die Dimensionen der Doppelspalten (*Größe und Abstand; diese sind natürlich für die gewählte*

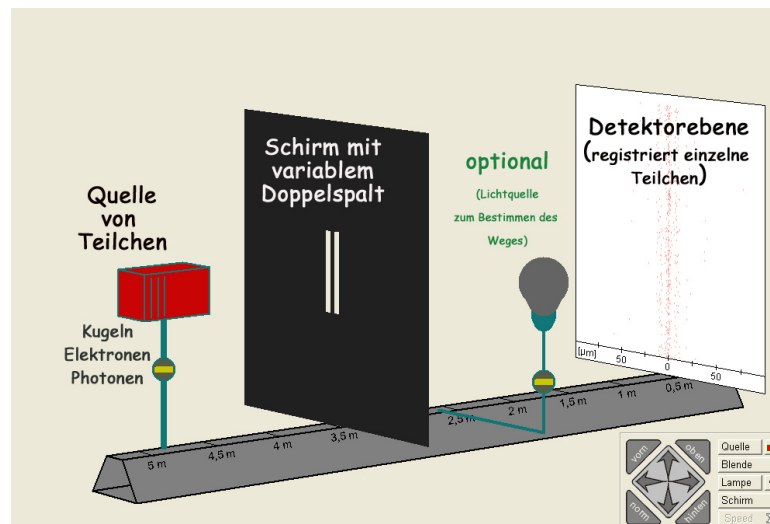


Abbildung 1.1: Doppelspaltversuch: Der klassische Versuch zur Demonstration der wesentlichen Aussagen der Quantenphysik.

Teilchenart von verschiedener Größenordnung) ändern. Wir registrieren dann die **ortsaufgelöste Intensität** (*Intensitätsverteilung*) der Strahlung am Schirm. Diese erscheint charakteristisch für die Teilchenart sowie die experimentellen Parameter.

Während die sich ergebenden Intensitätsmuster (Abbildung) für Kugeln erwartet sind, sind die für Elektronen überraschend und sind praktisch (qualitativ) identisch mit den aus dem Wellenbild erwarteten Intensitätsverteilungen für Licht, wo wir ja klassisch annehmen, dass wir es mit einer elektromagnetischen Welle zu tun haben. Jetzt zweifelt aber niemand daran, dass Elektronen Teilchen sind. Das Ergebnis des Experiments impliziert aber eher (*oder zumindest auch*) einen Wellencharakter! Daraus können wir (ohne aber zu wissen was das eigentlich bedeutet) die Schlussfolgerung ziehen, dass **Elektronen einen Wellencharakter** haben. Zum Unterschied von Licht, wo wir die "schwingende Größe" mit dem zeitlich veränderlichen elektrischen und magnetischen Feld erklären können, ist bei Elektronen nicht so offensichtlich, was eigentlich "schwingt". Die Aussage der Quantentheorie lautet: Die entscheidende Größe ist eine sogenannte **Wahrscheinlichkeitsamplitude** (in Analogie zur Amplitude z.B. des elektrischen Feldes), deren Quadrat die **Wahrscheinlichkeit** (Analogie zur Intensität) ergibt, das Teilchen in einem gewissen Zustand zu finden. Die messbare Größe ist so gut wie immer die letztere. Wir haben damit praktisch den Welle-Teilchen-Dualismus für jedes Teilchen zumindest bei Elektronen gezeigt (für andere gilt er im Prinzip auch), wobei wir ihn aber bei makroskopischen Teilchen im Allgemeinen nicht beobachten können. Es ist zu bemerken, dass wir den Wellencharakter (*über den Teilchencharakter von "Teilchen" wollen wir nicht debattieren*) im Wesentlichen experimentell aus Interferenzerscheinungen gewonnen haben. Dabei gilt natürlich

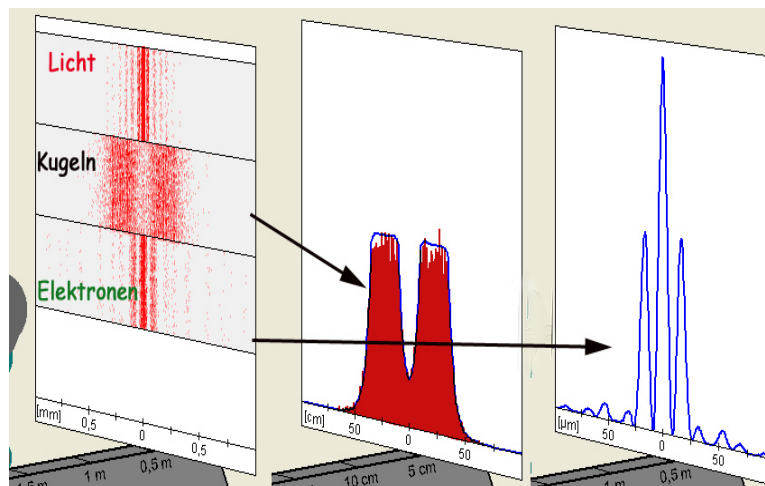


Abbildung 1.2: Charakteristische Intensitätsverteilungen hinter einem Doppelspalt für verschiedenen Quellen.

dann dasselbe, wie wir es schon besprochen haben (bzw. noch detailliert werden), dass Interferenz Kohärenz voraussetzt, das heißt hier die Wahrscheinlichkeitsamplitude über längere Zeiträume kohärent sein muss, um beobachtet zu werden.

Man sollte noch ergänzend erwähnen, dass eine weitere Grundregel der Quantenphysik besagt, dass wir das Interferenzmuster nur beobachten, wenn man nicht aussagen kann, durch welchen Schlitz das Teilchen geht (*oder* anders gesagt, die Wahrscheinlichkeitsamplitude in beiden Schlitzen von Null verschieden ist; wir werden darauf noch eingehen müssen). Die Lampe in Abbildung 1.2 ermöglicht im Prinzip den Weg des Teilchens festzustellen. Das verändert aber den Versuch und resultiert im Zerstören des Interferenzmusters.

1.1.3 Photonen - elektromagnetische Welle

Was können wir aber - und das ist ja eigentlich hier unser Interesse - aus dem Doppelspaltexperiment über die Natur des Lichtes lernen. Im ersten Augenblick könnten wir meinen, dass es kein Problem gibt, da wir ja Licht als elektromagnetische Welle ansehen können. Dann erwarten wir unter der Voraussetzung der Kohärenz das in Abbildung 1.2 dargestellte Interferenzmuster. Das ganze wird aber zum Problem, wenn wir die Intensität des Lichtes immer weiter verringern. Dann stellen wir plötzlich fest (siehe Simulationsexperiment), dass das Licht in einzelnen Pulsen auf den Schirm trifft, also wie bei den Elektronen aus **einzelnen Teilchen besteht**. Diese nennt man **Photonen**.

In der Quantenmechanik kann man zeigen, dass die Energie der Photonen mit der Frequenz (Wellenlänge) der elektromagnetischen Welle durch

$$E_{Ph} = h\nu$$

gegeben ist. $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ist dabei die sogenannte Planck'sche Konstante (oder das Planck'sche Wirkungsquantum). Wir haben es außerdem mit masselosen Teilchen zu tun und deren Impuls ergibt sich zu

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{E_{Ph}}{c}$$

Die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes ist durch die Summe der Energien der einzelnen Photonen (auch Energiequanten) gegeben, bzw. die Intensität des Lichtes durch

$$I = N \cdot c \cdot h \cdot \nu = \varepsilon_0 \cdot c \cdot E^2$$

wobei N die Anzahl der Photonen ist. Daß Photonen als Teilchen angesehen werden können (und damit auch Licht an sich) wird in vielen Experimenten bewiesen, z.B. dass wir mit Photonen wie bei Stößen zwischen Teilchen Impuls übertragen können. Dies wird z.B. zum Abbremsen (Kühlen) von Atomen verwendet.

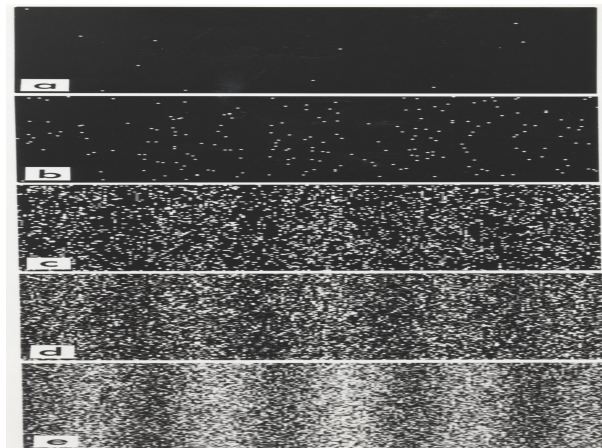


Abbildung 1.3: Hier gezeigt mittels Elektronen: Die Interferenzmuster entsteht durch Interferenz einzelner Elektronen und nicht durch Interferenz verschiedener Elektronen. Dasselbe gilt auch für Photonen.

1.1.4 Statistik oder Interferenz einzelner Photonen

Wenn wir auch schon so weit sind, dass wir Licht aus einzelnen Teilchen bestehend erkannt haben und analog den Elektronen sowohl Teilchen- als auch Welleneigenschaften zuordnen können, bleibt noch eine grundlegende Frage zu beantworten: Ist das Interferenzmuster, das wir in Abbildung 1.2 beobachten, ein Ergebnis der **Interferenz von vielen Photonen** und gibt damit die Wellenfunktion (Wahrscheinlichkeitsamplitude) die Wahrscheinlichkeit an, **dass eine Anzahl von n Photonen im Zustand a (hier Photon geht durch Spalt 1) bzw. b (hier Photon geht durch Spalt 2) sind** (*das würde man intuitiv annehmen*) oder aber die **Interferenz eines Photons** und damit die Wellenfunktion (Wahrscheinlichkeitsamplitude) die Wahrscheinlichkeit angibt, **dass ein Photon im Zustand a (hier Photon geht durch Spalt 1) bzw. b (hier Photon geht durch Spalt 2) ist**. Die Lösung soll im Folgenden im Originalwortlaut von Paul Dirac wiedergegeben werden. Die experimentelle Bestätigung ist z.B. im Experiment von Tanamura (Abbildung 1.3) gegeben worden.

“Some time before the discovery of quantum mechanics people realized that the connexion between light waves and photons must be of a statistical character. What they did not clearly realize, however, was that the wave function gives information about the probability of one photon being in a particular place and not the probable number of photons in that place. The importance of the distinction can be made clear in the following way. Suppose we have a beam of light consisting of a large number of photons split up into two components of equal intensity. On the assumption that the beam is connected with the probable number of photons in it, we should have half the total number going into each component. If the two components are now made to interfere, we should require a photon in one component to be able to interfere with one in the other. Sometimes these two photons would have to annihilate one another and other times they would have to produce four photons. This would contradict the conservation of energy. The new theory, which connects the wave function with probabilities for one photon gets over the difficulty by making each photon go partly into each of the two components. Each photon then interferes only with itself. Interference between two different photons never occurs.”

(Paul Dirac, The Principles of Quantum Mechanics, Fourth Edition, Chapter 1)

Wir können daher sagen:

Das Photon kann also durch einen der beiden Spalten gehen und als Überlagerung dieser beiden Zustände gesehen werden. Diese beiden Zustände interferieren miteinander.

Kapitel 2

Reflexion, Brewsterwinkel und Totalreflexion

Aus dem Verlauf der Reflexionskoeffizienten (Abbildung ??) erkennt man eine Besonderheit für die π -Polarisation: Es existiert ein Einfallswinkel (für $n < n'$!) bei dem der Koeffizient ρ_π verschwindet, Diesen Winkel bezeichnet man als **Brewsterwinkel**. Es existieren zahlreiche Fälle, wo man die Eigenschaft des Brewsterwinkels ausnützt, u.a. in **Laserresonatoren**. Denn es ist besonders wichtig, die Verluste von Licht (Strahlung) beim oftmaligen Hin- und Hergang von diesem zwischen den Resonatorspiegeln gering zu halten. Eine Anordnung wie hier gezeigt, bei der z.B. die Fenster der Röhre mit dem **Lasermedium** (*hier nur soviel: dieses verstärkt das durch es laufende Licht bei jedem Durchgang*) sich unter dem Brewsterwinkel im Strahlengang befinden, reduziert die Reflexionen an diesen beträchtlich. Das ist auch der Grund, warum die Strahlung bei vielen Lasern **linear polarisiert** (d.h. nur eine konstante Polarisationsrichtung aufweisen) ist, weil nur für diese die Reflexionen sehr gering sind.

Hat das entsprechende Medium einen komplexen Brechungsindex, so entspricht die Reflektivität als Funktion des Einfallswinkels der des Beispiels des dielektrischen Mediums, wobei dort allerdings die Brewsterbedingung nicht erfüllt ist. Stattdessen gibt es einen Brewsterwinkel, bei dem die π -polarisierte Komponente nur ein Minimum durchläuft.

Innere Reflexion $n > n'$. Aus dem Brechungsgesetz (??) sieht man sofort, dass ab einem gewissen Einfallswinkel der $\sin \vartheta = \frac{n'}{n} < 1$ und damit der $\sin \vartheta' > 1$ würde und daher der Brechungswinkel rein imaginär wird. Der **Grenzwinkel** ist durch $\sin \vartheta_c = \frac{n'}{n}$ definiert.

Unterhalb des Grenzwinkels können wir analog zum vorigen Fall die Größen R und $\rho_{\pi,\sigma}$ sowie die Phasensprünge berechnen.

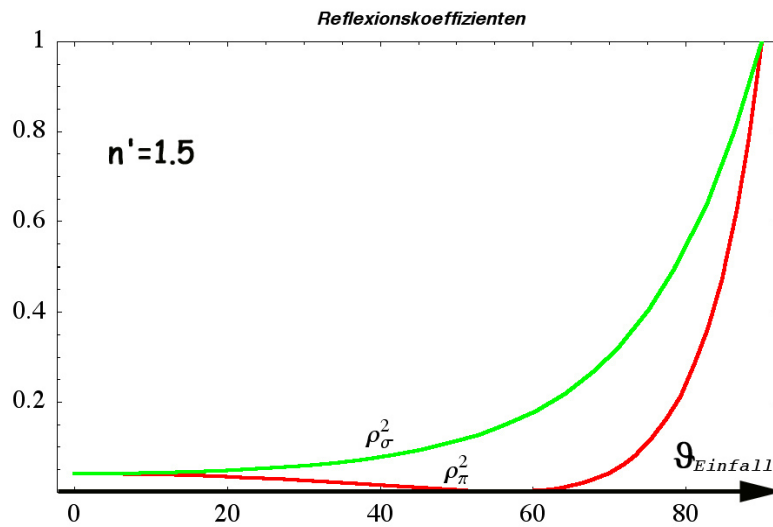


Abbildung 2.1: Reflektivitäten (oder salopp Reflexionskoeffizienten der Intensität) einer dielektrischen Grenzfläche mit $n'/n = 1.5$.

