Teil II

Schwingungen und Wellen

8 Harmonische Bewegungen

In der Physik führen verschiedenste grundlegende Gesetze (Gravitationsgesetz, Coulombgesetz etc.) unter gewissen Bedingungen auf eine Differentialgleichung, die erstaunlicherweise für verschiedene physikalische Phänomene, so unterschiedlich sie sein mögen, dieselbe Form aufweist und als Charakteristikum als Lösung ein periodisches Verhalten der verschiedenen physikalischen Größen aufweist. Zu bemerken ist, dass dies für lineare Differentialgleichungen gilt und die oft korrektere nichtlineare Gleichungen zu durchaus bemerkenswerten, nicht-harmonischen Lösungen führen können (chaotische Lösungen).

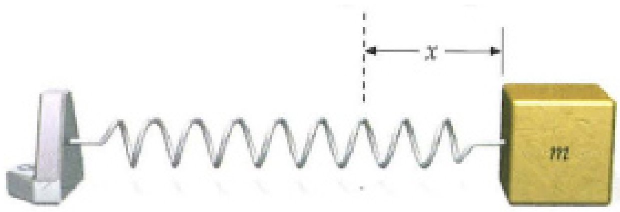

Abbildung 22: Schwingende, ungedämpfte Feder

Ein besonders einfacher und leicht verständlicher Fall für eine solche Schwingungen stellt die Bewegungsgleichung 5 in der Mechanik dar, und zwar für den Fall, dass die Kraft $F(t)$ eine sogenannte rücktreibende **Kraft** (*z.B. ist das der Fall, wenn die stabile Gleichgewichtslage eines Systems leicht gestört wird. Es gibt viele bekannte Beispiele: Boote bewegen sich auf und nieder, die Pendel von Uhren gehen hin und her, und die Saiten und Zungen der Musikinstrumente schwingen*) ist. Andere weniger bekannte Beispiele aus anderen Gebieten der Physik sind die Schwingungen von Luftmolekülen in einer Schallwelle und die Schwingungen des elektrischen Stroms in Radios und Fernsehgeräten, oder aber auch die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Elektronen in Atomen.

Starten wir also mit der Bewegungsgleichung und einem einfachen Beispiel einer rücktreibenden Kraft (*z.B. eine Federkraft, proportional zur Auslenkung x. Diese häufig auftretende, sehr wichtige und sehr grundlegende Art einer Schwingungs bewegung ist die harmonische Schwingung. Sie ist die Bewegung eines Gegenstands, der an einer Feder befestigt ist und reibungsfrei auf einer Unterlage schwingt . Im Gleichgewicht übt die Feder keine Kraft auf den Gegenstand aus. Wenn der Gegenstand um die Größe x aus seiner Gleichgewichtslage verschoben wird, übt die Feder eine Kraft $-kx$ auf ihn aus, die durch das Hooke'sche Gesetz gegeben ist*)

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = F(t) \Longrightarrow \tag{52}$$
$$\rightarrow m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot x$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Diese Gleichung ist unter dem Namen **Schwingungsgleichung** bekannt. Genauer gesagt: dies ist die Schwingungsgleichung im ungedämpften Fall.

Die Lösung dieser Gleichung ist im folgenden skizziert und beruht auf der Annahme, dass die Lösung periodisch ist und zwar der Form:

$$x(t) = A \sin \omega\, t + B \cos \omega\, t \equiv C \sin(\omega t + \phi) \tag{53}$$

A,B und C bezeichnet man als Amplitude, ϕ als Phasenkonstante oder einfach Phase.

Einsetzten von 53 in 52 führt die Differentialgleichung in eine gewöhnliche Gleichung über, die die Eigenfrequenz ω ergibt:

$$\text{mit } x'(t) = -A\omega \sin \omega\, t + B\omega \cos \omega\, t$$
$$\text{und } x''(t) = -A\omega^2 \cos \omega\, t - B\omega^2 \sin \omega\, t$$
$$-(A\omega^2 \cos \omega\, t + B\omega^2 \sin \omega\, t) + \frac{k}{m}\,(A \cos \omega\, t + B \sin \omega\, t) = 0$$
$$\omega^2(A \cos \omega\, t + B \sin \omega\, t) = \frac{k}{m}\,(A \cos \omega\, t + B \sin \omega\, t)$$
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ganz allgemein gilt, dass die Eigenfrequenz der Wurzel des Vorfaktor der gesuchten Funktion entspricht, falls die entsprechende Gleichung für einen beliebigen SSchwingungsfallïn die Form der Gleichung 52 gebracht wird. (Beispiel weiter unten).

Die Zeit, die der Gegenstand benötigt, um eine vollständige Schwingung (von einer extremen Auslenkung aus der Ruhelage zu der anderen und wieder zurück) auszuführen, wird als Schwingungsdauer T oder Schwingungsperiode bezeichnet. Der Kehrwert der Schwingungsdauer heißt Frequenz ν, sie gibt die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde an: $\nu = \frac{1}{T}$' Die Einheit der Frequenz ist Hertz (Hz). Die oben erhaltene Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$.

Die Koeffizienten A und B bzw. C und ϕ bestimmt man aus den Angangsbedingungen aus denen das System startet. Z.B.:

$$
\begin{aligned}
x(0) &= A + 0 \rightarrow \\
&A = x(0)\ x'(t)|_{t\rightarrow 0} = -A\omega \underbrace{\sin\omega\, t}_{t\rightarrow 0} + B\omega \underbrace{\cos\omega\, t}_{t\rightarrow 0} \rightarrow \\
x'(0) &= -0 + \omega B \rightarrow \\
&B = \frac{x'(0)}{\omega}
\end{aligned}
$$

Somit ist die gesuchte Lösungsfunktion (allgemein) :

$$
x(t) = A \cos\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + B \sin\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t \tag{54}
$$

oder oft in der folgenden Form gebräuchlich:

$$
x(t) = A\cos\omega t = A \cdot \left(\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}\right)
$$

9 Energie des harmonischen Oszillators

Wenn ein Gegenstand an einer Feder eine harmonische Bewegung ausführt (Abbildung 22), dann sind die kinetische und potenzielle Energie des Systems zeitabhängig. Ihre Summe, die mechanische Gesamtenergie, $E_{\text{mech}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$, ist konstant.

Wir betrachten die Bewegung eines schwingenden Körpers mit der Masse m, der sich im Abstand x vom Gleichgewicht befindet und auf den eine rücktreibende Kraft $-kx$ wirkt. Die potenzielle Energie des Systems ist dann

$$
E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\left(C\sin(\omega t + \phi)\right)^2
$$

Die kinetische Energie des Systems ist

$$
E_{\text{kin}} = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{d(C\sin(\omega t + \phi))}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}C^2 m\omega^2\cos^2(\phi + t\omega)
$$

wo m die Masse und v, die Geschwindigkeit des schwingenden Teilchens ist.

Mit der bekannten Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ergibt dies

$$
E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}