Oberhalb des Grenzwinkels (Totalreflexion) wird a jedoch rein imaginär. Wir führen den reellen Parameter γ ein (Das negative Vorzeichen folgt aus der Überlegung, dass die Welle im Medium nicht ansteigen kann): $(\vec{k} = \tilde{n}' \frac{\omega}{c} (\sin \vartheta, 0, \cos \vartheta))$

$$a = \frac{k'_z}{k_z} = \frac{\tilde{n}' \cos \vartheta'}{\tilde{n} \cos \vartheta} = -i \frac{n' \sqrt{\sin^2 \vartheta' - 1}}{n \cos \vartheta} = -i\gamma$$

Die Welle können wir folgendermaßen anschreiben:

$$E'(x, z, t) = E' e^{i(\omega t - \vec{k}' \cdot \vec{r})} = E' e^{i(\omega t - x k_x)} e^{-\gamma k_z z} \quad (2.1)$$

Diese Welle schreitet (in z -Richtung) nicht fort. Keine Energie wird in z -Richtung transpor-

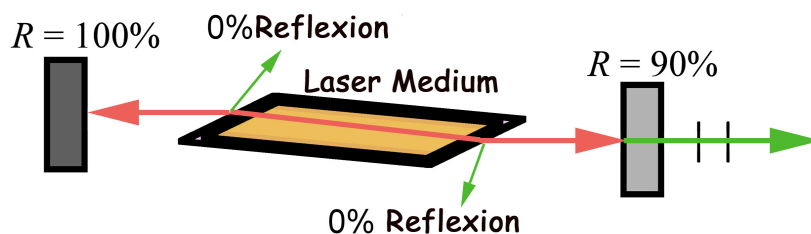


Abbildung 2.2: Verminderung der Reflexionsverluste durch Brewsterwinkel in einem Laserresonator.

tiert, wohl aber in x -Richtung entlang der Grenzfläche). Diese wird als abklingende (Exponential-) Welle oder **Evanescient Wave** bezeichnet (Exponentieller Abfall in einer räumlichen Richtung). Die gedämpfte Welle läuft aber entlang der Grenzfläche. Die für das Medium charakteristische Eindringtiefe ist

$$\delta = \frac{1}{\gamma k_z} = \frac{\lambda_0 \cos \vartheta}{2\pi n' \sqrt{\sin^2 \vartheta' - 1}} \quad (2.2)$$

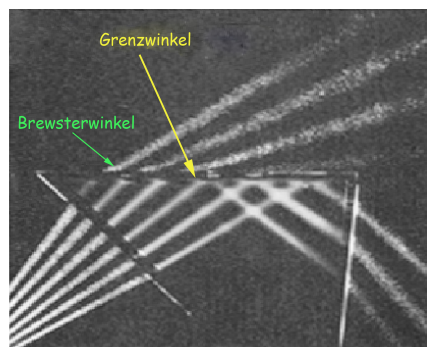


Abbildung 2.3: Brewsterwinkel, Grenzwinkel und Totalreflexion.

$$\rho_\sigma = \frac{1-a}{1+a} = \frac{1+i\gamma}{1-i\gamma}$$

$$R_\sigma = \left| \frac{1+i\gamma}{1-i\gamma} \right|^2 = \frac{(1+i\gamma)(1-i\gamma)}{(1-i\gamma)(1+i\gamma)} = 1$$

Für das Reflexionsvermögen R ergibt sich im Falle der Totalreflexion (Name!) für beide Komponenten Eins. Weiters ergeben sich für die Phasenänderungen nicht mehr Beträge von 0° oder 180° wie in den vorigen Fällen, sondern Zwischenwerte, die außerdem für die σ - und π -Komponenten verschieden sind.

Da $R_\sigma = R_\pi = 1$ ist, sind die Transmissionen T_σ und T_π , Null, so dass, wie schon festgestellt, im zweiten Medium keine Energie senkrecht zur Grenzfläche fließt. Wir können das direkt sehen, wenn wir $\langle \vec{S} \rangle'_z$ berechnen. Allerdings gibt es eine von Null verschiedene Komponente von $\langle \vec{S} \rangle'$ in x -Richtung, d.h., die gedämpfte Welle läuft entlang der Grenzfläche. Die Koeffizienten ρ_σ und ρ_π , sind komplex, was einen Phasensprung des elektrischen Feldes zur Folge hat. Das gilt auch dann, wenn die Amplitude des reflektierten Feldes für alle Winkel gleich bleibt, die größer als der kritische Winkel sind. Um dies näher zu diskutieren, führen wir die Winkel ϕ_σ und ϕ_π ein:

$$\rho_{\sigma} = e^{i\phi_{\sigma}}$$

$$\rho_{\pi} = e^{i\phi_{\pi}}$$

wobei $\tan \frac{\phi_{\sigma}}{2} = \gamma$ und $\tan \frac{\phi_{\pi}}{2} = \frac{n^2}{n'^2} \gamma$ erfüllt sein muss. Wenn die einfallende Welle linear polarisiert ist, so dass die Polarisation des optischen Feldes sowohl σ - als auch π -Anteile hat, so existiert zwischen σ - und π -Komponente eine Phasendifferenz, die eine **elliptische Polarisation** ergibt.

Analog zu den Abbildungen ?? und 2.1 für den Fall $n < n'$ kann man auch für den Fall $n > n'$ die entsprechenden Kurven bestimmen, allerdings nur bis zum Grenzwinkel (Abbildung 2.4). Außerdem ist es interessant, die Phasenwinkel oberhalb des Grenzwinkels zu bestimmen (Abbildung 2.6).

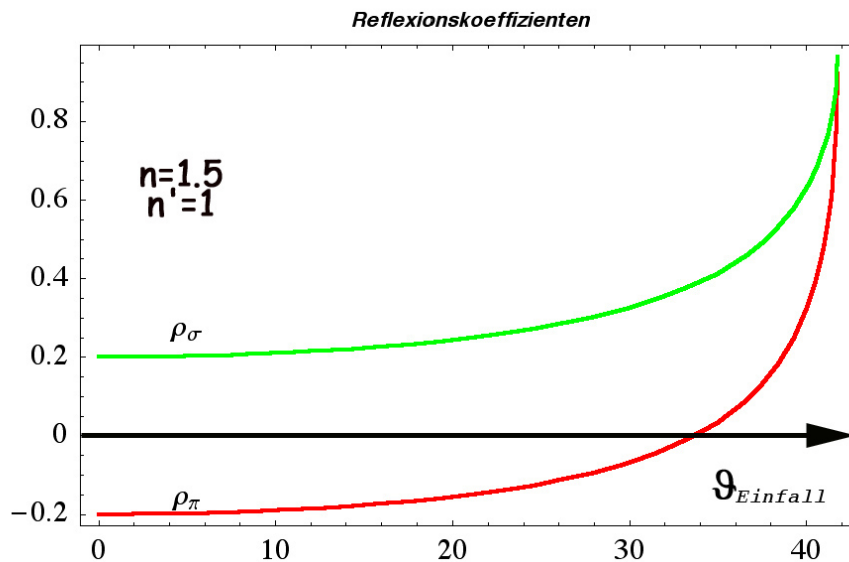


Abbildung 2.4: Reflexionskoeffizienten für $n > n'$.

Anwendungen

Im Folgenden werden kurz einige wichtige praktische Beispiele, die mit den obigen Überlegungen verstanden werden können, besprechen. Die Auswahl ist dabei sicher in gewisser Weise willkürlich.

Strahlumlenker, Retroreflektor, Beam Steering Devices: Unter Ausnutzung der Totalreflektion werden Prismen zur definierten Strahlversetzung verwendet. Einige Beispiele sind in Abbildung 2.7 gezeigt.

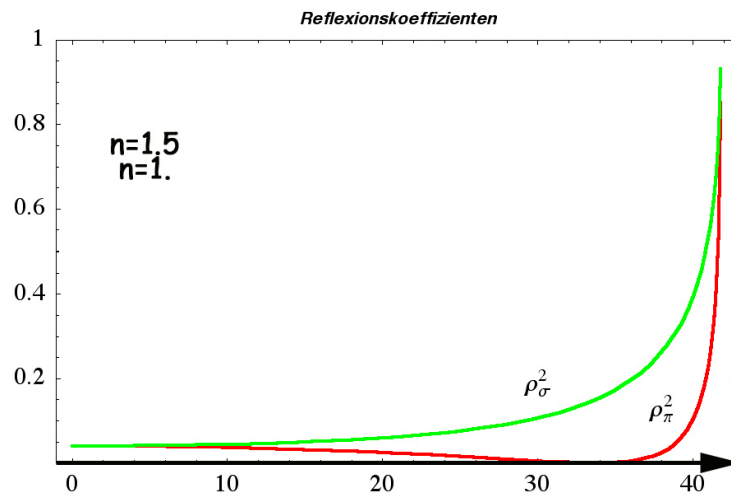


Abbildung 2.5: Reflexionskoeffizienten für $n > n'$ oberhalb des Grenzwinkels.

Lichtleiter Das Prinzip der inneren Totalreflexion hat eine wichtige Anwendung in der Herstellung von Lichtleitern (Faseroptik).

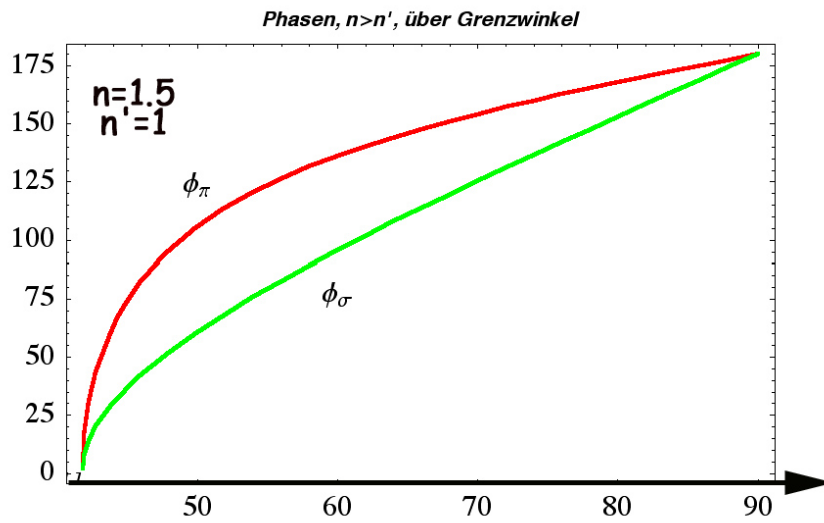
Eine vollständige Behandlung des Problems würde die Lösung der Wellengleichung unter Berücksichtigung der Randbedingungen, die durch die Lichtfaser auferlegt werden, verlangen. In vielen Fällen genügt es jedoch, die Wellen durch die entsprechenden Lichtstrahlen zu ersetzen und die daraus resultierenden Gesetze der Strahlenausbreitung in einer Ebene, die die optische Achse enthält, zu betrachten.

Die Bedeutung der Glasfaseroptik ist vor allem für Laseranwendungen in der Nachrichtenübermittlung, Computertechnik und in der Medizin von größter Bedeutung.

Um Totalreflexion am Übergang Core-Cladding zu erzielen, muss $\vartheta_{in} \geq \vartheta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ werden. Für den inneren Winkel ϑ' gilt (siehe Abbildung 2.9):

$$\vartheta' = 90^\circ - \vartheta_{in}$$

$$n_o \sin \vartheta = n_1 \sin \vartheta' \rightarrow \vartheta_{in} = 90^\circ - \arcsin\left(\frac{n_o \sin \vartheta}{n_1}\right) \geq \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Abbildung 2.6: Phasen für $n > n'$ oberhalb des Grenzwinkels.

$$\begin{aligned} &\rightarrow 90^\circ - \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \geq \arcsin\left(\frac{n_0 \sin \vartheta}{n_1}\right) \\ &\rightarrow \sin\left(90^\circ - \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\right) \geq \frac{n_0 \sin \vartheta}{n_1} \\ \cos\left(\arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\right) &= \sqrt{1 - \frac{1}{n_1^2} n_2^2} \rightarrow \\ \sqrt{1 - \frac{1}{n_1^2} n_2^2} &\geq \frac{n_0 \sin \vartheta}{n_1} \\ n_0 \sin \vartheta &\leq n_1 \sqrt{1 - \frac{1}{n_1^2} n_2^2} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \end{aligned}$$

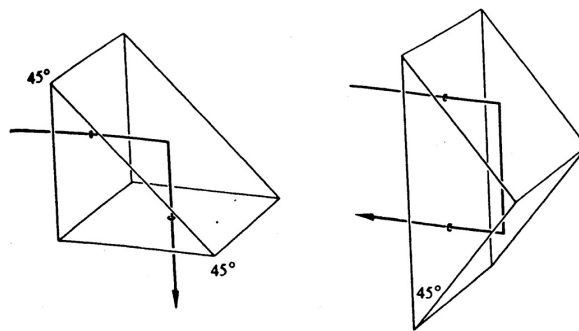


Abbildung 2.7: Prinzip von Beam Steering Devices

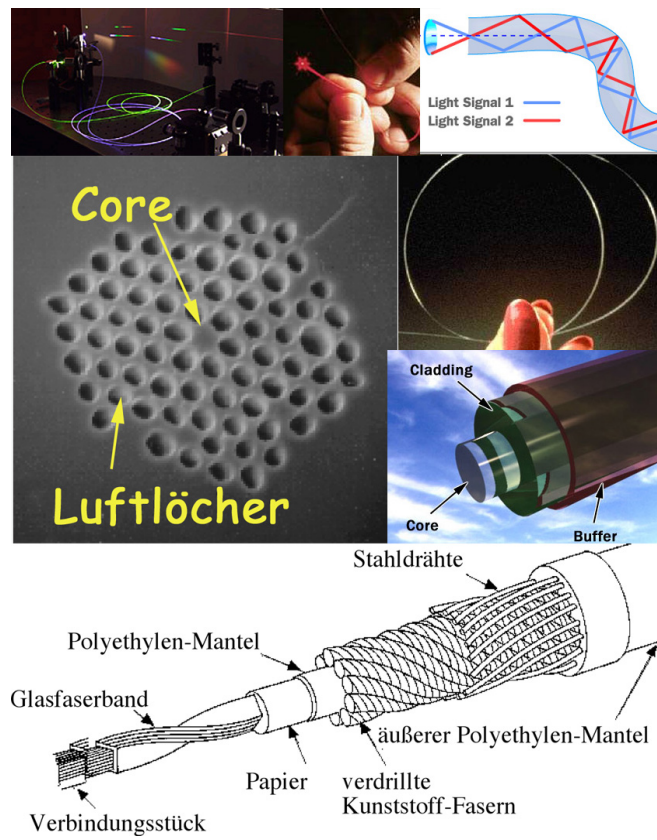


Abbildung 2.8: Lichtleiter

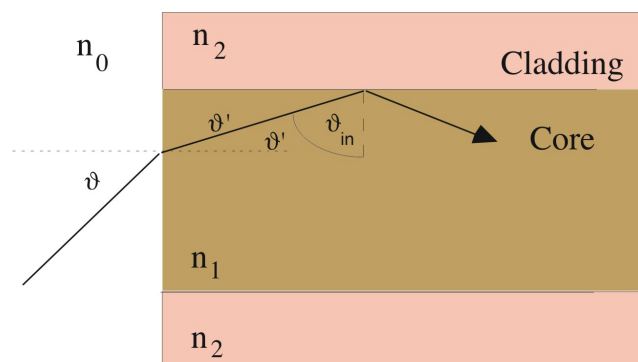


Abbildung 2.9: Zur Herleitung des Akzeptanzwinkels eines Lichtleiters

Wir sehen daraus, dass es einen maximalen Winkel gibt, außerhalb dessen ein einfallender Strahl nicht mehr in der Faser totalreflektiert wird. (**Numerische Apertur des Lichtleiters**).

Aus der eben erhaltenen Beziehung sehen wir, dass ein möglichst großer Akzeptanzwinkel für einen möglichst kleinen Brechungsindex n_2 des Cladding erzielt würde, d.h. am besten überhaupt kein Cladding zu verwenden wäre. Dies hat aber wieder Nachteile, was die Intensitätsverluste durch Reflexionen angeht.

Überlegen wir weiters, wie weit der Lichtstrahl im Lichtleiter von einer Totalreflexion bis zur nächsten zurücklegt. Dies ergibt sich einfach aus geometrischen Überlegungen zu

$$\ell_1 = \frac{L_1}{\cos \vartheta'} = \frac{L_1}{\sqrt{1 - \frac{n_0^2 \sin^2 \vartheta}{n_1^2}}}$$

Über den gesamten Lichtleiter legt der Lichtstrahl daher einen effektiven Weg

$$\ell = \frac{L}{\cos \vartheta'} = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{n_0^2 \sin^2 \vartheta}{n_1^2}}}$$

zurück.

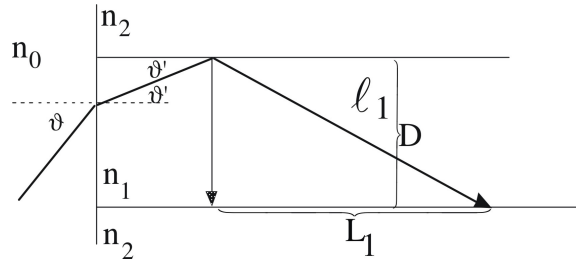


Abbildung 2.10: Zur Bestimmung der Dämpfung (Verluste) in Lichtleitern

Die Transmission durch den Lichtleiter ist nun einerseits durch den Absorptionskoeffizienten des Lichtleiter-Core-Materials K und der zurückgelegten Wegstrecke durch $T = e^{-K/\ell}$ gegeben. Da Lichtleiter in der Datenübermittlung viele Kilometer lang sein können, ist dies eine wichtige Beziehung. Andererseits ist die Anzahl der dabei erfolgten Reflexionen eine weitere wichtige Quelle für Verluste, da diese sehr hoch ist (typisch: $n_o = 1, n_1 = 1.6, n_2 = 1, \vartheta = 30^\circ, D = 50 \mu\text{m} \rightarrow L_1 = 150 \mu\text{m} \rightarrow$ auf 1 m 6580 Totalreflexionen!).

Die Abstimmung der Brechungsindizes n_1 und n_2 ist daher von sehr großer Bedeutung und kann im Allgemeinen nur durch ein **Cladding** (Glas oder Plastiksicht) erreicht werden. Die Transparenz des Claddingmaterials muss nicht sehr hoch sein, aber die Anpassung an die mechanischen Eigenschaften des Core (z.B. Ausdehnungskoeffizient) ist entscheidend.

Eine andere wichtige Funktion des Cladding ist folgende: Wenn der Brechungsindex des äußeren Mediums nicht wirklich rein reell ist, sondern einen kleinen imaginären Anteil hat (*das Medium ist mit optischen Verlusten behaftet*), dann ist R nicht mehr gleich 1 und die an sich in das Medium 2 eindringende verlustfreie Welle ist plötzlich mit einem Energietransport ins Medium 2 verbunden. (**Verminderte Totalreflexion**). Eine weitere Verlustmöglichkeit bezeichnet man als frustrierte Totalreflexion (*siehe weiter unten*). Dadurch entstehen Verluste bei der Totalreflexion. Das kann zum Beispiel dann auftreten, wenn (wie in der ersten Abbildung gezeigt) viele dünne Fasern zu einem Bündel vereinigt sind. Durch die dicke Packung kann eine solche Bedingung geschaffen werden und Licht tritt dann von einer Faser in die andere über (Cross Talk). Durch ein ausreichend dickes Cladding lässt sich dies verhindern.

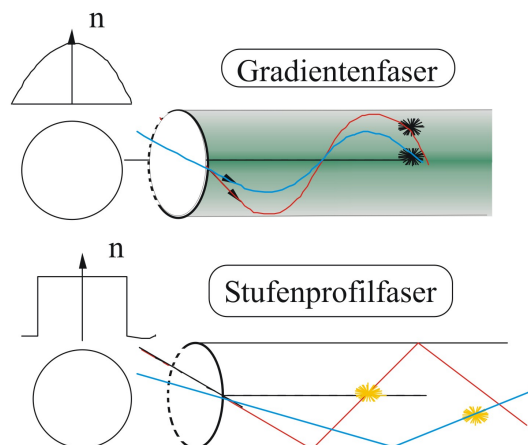


Abbildung 2.11: Vergleich Stufen- und Gradientenprofil Lichtleiter.

Durch sogenannte **Gradientenfasern** kann erreicht werden, dass Strahlen mit verschiedenen Einfallswinkeln, die bei Stufenprofilfasern auf Grund der verschiedenen langen Wege auseinanderlaufen, durch eine erhöhte Geschwindigkeit in den Bereichen mit niedrigem Brechungsindex nicht auseinanderlaufen.

Dadurch muss man bei Stufenprofilfasern im Allgemeinen mit einer Dispersion der verschiedenen Moden rechnen. Dadurch wird z.B. ein zeitlicher Rechteckimpuls, den man in den Lichtleiter einbringt, am Ende "verwaschen" sein. Abhilfe kann z.B. dadurch geschaffen werden, dass man die

Fasern extrem dünn macht ($<15\mu$) (**Single-Mode-Fasern**).

Prismenspektrograph Da die Ablenkung des Strahls auf Grund des Brechungsgesetzes von der Wellenlänge abhängt, kann man die **Dispersion** der Prismen zur Zerlegung eines Lichtes mit verschiedenen Frequenzanteilen in seine Farbkomponenten verwenden.

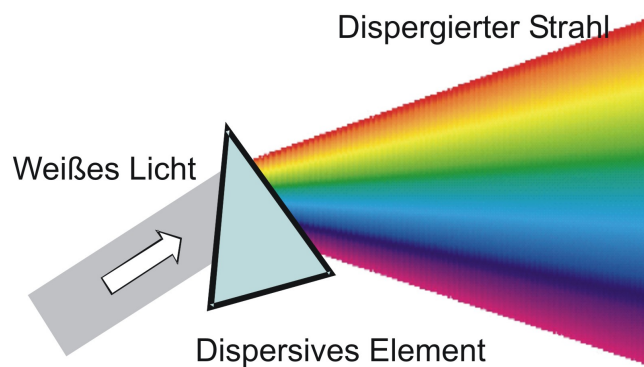


Abbildung 2.12: Farbzerlegung durch ein Prisma

Der Brechungswinkel ist wellenlängenabhängig: $\sin \vartheta' = n(\lambda) \sin \vartheta_{\text{Einfall}}$, wobei $\vartheta_{\text{Einfall}}$ in der obigen Geometrie von Abbildung 2.12 der Einfallswinkel auf die Austrittsfläche des Prismas (rechts) ist. Die **Dispersion** $D = d\vartheta'/d\lambda$ ergibt sich durch Differenzieren dann zu:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}(\sin \vartheta') &= \frac{d}{d\lambda}(n(\lambda) \sin \vartheta_{\text{Einfall}}) \\ \cos \vartheta' \cdot \frac{d\vartheta'}{d\lambda} &= \frac{dn(\lambda)}{d\lambda} \sin \vartheta_{\text{Einfall}} \\ D = \frac{d\vartheta'}{d\lambda} &= \frac{dn(\lambda)}{d\lambda} \frac{\sin \vartheta_{\text{Einfall}}}{\cos \vartheta'} \end{aligned}$$

Regenbogen. Ein schönes Beispiel für die Dispersion bei der Brechung ist auch die Entstehung des Regenbogens (Abbildung 2.14). Für die Erklärung der Entstehung des Regenbogens ist es notwendig schrittweise vorzugehen:

1. Erste und wichtigste Voraussetzung ist die Dispersion des Lichtes im Regentropfen. Betrachten wir dazu den Strahlengang eines aus dem Unendlichen kommenden (Sonnen-)strahles, der aus

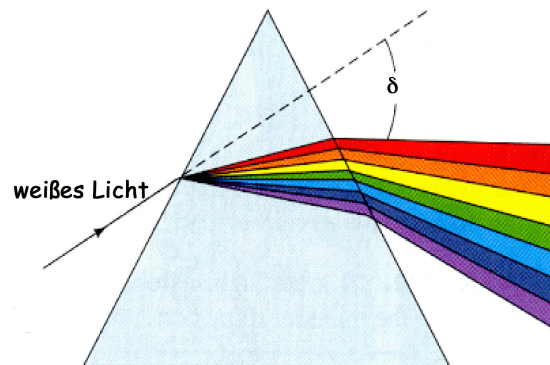


Abbildung 2.13: Dispersion eines Prismas: Allgemeiner Fall

einem relativ flachen Winkel auf den Regentropfen einfällt. Der Strahlengang ist in Abbildung 2.15 gezeigt, wobei der Strahl im Wesentlichen alle Frequenzen des sichtbaren Lichtes beinhaltet und nur die erste Brechung, die Reflexion an der Rückseite und die zweite Brechung wieder nach Luft gezeigt sind.

2. Betrachtet man nun verschiedene parallel einfallende Strahlen derselben Wellenlänge im oberen Tropfenbereich (siehe Abbildung 2.16), dann findet man, dass ein Winkel minimaler Ablenkung existiert (*ein beliebtes Übungsbeispiel*). Dieser hängt natürlich von der Wellenlänge ab.
3. Da aber naturgemäß jeder der versetzten Strahlen das gesamte Wellenlängenspektrum beinhaltet, würden sich trotzdem fast überall Strahlen vieler Wellenlängen überlagern. Wie man aber in Abbildung 2.16 sieht, ist die Dichte der Strahlen jeder Wellenlänge beim wellenlängenabhängigen Winkel der kleinsten Abweichung am dichtesten. Dadurch ergibt sich, dass die verschiedenen Farben in verschiedenen Richtungen ein Maximum aufweisen und getrennt sind (Abbildung 2.17).
4. Die beobachtete räumliche Trennung der Farben im Regenbogen kommt nun dadurch zustande, dass ein Beobachter Tropfen, die räumlich etwas getrennt sind, unter verschiedenen Winkeln sieht (siehe Abbildung 2.18) und damit innerhalb eines gewissen Bereiches des von räumlich getrennten Tropfen zu ihm gelangenden Lichtes (*d.h. unter verschiedenen Winkeln von ihm beobachtet wird*) mit verschiedenen Farben wahrnimmt und zwar so, dass in einem gewissen Raumbereich der bunte Regenbogen entsteht.
5. Als Nebenbemerkung: Auch die verschiedenen Reflexionskoeffizienten, die ja (siehe Gleichungen ??, ??) vom Winkel und der Wellenlänge abhängen, tragen etwas zur Entstehung bei.

Es ist auch interessant, die Entstehung des zweiten Regenbogens (anhand Abbildung 2.19) zu erklären.



Abbildung 2.14: Erster und zweiter Regenbogen

2.1 Optische Eigenschaften der Materie - der Brechungsindex

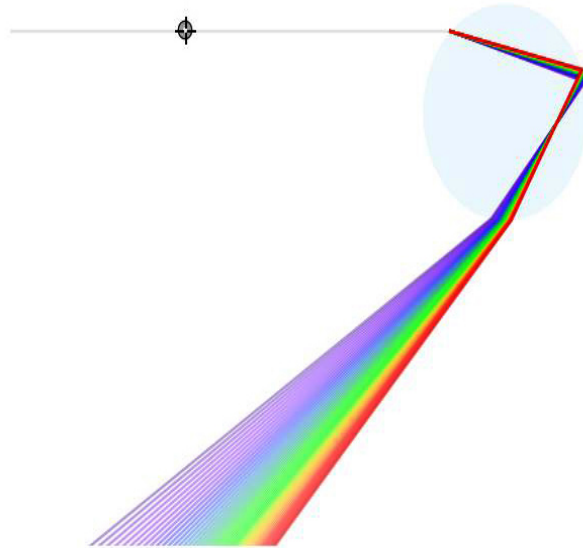


Abbildung 2.15: Strahlengang eines Strahles mit weißem Spektrum durch einen Regentropfen. Nur die Strahlen relevant für den ersten Regenbogen sind gezeigt.

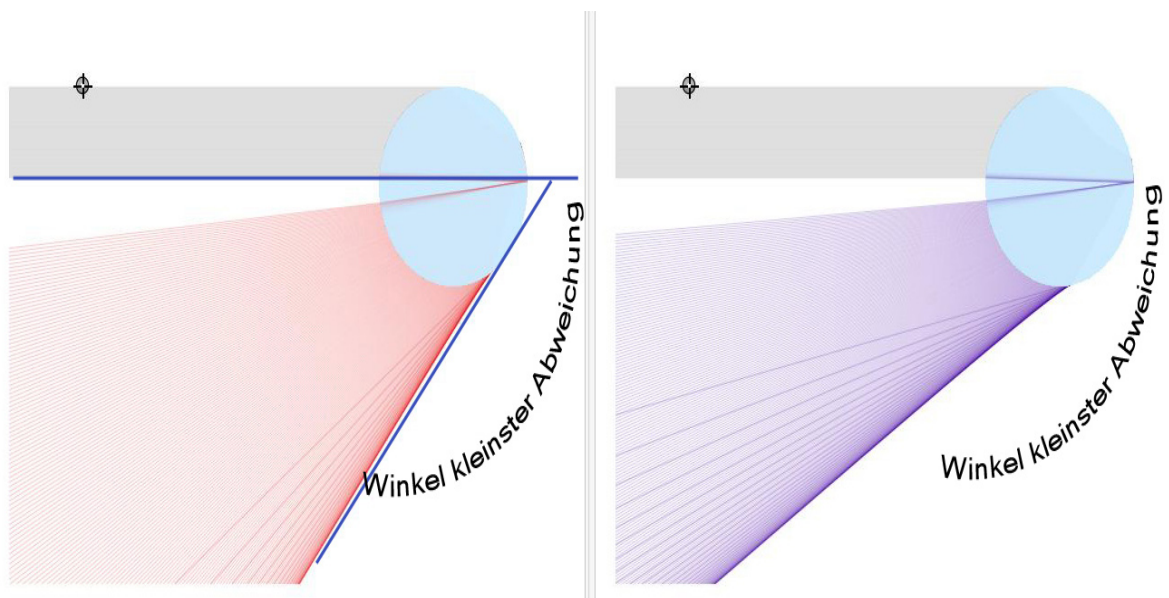


Abbildung 2.16: Es existiert ein wellenlängenabhängiger Winkel der kleinsten Abweichung.

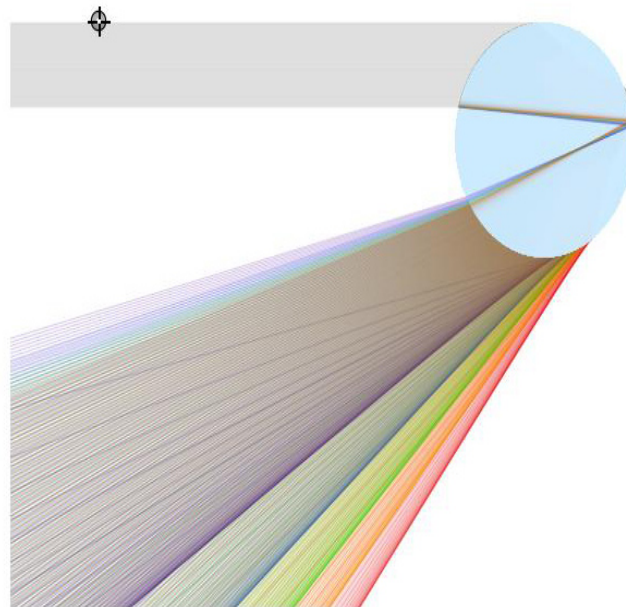


Abbildung 2.17: Von einem einzelnen Tropfen würden wir die verschiedenen Farben in verschiedenen Richtungen beobachten.

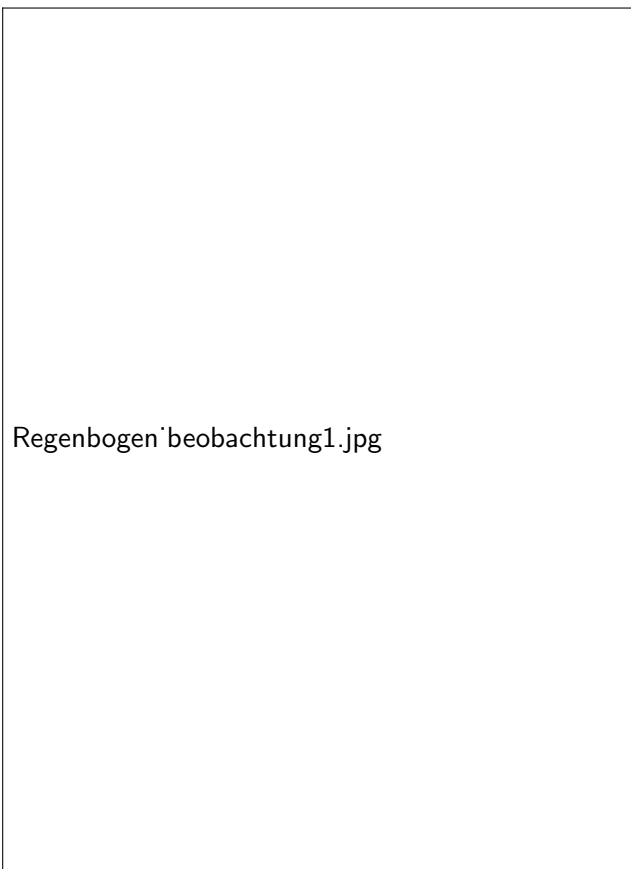


Abbildung 2.18: Beobachtung eines räumlichen Regenbogens.

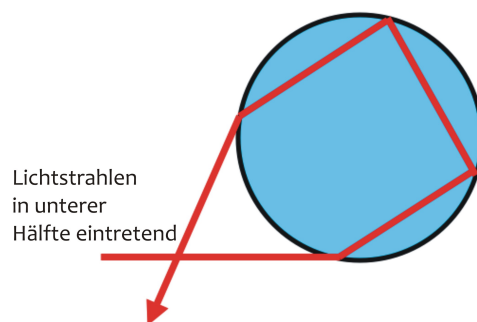


Abbildung 2.19: Entstehung des zweiten Regenbogens durch Zweifachreflexionen. Dadurch erklärt sich seine geringere Intensität und auch, dass sein Spektrum invertiert ist.

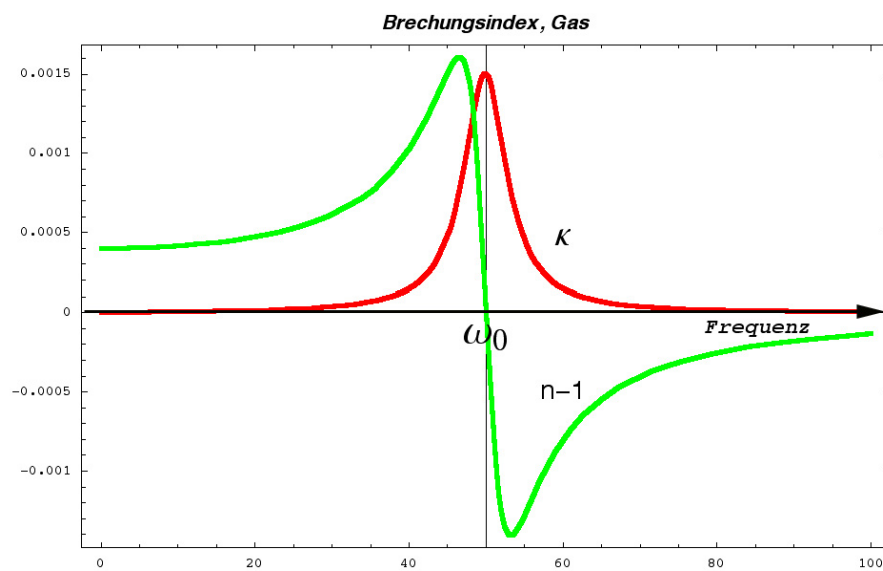


Abbildung 2.20: Real- und Imaginärteil des angenäherten Brechungsindex als Funktion der Frequenz für eine gegebene Resonanzfrequenz ω_0 eines dünnen Gases gemäß Gleichung ??.

Kapitel 3

Raytracing

3.1 Vektorgleichungen für Strahlengang

Die Lichtstrahlen, die mit einer ebenen elektromagnetischen Welle assoziiert werden, sind zum Ausbreitungsvektor \vec{k} parallele Linien, die auf die Ebenen konstanter Phase normal sind. Auch für allgemeine Fälle (z.B. Kugelwelle von einer Punktquelle) können wir eine Ebene konstanter Phase bestimmen (z.B. konzentrische Kugelflächen). Die Strahlen sind dann radiale Linien, ausgehend von der Punktquelle.

Die meisten optischen Systeme bestehen aus einer Reihe brechender oder reflektierender Flächen für die nötige Ablenkung der Lichtstrahlen sowie aus Gesichtsfeld und Aperturblenden zur räumlichen und winkelmäßigen Eingrenzung der Strahlen. Für den Entwurf einer Optik müssen oft die Strahlengänge durch das System verfolgt werden, was man durch wiederholte Anwendung der Gesetze der geometrischen Optik erreicht. Dies ist im Prinzip einfach, kann aber in der Praxis eine sehr schwierige Aufgabe werden, wenn hohe Genauigkeit gefordert wird. Zuerst wollen wir das Prinzip zeigen, das man zur genauen Strahlverfolgung durch eine Folge von coaxialen, sphärischen, brechenden Flächen benötigt. Im Folgenden werden wir nur Näherungen dieser Formeln benötigen, die wir nach Bedarf herleiten.

Als Erstes wollen wir die allgemeinen Ausdrücke für die Richtungen der gebrochenen und reflektierten Strahlen in vektorieller Form angeben. Wir wissen bereits, dass die Wellenvektoren für einfallende, gebrochene und reflektierte Welle die Form

$$\begin{aligned}
 \vec{k} &= n \frac{\omega}{c} \hat{s} \\
 \vec{k}' &= n' \frac{\omega}{c} \hat{s}' \\
 \vec{k}'' &= n \frac{\omega}{c} \hat{s}''
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

haben, wobei \hat{s} , \hat{s}' und \hat{s}'' Einheitsvektoren darstellen und die Brechungsindizes n und n' beide reell sind. Diese Vektoren müssen alle in der Einfallsebene liegen. Diese Ebene enthält die Flächennormale $\hat{\eta}$, die hier als in das Medium der Austrittsseite weisender Einheitsvektor definiert ist (Man verwechsle n und n' nicht mit $\hat{\eta}$!), und den Einheitsvektor \hat{t} tangential zur Grenzfläche und senkrecht zu $\hat{\eta}$ (vergleiche dazu Abbildung 3.1). Die Winkel ϑ , ϑ' und ϑ'' sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
 \hat{\eta} \cdot \hat{s} &= \cos \vartheta \\
 \hat{\eta} \cdot \hat{s}' &= \cos \vartheta' \\
 \hat{\eta} \cdot \hat{s}'' &= \cos \vartheta''
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

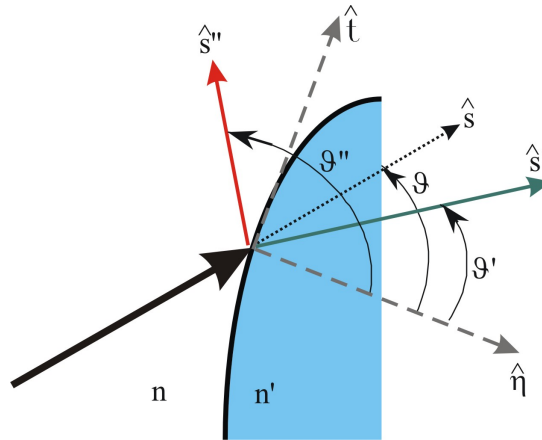


Abbildung 3.1: Definition der Größen für Strahldurchrechnung (Raytracing) in der allgemeinsten Form.

Ausgangspunkt für die Herleitung entsprechender Gleichungen, die uns erlauben werden, das Raytracing durchzuführen, sind die angeschriebenen Beziehungen für die Strahlenrichtungen in Vektorform. Beachten Sie bitte, dass die Definition der Winkel hier etwas anders als bisher gewählt wird (Reflexionswinkel = Supplementwinkel des gewöhnlichen Reflexionswinkels). Es zeigt sich aber, dass dies für die folgende Behandlung günstiger ist. (Alle Winkel sind bezogen auf die Flächennormale und sind in der selben Drehrichtung).

Die Phasenanpassungsbedingungen ??, ??, ?? und das Brechungsgesetz ?? führen zu Beziehungen zwischen den \vec{k} Werten in 3.1 und 3.2, die die Strahlrichtungen und Brechungsindizes verknüpfen. Da $\frac{\omega}{c}$ für alle drei Gleichungen in 3.1 und 3.2 identisch ist, müssen wir uns auf die Beziehungen zwischen den verschiedenen $n \frac{\omega}{c} \hat{s}$ konzentrieren, wozu wir zunächst \hat{s} als Funktion von $\hat{\eta}$ und \hat{t} ausdrücken

$$\begin{aligned} n \hat{s} &= n \cos \vartheta \hat{\eta} + n \sin \vartheta \hat{t} \\ n' \hat{s}' &= n' \cos \vartheta' \hat{\eta} + \underbrace{n' \sin \vartheta'}_{n \sin \vartheta} \hat{t} \\ n \hat{s}'' &= n \cos \vartheta'' \hat{\eta} + n \sin \vartheta'' \hat{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n' \hat{s}' &= n' \cos \vartheta' \hat{\eta} + n \sin \vartheta \hat{t} = n' \cos \vartheta' \hat{\eta} + n \hat{s} - n \cos \vartheta \hat{\eta} = \\ &= n \hat{s} + (n' \cos \vartheta' - n \cos \vartheta) \hat{\eta} = n \hat{s} + (\sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 \vartheta} - n \cos \vartheta) \hat{\eta} \end{aligned}$$

Wir erhalten also für den gebrochenen Strahl

$$n' \hat{s}' = n \hat{s} + (\sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 \vartheta} - n \cos \vartheta) \hat{\eta} \quad (3.3)$$

und für den reflektierten Strahl mit $\vartheta'' = 180^\circ - \vartheta$

$$\hat{s}'' = \hat{s} - 2 \cos \vartheta \hat{\eta} \quad (3.4)$$

Haben wir also zunächst nur die Vektoren \hat{s} und $\hat{\eta}$ und die Indizes n und n' , so bestimmen wir zunächst $\cos \vartheta$ aus 3.2 und dann und können dann \hat{s}' und \hat{s}'' aus 3.3 bzw. 3.4 berechnen.

Ein allgemeines Raytracingprogramm mit für beliebige Strahlen und einem optischen System (d.h. verschiedene Grenzflächen zwischen Medien) wo man die Grenzflächen analytisch beschreiben kann (z.B. Kreise, Ellipsen etc.), muss also folgende Schritte durchführen, um den Strahlengang eines Strahles durch ein optisches System zu verfolgen:

- Der Ausgangsstrahl wird als Vektor formuliert
- Der Schnittpunkt dieses Strahles mit der ersten brechenden Fläche wird bestimmt.
- In diesem Punkt berechnet man dann die Vektoren $\hat{\eta}$ und \hat{t} .
- Mit diesen berechnet man jetzt den reflektierten bzw. den gebrochenen Strahl als

Vektor.

- Jetzt wird der Schnittpunkt mit der nächsten brechenden Fläche berechnet.
- usw.

3.2 Bildentstehung

Aus dem vorigen Abschnitt haben wir gesehen, wie wir im Prinzip den Strahlengang jedes Strahles durch ein **optisches System** bestimmen können. Wir werden uns in den nächsten Abschnitten, ausgehend von diesen Überlegungen damit beschäftigen, wie wir zuerst die oben erhaltenen Grundgleichungen 3.3 bzw. 3.4 für spezielle optische Systeme vereinfachen bzw. kompakter formulieren können. Für diese Spezialfälle werden wir dann charakteristische Größen eines optischen Systems definieren können und einfache Beziehungen finden, die in diesen Fällen für den Strahlengang gelten. Damit kann man dann relativ einfach ein optisches System (d.h. die entsprechenden Medien und Grenzflächen) so konstruieren (*designen*), dass es die Strahlen "vernünftig" leitet, z.B. ein Bild entstehen lässt. Dazu müssen wir einen wichtigen Begriff definieren, die sogenannte **Bildentstehung**.

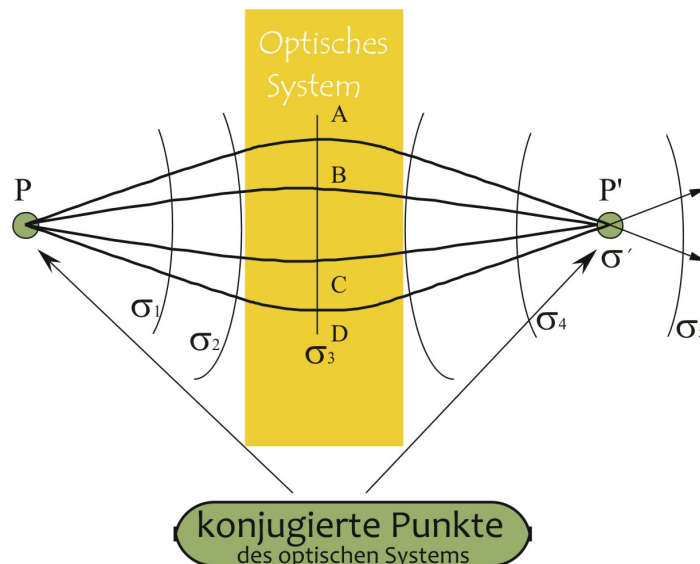


Abbildung 3.2: Definition der Bildentstehung

In vielen Fällen wird es ja unser Ziel sein, zu einer Abbildung zu kommen. Ein Objekt, das als Quelle für ein optisches System dient, kann als eine Gruppe von Punktquellen mit jeweils eigener Lage und Helligkeit betrachtet werden, weshalb wir für das Verständnis der Bildentstehung ausgehender Objekte zunächst die Abbildung einer Punktquelle studieren müssen. Abbildung 3.2 zeigt den Abbildungsvorgang für eine Punktquelle am Punkt P . Alle Strahlen, die zum Bild bei P' beitragen (wie zum Beispiel A und D), müssen bei P' in Phase eintreffen. (Tun sie dies nicht, so führt die dann zufällige Überlagerung zu einer sehr kleinen Amplitude des optischen Feldes.) Ein Weg, dies zu erreichen ist, einen Mechanismus bereitzustellen, durch den die optische Weglänge gegenüber der gewöhnlichen Weglänge erhöht wird, und zwar für die Strahlen B und C mehr als für A und D .

Dies erreicht man, indem man alle Strahlen durch eine Glasplatte laufen lässt, deren Dicke variiert und am Rand kleiner ist als in der Mitte, was natürlich nichts anderes als eine gewöhnliche **Linse** ist. Wir können deren Wirkung mit dem Fermat'schen Prinzip verstehen, welches verlangt, dass alle Strahlen gleiche optische Weglängen durchlaufen müssen, wenn sie gleichzeitig zulässig sein sollen. Ein Bild lässt sich ebenso durch eine Kombination mehrerer Reflexionen und Brechungen und/oder durch die kontinuierliche Ablenkung von Lichtstrahlen in einem Medium, in dem der Brechungsindex eine stetige Funktion des Ortes ist, erzeugen.

Man sagt, dass P' ein reelles Bild von P ist, falls alle Strahlen, die von P innerhalb eines Bündels ausgehen, das einen endlichen (im Unterschied zu einem infinitesimalen) Raumwinkel aufspannt, bei P' (gleichphasig) zusammenkommen.

3.2.1 Bildentstehung und Linsengleichung

Damit haben wir am Punkt P_2 den Strahl $\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$ als Funktion des Anfangsstrahles $\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$ im Punkt P_0 ausgedrückt. Die Faktoren von α_0 und x_0 sind nur vom optischen System (von seinen Parametern) abhängig. Wenn wir nun z.B. das (hier das einfachste mögliche; vielleicht würden Sie einwenden, das System hier hat eine sphärische Grenzfläche und ist daher komplexer als z.B. eine ebene Grenzfläche. Diese ist aber durch $R = \infty$ hier automatisch inkludiert) optische System so konstruieren wollen, dass P_2 (gemäß den vorher besprochenen Forderungen) ein Bildpunkt von P_0 wird. Dann sollen alle Strahlen, die von P_0 ausgehen, unabhängig vom Winkel α_0 (solange dieser klein ist!) bei P_2 ankommen. Mathematisch bedeutet dies, dass der Koeffizient von α_0 in der Gleichung ?? verschwinden muss.

$$D_{01} + D_{12} \left(\frac{n}{n'} + \frac{1}{R} \frac{1}{n'} D_{01} (n - n') \right) = 0 \rightarrow$$

$$\frac{n}{D_{01}} + \frac{n'}{D_{12}} = \frac{(n' - n)}{R} \quad (3.5)$$

Die Wahl der Vorzeichen der einzelnen Größen ist so, dass sie positiv sind, wenn der Gegenstand links von der Scheitelebene der Grenzfläche und das Bild rechts von der Scheitelebene sind. Beachte weiters, dass R positiv für eine zum Einfall hin konvexen Ebene und negativ für konkave Fläche ist.

Die Gleichung 3.5 nennt man oft auch Linsengleichung oder Abbildungsgleichung. Wir werden die Sinnhaftigkeit des Namens noch zeigen. Hier haben wir sie eigentlich nur für eine brechende Fläche

gezeigt. D_{01} und D_{12} bezeichnet man oft auch als g (**Gegenstandsweite**) und b (**Bildweite**). Beide sind hier vom Scheitelpunkt $V = (0, 0, 0)$ aus gerechnet mit den Vorzeichenkonventionen von oben. Noch eine andere weitere wichtige Größe müssen wir definieren: Wenn die Gegenstandsweite unendlich ist ($D_{01} = \infty$; alle Strahlen kommen parallel aus dem Unendlichen), ist die Bildweite aus 3.5 $D_{12} \equiv f' = \frac{n' R}{(n' - n)}$ und man bezeichnet sie als (bildseitige) **Brennweite**. Analog definieren wir für ein Bild im Unendlichen die gegenstands-(objekt-)seitige Brennweite f .

$$f' = \frac{n' R}{(n' - n)} \quad (3.6)$$

$$f = \frac{n R}{(n' - n)}$$

$$\frac{n}{g} + \frac{n'}{b} = \frac{n}{f} = \frac{n'}{f'} \quad (3.7)$$

Unter Anwendung zweier Translationen und einer Reflexion sowie einer analogen Vorgangsweise wie bei der Brechung (Null-Setzen des Koeffizienten für α_0) kann man eine Bedingung für die Bildformation bei der Reflexion herleiten:

$$\frac{1}{D_{01}} + \frac{1}{D_{12}} = \frac{-2}{R} = \frac{1}{f} \quad (3.8)$$

3.2.2 Laterale und Winkel-Vergrößerung

Wenn für die Gleichung ?? die Abbildungsbedingung erfüllt ist und daher der Koeffizient von α_0 (oder allgemein α) verschwindet, ergibt sich x_2 aus x_0 durch Multiplikation mit einem Faktor, den man aus einsichtigen Gründen als die **laterale Vergrößerung** bezeichnet:

$$x_2 = \left(\frac{1}{R n'} D_{12} (n - n') + 1 \right) x_0 = m_x \cdot x_0$$

Wie wir schon gezeigt haben, gilt in diesem Fall die Linsengleichung und die Lateralvergrößerung m_x wird daher:

$$m_x = -\frac{n}{n'} \frac{D_{12}}{D_{01}} = -\frac{n}{n'} \frac{b}{g} \quad (3.9)$$

Wenn zwei Strahlen mit einer Winkeldifferenz $\Delta\alpha_0$ von P_0 ausgehen und bei P_2 mit einer von $\Delta\alpha_2$ eintreffen, dann definieren wir die **Winkelvergrößerung** m_α als das Verhältnis $\frac{\Delta\alpha_2}{\Delta\alpha_0}$. Die Winkelvergrößerung erhält man leicht aus der zweiten Transformationsgleichung ?? (für fixe x_0), wieder unter Verwendung der Linsengleichung.

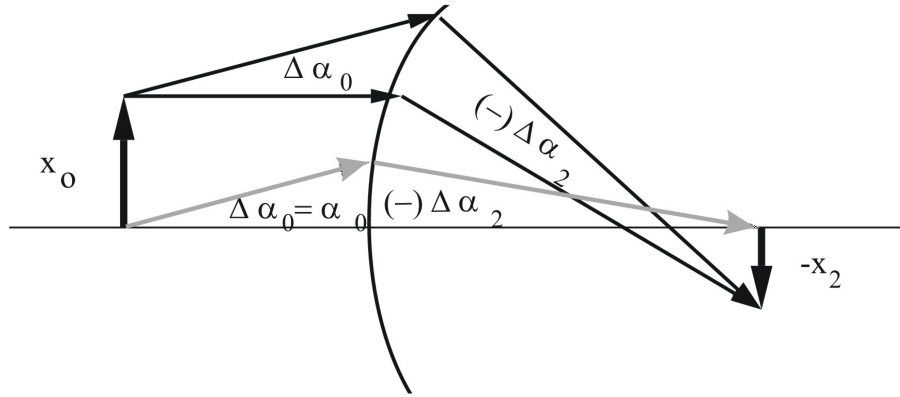


Abbildung 3.3: Definition der Winkelvergrößerung einer brechenden Fläche.

$$\begin{aligned}
 \alpha_2 &= \frac{1}{Rn'} (n - n') x_0 + \left(\frac{n}{n'} + \frac{1}{R} \frac{1}{n'} D_{01} (n - n') \right) \alpha_0 \rightarrow \\
 \left. \frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha_0} \right|_{x_0=\text{const.}} &= \frac{\Delta \alpha_2}{\Delta \alpha_0} = \frac{n}{n'} + \frac{1}{R} \frac{1}{n'} D_{01} (n - n') = \\
 &= \frac{n}{n'} + \frac{1}{f'} D_{01} = \frac{n}{n'} + \frac{\frac{n}{n'} + \frac{n'}{n}}{n'} D_{01} \rightarrow \\
 m_\alpha &= \frac{\Delta \alpha_2}{\Delta \alpha_0} = -\frac{D_{01}}{D_{12}} \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

Für ein abbildendes optisches System gilt dann die wichtige Beziehung (**Lagrange- (Smith-Helmholtz)-Gleichung**)

$$m_\alpha \cdot m_x = \frac{n}{n'} \quad (3.11)$$

Eine große lineare Vergrößerung kann also nur auf Kosten einer verminderten Winkelvergrößerung erreicht werden.

3.3 Lupe

Ein einfaches Gerät zum Vergrößern ist die Lupe. Sie erzeugt ein virtuelles, aufrechtes vergrößertes Bild, das sich am Nahpunkt des Auges (in der deutlichen Sehweite) befindet.

Ohne optisches Gerät muss sich das Objekt 25 cm vom Auge entfernt befinden und wird von diesem dann unter dem Winkel α_E^0 gesehen. Mit dem Vergrößerer kann das Objekt näher an das

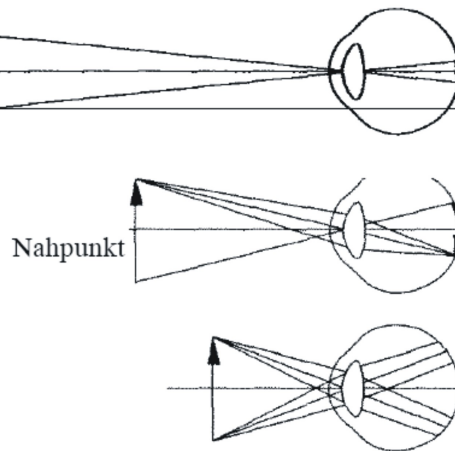


Abbildung 3.4: Nahpunkt

Auge gebracht werden und die Lupe bewirkt somit, dass das Objekt scheinbar unter dem Winkel α_E gesehen wird, was einem vergrößerten virtuellen Bild etwa in der deutlichen Sehweite entspricht.

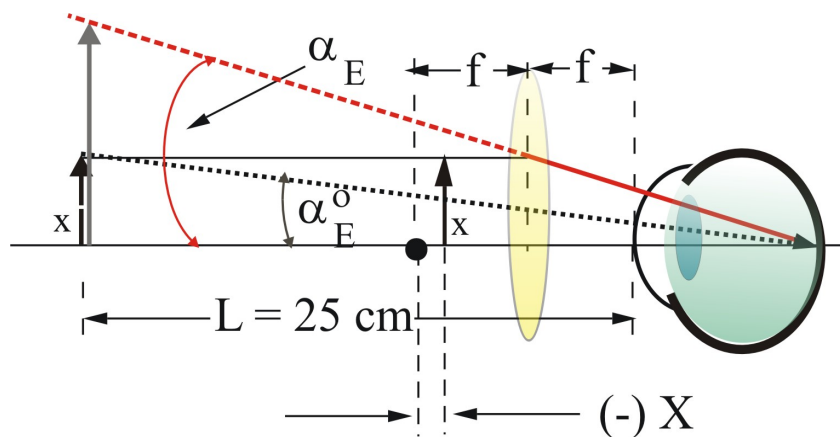


Abbildung 3.5: Lupe

Es gilt $\alpha_E = \frac{x}{f}$ und $\alpha_E^0 = \frac{x}{|L|}$. Der Objektstand sollte daher $X = -\frac{f^2}{|L|}$ sein.

Für die Vergrößerung gilt damit: $M = \frac{|L|}{f}$, womit wir den **Sollgegenstandsabstand** zu $X = -\frac{f}{M}$ erhalten. Das Minuszeichen zeigt, dass das Objekt näher an der Linse liegt als F .

Kurze Brennweiten erhöhen also die Vergrößerung. Einzelne Linsen mit sehr kurzen Brennweiten

erfordern aber kleine Linsenradien, was wiederum die paraxiale Näherung bald sehr ungenau macht. Kurze Brennweiten können besser mit zwei oder mehreren Linsen erreicht werden.

3.4 Mikroskop

Das Mikroskop steht auf einer höheren Stufe als das einfache Vergrößerungsglas, da es ein größeres Winkelverhältnis (größer als ungefähr $30\times$) von nahe gelegenen Objekten liefert. Seine Erfindung wird allgemein dem holländischen Brillenmacher Zacharias Janssen aus Middelburg (um 1590) zugeschrieben. Galilei, der seine Erfindung des Mikroskops 1610 bekanntgab, folgt dicht auf dem zweiten Platz. Eine einfache Variante, die diesen frühesten Geräten näher steht als dem modernen Labormikroskop, ist in Abbildung 3.6 dargestellt. Das Linsensystem (hier eine Einzellinse), das dem Objekt zugewandt ist, heißt Objektiv. Es erzeugt ein reelles, umgekehrtes und in der Regel vergrößertes Bild des Objekts. Dieses Bild liegt auf der Ebene der Feldblende des Okulars. Strahlen, die von einem beliebigen Punkt dieses Bildes divergierend ausgehen, treten wie im vorhergehenden Abschnitt parallel zueinander aus der Augenlinse aus (die in diesem einfachen Falle das ganze Okular ist). Das Okular vergrößert dieses Zwischenbild noch mehr, da es als Lupe wirkt. Beim Mikroskop sind die Brennweiten des ersten Elements, des Objektivs, und des zweiten Elements, des Okulars klein gegen den Abstand Δ zwischen den Brennpunkten, der fast standardmäßig 160 mm (**Tubuslänge**) beträgt.

Wir können das Mikroskop als kombiniertes System betrachten. Da gilt $\Delta \gg$ Brennweiten von Okular und Objektiv \rightarrow

$$\begin{aligned}\varphi_{sys} &= -\varphi_1 d_{nb}^{\varphi_2} + \varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2 (f'_1 + f_2 + \Delta) = \\ &= \varphi_1 + \varphi_2 - \underbrace{\varphi_1 \varphi_2 f_2}_1 - \underbrace{\varphi_2 \varphi_1 f'_1}_1 - \varphi_1 \varphi_2 \Delta = -\varphi_1 \varphi_2 \Delta \rightarrow \\ &\rightarrow\end{aligned}$$

$$f' = -\frac{f'_1 f_2}{\Delta} \rightarrow f = n f'$$

$$M = \frac{|L|}{f} = \frac{L}{f_2} \left(-\frac{\Delta}{f'_1} \right) = M_{Okular} \cdot m_{x,Objektiv}$$

3.5 Interferenz

Obwohl, wie man leicht sieht, **die Spitzenintensität zweimal so groß ist wie die Summe der Einzelintensitäten**, ist natürlich die Energieerhaltung nicht verletzt. Wie man leicht zeigen kann, ist der **räumliche Mittelwert** über S gleich $2S_1$, womit die Energieerhaltung gewährleistet ist. Der

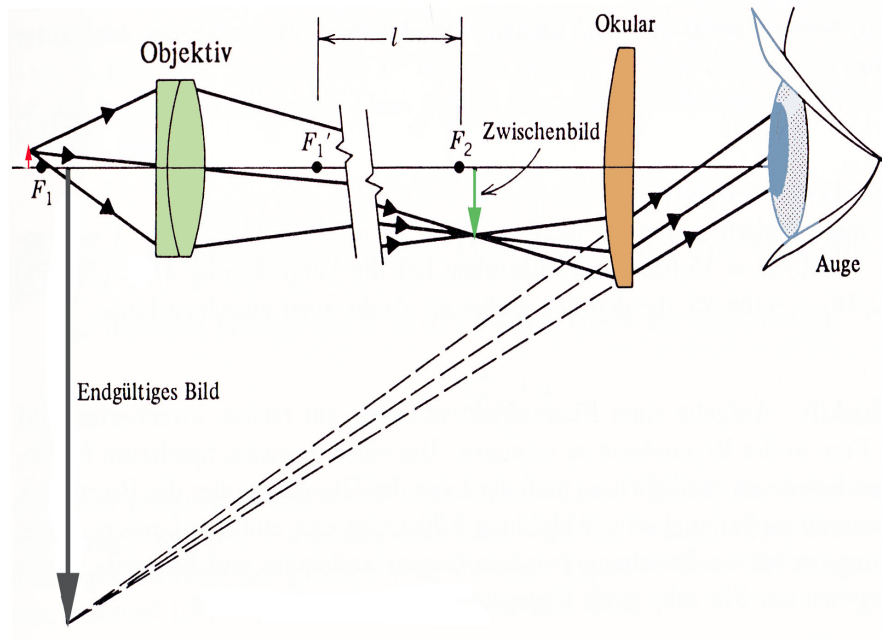


Abbildung 3.6: Mikroskop

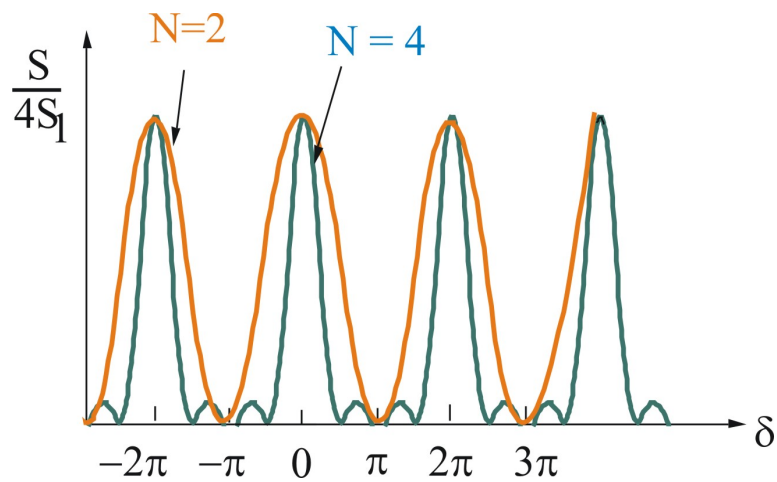


Abbildung 3.7: Intensität eines Strahles der als Überlagerung mehrer Teilstrahlen gebildet wurde. Das Intensitätsverhältnis $S/4S_1$ ist über der Phasenverschiebung $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$ aufgetragen. Der Intensitätsverlauf ist für die Überlagerung von 2 und 4 Strahlen gezeigt.

Effekt der Interferenz ist also z.B. eine Anhäufung der Energie in gewissen räumlichen Gebieten, wobei die Energie anderen Raumteilen entsprechend entzogen wird (**Umverteilung der Energie**). In der Abbildung 3.7 ist das Intensitätsverhältnis $S/4S_1$ (beachte $S = 2S_1[1 + \cos(\delta)] = 4S_1 \cos^2 \frac{\delta}{2}$) über der Phasenverschiebung $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$ aufgetragen. Der Intensitätsverlauf ist für die Überlagerung von 2 und 4 Strahlen gezeigt. Betrachten wir hier den Fall von 2 Strahlen, dann sollte man sich merken, dass in diesem Fall (Zweistrahlinterferenz) die Intensität cosinusförmig zwischen Null und dem Maximalwert schwankt.

Es ist auch wichtig, nicht zu vergessen, dass wir bisher angenommen haben, dass $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$ zeitlich konstant ist (Kohärenz). Ist dies nicht der Fall - *ändert sich die Phasendifferenz z.B. statistisch* - ergibt die zeitliche Mittelung über viele $\cos \delta$ Null und der Mittelwert des Interferenzterm verschwindet und wir beobachten

$$\langle \vec{S}_1 \rangle + \langle \vec{S}_2 \rangle + 2\sqrt{\langle \vec{S}_1 \rangle \langle \vec{S}_2 \rangle} \underbrace{\langle \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \rangle_{\text{zeitliche Mittelung}}}_{=0} = \langle \vec{S}_1 \rangle + \langle \vec{S}_2 \rangle \quad (3.12)$$

einfach die Intensitätsaddition der Teilstrahlen.

Wir können aus dem obigen Ergebnis eine wichtige Tatsache herauslesen: In der Praxis laufen Interferenzexperimente auf die Bestimmung der Phasendifferenz der involvierten Wellen hinaus. Wenn wir in folgenden Kapiteln verschiedene Größen (Intensitäten) z.B. als Funktion der Wellenlänge auftragen, dann sollte man sich immer vor Augen halten, dass die eigentliche Variable die Phasendifferenz ist. Die physikalische Größe, z.B. die Wellenlänge, ist die Verursacherin einer Phasendifferenz der überlagerten Wellen.

Kapitel 4

Beugung

4.1 Der Einfluss von Hindernissen im Lichtweg

Der Begriff der Interferenz umfasst die Überlagerung einer endlichen Zahl von Teilfeldern, von denen jedes eine eigene Amplitude und Phase haben kann. Im vorigen Kapitel wurden diese Kenngrößen mit den verschiedenen optischen Wegen verknüpft, welche die den Teilfeldern zugeordneten Wellen nehmen. Bei der **Beugung verallgemeinern wir dasselbe Phänomen, um die Überlagerung infinitesimaler Beiträge zu beschreiben**. Jeder Beitrag hat dabei seine eigene Amplitude und Phase. Überlagert man diese infinitesimalen Komponenten, ergeben sie die Wirkung einer stetigen Variation des Lichtweges, wie sie für Licht aus einem ausgedehnten Raumgebiet auftritt.

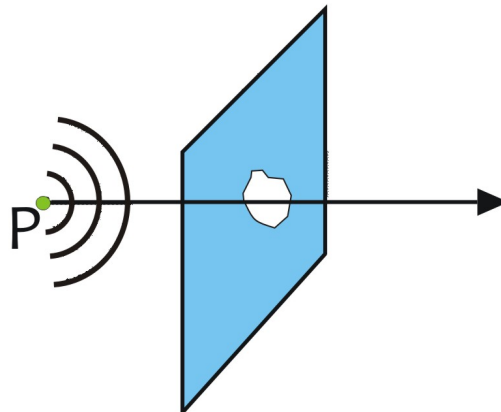


Abbildung 4.1: Zum Prinzip der Beugung

Im klassischen Beispiel für Beugung beleuchtet eine Punktlichtquelle einen Schirm mit einer Öffnung (Abbildung 4.1), **wobei die Lösung dieses Problems in der Beschreibung des optischen**

Feldes jenseits des Schirms besteht. Dieses Ergebnis erlaubt, die räumliche Verteilung der über die Zeit gemittelten Flussdichte zu bestimmen. Beugung beeinflusst die Leistungsfähigkeit von Linsen und optischen Systemen. Bei der Beschreibung der Optik von Laserstrahlen ist sie von grundlegender Bedeutung. Wir benutzen sie beim Entwurf von Interferenzgittern (was zum gebräuchlicheren Begriff des "Beugungsgitters" geführt hat), und um dreidimensionale Bilder mittels Holographie zu erzeugen. Die Rolle der Beugung bei der Bildentstehung kann zur Steigerung der Wiedergabequalität ausgenutzt werden. Auch kann sie in Analoggeräten zur Mustererkennung verwandt werden.

Obwohl eine strenge Lösung der Wellengleichung für jede Situation wünschenswert wäre, können viele Beugungsprobleme quantitativ durch eine mathematische Formulierung des Huygens'schen Prinzips gelöst werden. Es lässt sich zeigen, dass das Huygens'sche Prinzip eine ausgezeichnete Näherung für das Verhalten der Lösungen der elektromagnetischen Wellengleichung darstellt. In diesem Kapitel entwickeln wir die Theorie und wenden sie dann zuerst auf den Fall an, dass Quelle und Beobachtungsort weit vom Schirm entfernt sind. Die Nahbeobachtung wird dann im Folgenden behandelt. Dieses Vorgehen wird durch eine strenge Herleitung des Formalismus' von Fresnel und Kirchhoff gerechtfertigt.

Das **Huygens'sche Prinzip besagt**, dass jeder Teil einer optischen Wellenfläche im Raum als Quelle einer sphärischen Teilwelle wirkt. Alle Teilwellen überlagern sich an einem entfernten Punkt zu einer neuen Wellenfläche. In der geometrischen Optik kümmern wir uns nur um die Einhüllende der Sekundärwellen. Hier behandeln wir Sekundärwellen explizit, indem wir ihre jeweiligen Phasen und Amplituden am Beobachtungsort verfolgen.

Fassen wir noch einmal zusammen: In seiner einfachsten Behandlung beschreibt die Beugung eine Abweichung von der geometrischen Optik, hervorgerufen durch Objekte innerhalb der Ausbreitung der Wellenfront. Diese können sowohl Blenden als auch Hindernisse sein, die lokale Änderungen der Amplitude oder Phase der Wellenfront bedingen.

4.2 Das Beugungsintegral

Die bisher untersuchten Interferenzeffekte beruhten auf der Überlagerung einer endlichen Zahl von Strahlen. Damit Interferenz auftrat, mussten diese dieselbe Frequenz und Polarisation haben. Auch mussten die Quellen der Strahlen kohärent sein. In allen Fällen wurden zwei oder mehrere individuelle, zumindest teilweise kohärente Lichtstrahlen, die von einer Lichtquelle ihren Ursprung nahmen und entweder mittels einer Amplituden- oder Wellenfrontaufteilung separiert wurden, wieder zusammengebracht, wobei sie dann interferierten. Bei der Beugung von Licht haben wir es prinzipiell mit demselben physikalischen Vorgang zu tun. Dazu wird die Quelle für die interferierenden Teilwellen eine monochromatische Primärwellenfront von der ursprünglichen Punktlichtquelle sein, was sicherstellt,

dass alle Sekundärwellen monochromatisch und kohärent sind. Wir verallgemeinern jedoch insoweit, als wir dabei die Überlagerung vieler infinitesimal unterschiedlicher Beiträge mit charakteristischer Phase und Amplitude zulassen.

4.2.1 Physik des Beugungsintegrals

Beginnen wir mit (siehe Abbildung 4.1) einer sphärischen Welle, die von einem Punkt P ausgeht und in der $\tilde{x}\tilde{y}$ -Ebene einem Hindernis ausgesetzt ist. Unser Ziel wird es sein, die Feld- und Intensitätsverteilung in einer $x'y'$ -Ebene zu bestimmen. Im ersten Schritt unserer Überlegungen sei das Hindernis von der Art, dass praktisch nur eine Huygens'sche Elementarwelle durch sie hindurchtreten kann, wie in Abbildung 4.2. Dann betrachten wir in Abbildung 4.3 zwei solcher Elementarwellen (\tilde{P}_1, \tilde{P}_2) (zwei kleine Löcher im Hindernis).

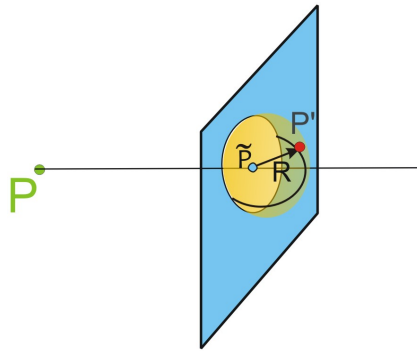


Abbildung 4.2: Beugung einer einzigen Elementarwelle

Schließlich erhöhen wir die Dichte der "Löcher" soweit, dass wir praktisch eine Öffnung der Fläche $\tilde{\sigma}_0$ erhalten, die eine Reihe von Elementarwellen beisteuert, deren Gesamtbeitrag zur Feldstärke wir in der Beobachtungsebene ($x'y'$ -Ebene) durch Integration über die Fläche $\tilde{\sigma}_0$ in der $\tilde{x}\tilde{y}$ -Ebene erhalten. Das Konzept der Beugung ist damit "physikalisch" gelöst. Es bleibt eigentlich nur mehr, dieses Konzept mathematisch quantitativ zu erfassen und zu lösen. Dies kann jedoch äußerst kompliziert werden und man muss sich daher meist auf Näherungen in der Lösung beschränken.

Beginnen wir im Punkt P , von dem wir annehmen, dass dort eine **Kugelwelle ausgeht**. Damit kennen wir natürlich das \vec{E} -Feld bis zum Hindernis und auch direkt am Hindernis (\vec{E}). Im Folgenden lassen wir den Vektorpfeil einfachheitshalber weg, was auch dadurch gerechtfertigt ist, da wir uns auf die R -Abhängigkeit beschränken. Für das Feld \vec{E} erhalten wir dann

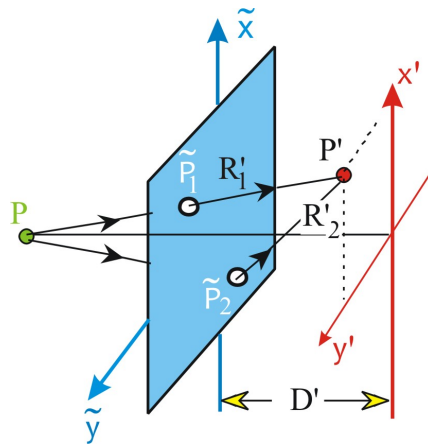


Abbildung 4.3: Erhöhung der Elementarwellen auf zwei für die Berechnung der Beugung

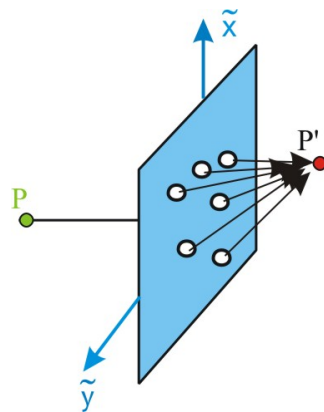


Abbildung 4.4: Wir erhöhen die Elementarwellen.

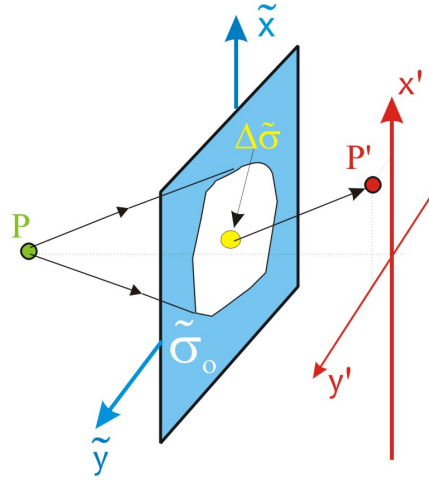


Abbildung 4.5: Ein größeres Hindernis $\tilde{\sigma}_0$ trägt mit einer Anzahl von Elementarwellen $\Delta\tilde{\sigma}$ zum Feld in P' bei.

$$\tilde{E} = \frac{A}{R} e^{i(\omega t - kR)} = \frac{A}{R} e^{i\varphi}$$

Das von einem Punkt im Hindernis $\tilde{\sigma}_0$ ausgehende **Feld einer Huygens'schen Elementarwelle**, die in P' ankommt (Abbildung 4.5), ist dann von der Form

$$E' \propto \frac{e^{i\varphi'}}{R'}$$

anzusetzen, wobei $\varphi' = \omega t - kR'$ ist. Dieses Feld in P' muss natürlich proportional der einfallenden Welle unmittelbar vor dem Hindernis und auch proportional der Fläche $\Delta\tilde{\sigma}$ der kleinen Öffnung sein. Das Feld in P' können wir daher allgemein in folgender Form anschreiben (*wobei zu berücksichtigen ist, dass der Zeitfaktor $e^{i\omega t}$ nur einmal auftreten darf*). Wir müssen also bei unserer Annahme der Proportionalität der gebeugten Welle zur einfallenden Welle, \tilde{E} mit $e^{-i\omega t}$ multiplizieren.

$$\begin{aligned} E' &= C \left(\tilde{E} e^{-i\omega t} \right) \Delta\tilde{\sigma} \frac{e^{i\varphi'}}{R'} \\ E' &= C \left(\frac{A}{R} e^{i(\omega t - kR)} e^{-i\omega t} \right) \Delta\tilde{\sigma} \frac{e^{i\varphi'}}{R'} = C A e^{i\omega t} \frac{e^{ik(R+R')}}{RR'} \Delta\tilde{\sigma} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Wir müssen jedoch verlangen, dass das Loch $\Delta\tilde{\sigma}$ klein genug bleibt, um sich wie eine Punktquelle zu verhalten. Der Faktor C in (4.1) hat die Dimension einer inversen Länge und wird sich als komplexe Zahl erweisen. Wir werden C später bestimmen. Es soll jedoch bereits hier darauf hingewiesen werden, dass der komplexe Wert von C die Tatsache widerspiegelt, **dass die Huygens'schen**

Sekundärwellen am Schirm nicht die gleiche Phase haben dürfen wie die einlaufende Wellenfront, wenn eine ungestörte Welle reproduziert werden soll. Es wird sich zeigen, dass der Faktor C eine langsam variierende Funktion des Winkels ist, welcher die Ausbreitungsrichtung der einlaufenden Welle und der Sekundärwellen an der Lochblende beschreibt. In den meisten Fällen ist dieser Winkel so klein, dass wir diese Abhängigkeit vernachlässigen und C als von der Anordnung unabhängig behandeln können. Für die Fernfeldnäherung der Beugung ist dies sicherlich richtig.

Da das Hindernis (hier einfach eine Öffnung) aus vielen Flächen $\Delta\tilde{\sigma}$ besteht, wird das Feld E' in P' die Überlagerung vieler Elementarwellen sein. Wenn nun die Löcher eng benachbart sind und zu einer kontinuierlichen Öffnung werden, können wir die Überlagerung (Summe) leicht verallgemeinern und erhalten dann folgenden Ausdruck für das gebeugte Feld in der $x'y'$ -Ebene:

$$E' = C \iint_{\tilde{\sigma}_0} \tilde{E} \frac{e^{-ikR'}}{R'} d\tilde{\sigma} \quad (4.2)$$

Man bezeichnet die rechte Seite der Gleichung 4.2 als **Beugungsintegral**.

Wir erhalten damit endlich die gewünschte Größe in einer sehr universellen und leicht interpretierbaren Form. Das optische Feld am Beobachtungsort P' , das vom Quellpunkt P ausgeht und von der Blende mit der Transmissionsfunktion $\tilde{\tau}(\tilde{x}, \tilde{y})$ bestimmt wird, ist dann:

$$E'(u, v) = \frac{CAe^{i\varphi_0}}{R_0R'_0} \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\tau}(\tilde{x}, \tilde{y}) e^{-i2\pi(u\tilde{x}+v\tilde{y})} d\tilde{x}d\tilde{y} \equiv \frac{CAe^{i\varphi_0}}{R_0R'_0} T(u, v) \quad (4.3)$$

Das Resultat in Gleichung 4.3, das den Zusammenhang eines räumlichen Hindernisses im Strahlengang und der Feldverteilung in einem Punkt hinter dem Hindernis beschreibt, stellt nichts anderes dar, als die **Fouriertransformation der räumlichen Transmissionsfunktion** (*mathematische Beschreibung des Hindernisses im Ortsraum*). Wie wir schon früher besprochen haben, ist die andere Größe des entsprechenden Fourierpaars der Impuls. Wir können daher $E'(u, v)$ in 4.3 als eine Funktion des Impulses, oder anders ausgedrückt, des Vektors \vec{k} interpretieren. Die große Bedeutung von 4.3 liegt darin, dass wir ein beliebiges Hindernis, ob es nun eine einfache Lochblende, eine Linse oder ein kompliziertes Hologramm ist, nach ein und demselben Konzept behandeln können, um das Beugungsfeld zu erhalten. Dazu muss zuerst das Hindernis mathematisch beschrieben werden, oder anders ausgedrückt, die Transmissionsfunktion $\tilde{\tau}(\tilde{x}, \tilde{y})$ ermittelt werden. Als zweiter Schritt muss man diese Funktion fouriertransformieren, wofür ein breites Spektrum an mathematischen, sowohl analytischen als auch numerischen Verfahren zur Verfügung steht. Man sollte aber nicht vergessen, dass die Gültigkeit von 4.3 auf das Fernfeld und die in der Herleitung gemachten Näherungen, insbesondere $|\tilde{x}| \ll \sqrt{R_0\lambda}$, beschränkt ist.

Wie oben gesagt, ist es sinnvoll, die gebeugte Intensität auf die des ungebeugten Strahles zu normieren, der in Abbildung ?? gezeigt ist. Durch die Koordinatentransformation ?? entspricht dieser Strahl genau $(u, v) = (0, 0)$.

$$\begin{aligned}
 E'(0, 0) &= \frac{CAe^{i\varphi_{00}+\infty}}{R_{00}R'_{00-\infty}} \iint \tilde{\tau}(\tilde{x}, \tilde{y}) e^0 d\tilde{x} d\tilde{y} = \frac{CAe^{i\varphi_{00}+\infty}}{R_{00}R'_{00-\infty}} \iint \tilde{\tau}(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y} \equiv \frac{CAe^{i\varphi_{00}}}{R_{00}R'_{00}} T(0, 0) \\
 E'(u, v) &= E'(0, 0) \frac{R_{00}R'_{00}}{R_0R'_0} \frac{T(u, v)}{T(0, 0)} e^{i(\varphi_0 - \varphi_{00})} \\
 S'(u, v) &= S'(0, 0) \left[\frac{R_{00}R'_{00}}{R_0R'_0} \right]^2 \frac{|T(u, v)|^2}{|T(0, 0)|^2}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

4.2.2 Beispiele zur Fraunhofer-Beugung

Rechteckige Apertur

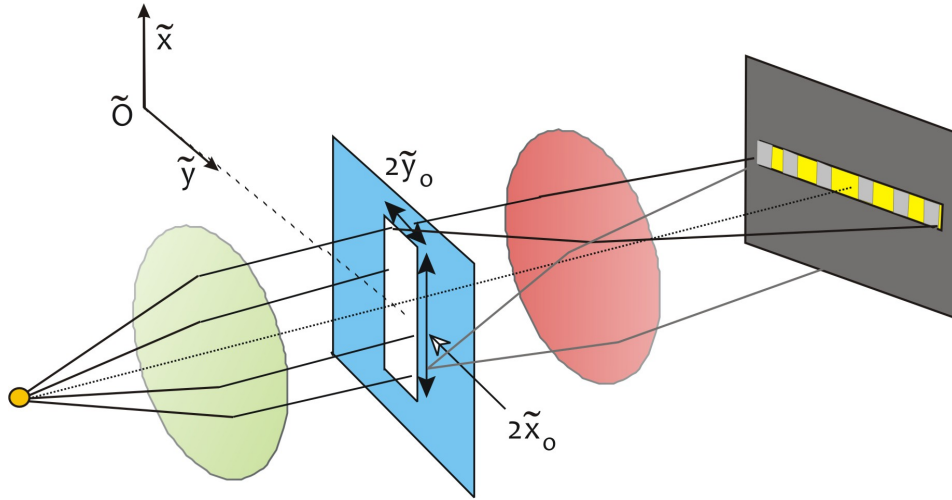


Abbildung 4.6: Beugung am Spalt: Die Transmissionsfunktion ist durch eine zweidimensionale Rechteckfunktion gegeben.

Die Transmissionsfunktion für diesen Fall ist besonders einfach (siehe Abbildung 4.6):

$$\tilde{\tau}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } |\tilde{x}| \leq \tilde{x}_0, \quad |\tilde{y}| \leq \tilde{y}_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

In diesem Fall kann das zweidimensionale Fourierintegral in 4.4 separiert werden:

$$\begin{aligned}
T(u, v) &= \int_{-\tilde{x}_0}^{\tilde{x}_0} \int_{-\tilde{y}_0}^{\tilde{y}_0} e^{-i2\pi(u\tilde{x}+v\tilde{y})} d\tilde{x}d\tilde{y} = T(u)T(v) = \\
&= \int_{-\tilde{x}_0}^{\tilde{x}_0} e^{-i2\pi u\tilde{x}} d\tilde{x} \int_{-\tilde{y}_0}^{\tilde{y}_0} e^{-i2\pi v\tilde{y}} d\tilde{y}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Diese Funktion ist praktisch identisch mit der Fouriertransformation in Gleichung ??, wodurch wir als gebeugte Feldstärke erhalten:

$$\begin{aligned}
E'(u, v) &= E'(0, 0) \frac{R_{00}R'_{00}}{R_0R'_0} \frac{e^{i(\varphi_0 - \varphi_{00})}}{T(0, 0)} T(u, v) = \\
&= \text{const} \cdot 2\tilde{x}_0 \frac{\sin(2\pi u\tilde{x}_0)}{2\pi u\tilde{x}_0} \cdot 2\tilde{y}_0 \frac{\sin(2\pi v\tilde{y}_0)}{2\pi v\tilde{y}_0} \equiv \\
&\equiv \text{const} \cdot 2\tilde{x}_0 \text{sinc}(2\pi u\tilde{x}_0) \cdot 2\tilde{y}_0 \text{sinc}(2\pi v\tilde{y}_0)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

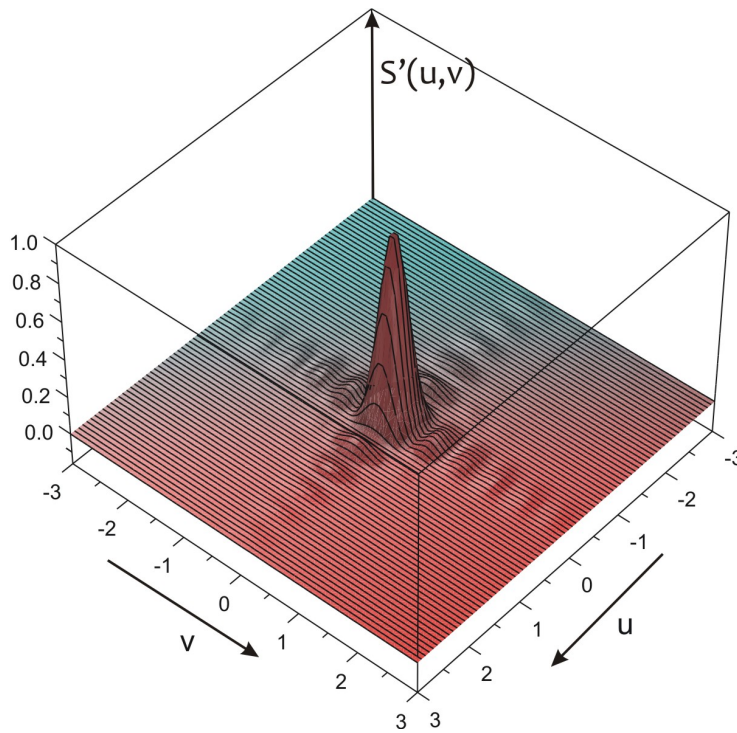


Abbildung 4.7: Beugungsmuster eines Spaltes

Es ist eine gute Übungsaufgabe, die Maxima und Minima der Funktionen in 4.4 (mit der Beugungsfunktion 4.6) zu ermitteln (Siehe Abbildung 4.7), z.B. ergibt sich dann das erste Minimum bei

$w = 2\pi u \tilde{x}_0 = \pm\pi$. Befindet sich die Quelle auf der z -Achse, so dass $\alpha = \beta = 0$ und $x = y = 0$ wird, dann ist der Zusammenhang zwischen den Koordinaten x' , y' mit u und v sehr einfach:

$$\begin{aligned}x' &= -R'_0 \lambda u \\y' &= -R'_0 \lambda v\end{aligned}$$

Die Breite des zentralen Beugungsmaximums ist dann $|\Delta x'| = R'_0 \lambda \Delta u$. Andererseits folgt aus $2\pi u \tilde{x}_0 = \pm\pi \rightarrow \Delta u = 1/\tilde{x}_0$ und somit

$$|\Delta x'| = R'_0 \frac{\lambda}{\tilde{x}_0} \quad (4.7)$$

Dabei ist in 4.7 die reziproke Abhängigkeit der Breite des zentralen Beugungsmaximum von der Spaltbreite wichtig, oder eigentlich, vom Verhältnis der Wellenlänge zur Spaltbreite.

Kreisrunde Apertur

Im für die Praxis häufigsten Fall einer kreisförmigen Apertur ergibt sich die Transmissionsfunktion zu

$$\tilde{\tau}(\tilde{r}, \tilde{\varphi}) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } |\tilde{r}| \leq \tilde{r}_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \tilde{r} \cos \tilde{\varphi} \\ \tilde{y} &= \tilde{r} \sin \tilde{\varphi}\end{aligned}$$

ist. Für die Integration der Fourierintegrale in 4.4 verwendet man am sinnvollsten Polarkoordinaten, die mit u und v über

$$\begin{aligned}u &= \rho \cos \varphi' \\ v &= \rho \sin \varphi'\end{aligned}$$

zusammenhängen. Das Fourierintegral ergibt sich dann zu ($d\tilde{\sigma} = \tilde{r} d\tilde{\varphi} d\tilde{r}$):

$$T(\rho, \varphi') = \int_0^{\tilde{r}_0} \tilde{r} \int_0^{2\pi} e^{-i2\pi \rho \tilde{r} \cos(\tilde{\varphi} - \varphi')} d\tilde{\varphi} d\tilde{r} \quad (4.8)$$

Die Lösung dieses Integrals ist nicht trivial und führt auf **Besselfunktionen**, wie wir sie oft bei Differentialgleichungen der Physik mit rotationssymmetrischen Randbedingungen antreffen. Qualitativ schaut das Beugungsmuster (kreisförmiges Hauptmaximum wird als **Airy-Scheibchen bezeichnet**)

ähnlich wie im Fall der rechteckigen Blende aus. Mit analogen Überlegungen wie bei der Herleitung von 4.7 erhält man für die Breite des Airyscheibchens:

$$r'_{Airy} = \frac{0.61\lambda R'_0}{\tilde{r}_0} \quad (4.9)$$

Vergleichen wir die Breites des Beugungsbildes eines Spaltes $|\Delta x'| = R'_0 \frac{\lambda}{\tilde{x}_0}$ mit dem der kreisrunden Blende von $d'_{Airy} = \frac{2 \cdot 0.61\lambda R'_0}{\tilde{r}_0}$ sehen wir, dass die runde Blende ein etwas breiteres Maximum liefert.

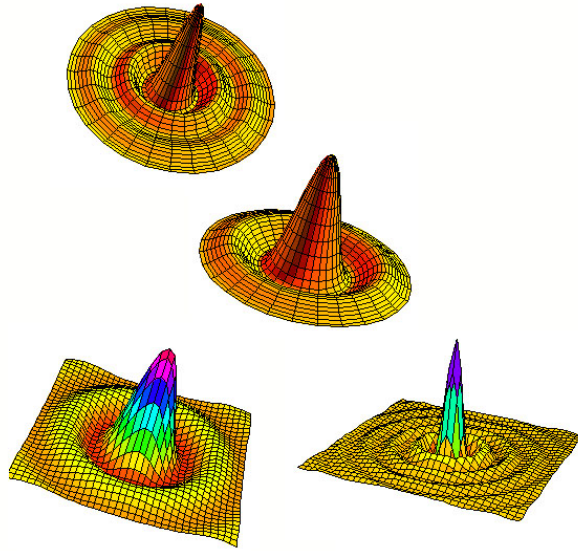


Abbildung 4.8: Airy-Scheibchen

4.3 Fourieroptik

Die Voraussetzungen für Fernfeld-Beugung ohne die Hilfe von Linsen sind streng, da wir fordern, dass R_0 und R'_0 sehr viel größer als \tilde{x}/λ und \tilde{y}/λ sein sollen. Bei der Behandlung der Beugungsbegrenzung haben wir uns überlegt, dass dieser Formalismus anwendbar wird, wenn wir Linsen benutzen, um die Ebenen von Lichtquelle und Beobachtung unter Einhaltung der Fernfeld-Bedingung näher an die beugende Öffnung zu bringen (Abbildung ??). In den folgenden Überlegungen wollen wir diese Idee rechtfertigen, indem wir die Linse explizit in den Beugungsprozess einschließen. Dadurch erhält man die Möglichkeit, eine deutlich umfassendere Vielfalt von Beugungsanwendungen zu behandeln.

4.3.1 Bildentstehung

Nachdem wir eben die Grundlagen für die **Theorie der Bildentstehung** in Form der Analyse der Beugung an einer Linse geschaffen haben, können wir uns dem Studium dieser Phänomene für eine allgemeine Objektfunktion zuwenden. Zur Vereinfachung beschränken wir uns auf **unendlich ausgedehnte Linsen**, was keine ernsthafte Einschränkung darstellt, da wir den Effekt einer endlichen Linsenöffnung bereits kennen. Statt der Punkt-für-Punkt-Abbildung zwischen Objekt- und Bildebene verleiht die endliche Linse dem Bildpunkt eine fundamentale Unschärfe, wie sie in der Faltung von ?? zum Ausdruck kommt.

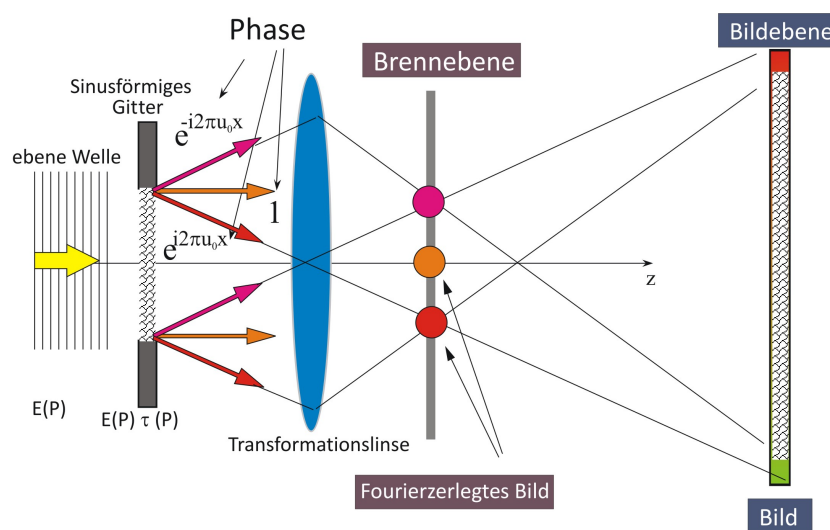


Abbildung 4.9: Bildentstehung und Fourierzerlegung eines Objektes.

Wir wollen nun das Objekt, das wir abbilden wollen, durch seine Transmissionsfunktion darstellen (Abbildung 4.9). Die Beugung bedingt dabei interessante Effekte, die in der Praxis, wie wir zeigen werden, nutzbringend angewendet werden können. Die Anordnung in 4.9 ermöglicht es, die Ergebnisse von der Fraunhoferbeugung zu verwenden, wobei die Linse (**Transformationslinse**) in ihrer **Brennebene** das entsprechende **Fraunhofer-Beugungsbild** erzeugt. In der **Bildebene** entsteht dann das **tatsächliche Bild**. (Hinweis: Um Verwechslungen vorzubeugen und zu betonen, worum es hier geht, sei nochmals darauf hingewiesen, dass wir hier eine unendlich ausgedehnte Linse verwenden. Die vorhergehenden Überlegungen die Linse und ihre Beugungseffekte betreffend, spielen also hier keine Rolle).

Die wesentliche Konsequenz der Beugung (*am Objekt!*) ist es, dass das **in der Brennebene der Linse erzeugte Beugungsmuster eine Fourierzerlegung des Objektes ist**. Darunter verstehen

wir, dass die **Raumfrequenzen** (siehe Anhang ?? für eine zusätzliche Erklärung) des Bildes (= *des Hindernisses*) in verschiedene **Impuls- (=Richtungs-) Komponenten des Lichtes** aufgespalten werden. Diese äußern sich dann durch eine **räumliche Intensitätsverteilung am Schirm** (*hier in der Brennebene der Linse*). Als Folge können dann die einzelnen Fourierkomponenten selektiv im Impulsraum der Welle (*bzw. in der Praxis im Ortsraum der Brennebene*) modifiziert werden.

Betrachten wir dazu ein Objekt, dessen Transmissionsfunktion eine unendliche, periodische Cosinus-Charakteristik (räumliche Periode a , $\rightarrow u_0 = \frac{1}{a}$) hat. An diesem einfachen Objekt können wir alle wesentlichen Konsequenzen, die sich beugungsbedingt ergeben, demonstrieren.

$$\begin{aligned}\tau(x, y) &= \tau_0 + \tau_1 \cos(2\pi u_0 x) \rightarrow \\ &\rightarrow T(u, v) = \tau_0 + \frac{\tau_1}{2} [\delta(u - u_0) + \delta(u + u_0)] \delta(v)\end{aligned}$$

Die Interpretation dieses Ergebnisses ist einfach und das Ergebnis selbst natürlich nicht unerwartet: (*Erinnern wir uns, dass die "Koordinaten" u, v nichts anderes als die Ablenkung zwischen einfallendem und gebeugtem Strahl sind*). Für ein Hindernis mit Cosinus-förmiger Transmissionsfunktion erhalten wir drei diskrete Impulsrichtungen für die gebeugten Strahlen:

- einen gerade durchgehenden Strahl mit der Amplitude τ_0
- einen um $\alpha = \lambda u_0 = \frac{\lambda}{a}$ abgelenkten Strahl mit der Amplitude $\frac{\tau_1}{2}$
- einen um $\alpha = -\lambda u_0 = -\frac{\lambda}{a}$ abgelenkten Strahl mit der Amplitude $\frac{\tau_1}{2}$

Daraus ergibt sich, dass wir drei diskrete Intensitätsmaxima in der Brennebene der Transformationslinse erhalten, die den drei Fourierkomponenten des Objektes entsprechen. Mit zunehmender Frequenz sind die den Komponenten entsprechenden Intensitätsmaxima weiter von der zentralen Achse entfernt. In der Bildebene werden dann wieder alle Strahlen ausgehend von einem Punkt des Bildes vereint. Es ist dazu aber notwendig, dass alle Fourierkomponenten erfasst und nicht irgendwo abgeschnitten werden, wie es z.B. durch die endliche Ausdehnung der Linse geschieht.

Es ist einzusehen, dass dieses Ergebnis leicht verallgemeinert werden kann und auch für beliebige Objekte gültig ist. Ein periodisches Rechteckgitter z.B. wird die bekannten Fourierkomponenten einer Rechteckfunktion aufweisen. In der Brennebene werden diese mit zunehmender Frequenz weiter außen liegen. Werden z.B. die höheren Fourieranteile durch eine Komponente des optischen Systems nicht mehr erfasst, resultiert daraus ein Fehler bei der Bildentstehung, also z.B. eine Abrundung der Ecken im Bild des Rechtecks.

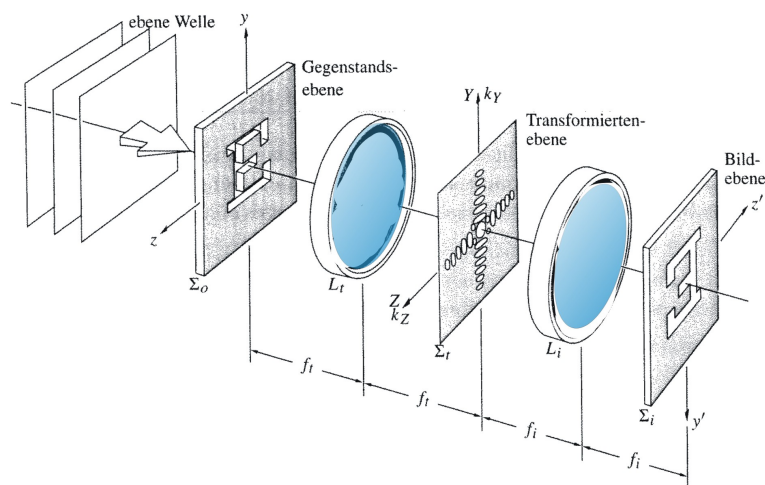


Abbildung 4.10: Anordnung für optische Filterung in Brennebene.

Aus diesen allgemeinen Überlegungen ergeben sich also zusammengefasst zwei wichtige Konsequenzen:

→ Da in einem optischen System immer räumlich begrenzende Elemente auftreten (in der Praxis werden immer die höheren Fourierkomponenten zu einem gewissen Grad abgeschnitten), wird immer ein gewisser Informationsverlust eintreten, da für eine vollständige Bildentstehung die Transformation aller Fourierkomponenten in die Bildebene benötigt würden.

→ Eine **gezielte Elimination von Fourierkomponenten** in der Brennebene der Transformationslinse ermöglicht es unter Umständen, "Bildstörungen" mit bekannter Frequenz zu reduzieren. Man nennt diesen Vorgang **räumliches Filtern (Spatial-Filtering)**. Eine entsprechende Anordnung bezeichnet man als **optisches Filter**.

Optisches Fourierfilter

Eine Anwendung für gezielte Elimination von Fourierkomponenten in der Brennebene einer Linse ist an Hand von Abbildung 4.10 (prinzipielle Anordnung) und Abbildung 4.11, welche eine Photographie der Mondoberfläche zeigt, die aus einzelnen Filmstreifen zusammengesetzt wurde. Die Videodaten wurden von der Sonde Lunar Orbiter I zu Erde gefunkt. Die regelmäßigen Linien, die durch das Zusammenstoßen je zweier Streifen entstehen, bilden eine Art Gitter, das sich in einer Verteilung vertikaler Frequenzen mit großer Bandbreite äußert, wie man sie in der Abbildung erkennen kann. Blendet man diese Frequenzkomponenten aus (Abbildung 4.12), so sieht man dem Bild nicht mehr

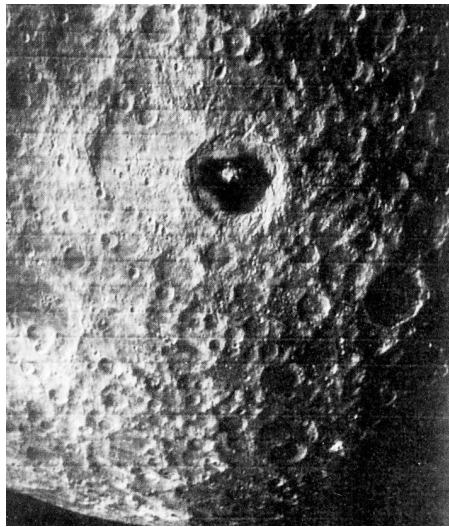


Abbildung 4.11: Zusammengesetzte Aufnahme der Mondoberfläche.

an, dass es aus vielen kleinen Teilen zusammengesetzt ist (Abbildung 4.13).

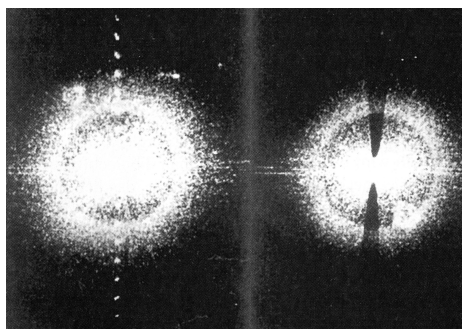


Abbildung 4.12: Fouriertransformation vom Bild in Abbildung 4.11 (links) und Ausblenden der Frequenzen, die den Linien durch die Bildzusammensetzung entsprechen (rechts).



Abbildung 4.13: Gefiltertes Bild aus 4.11.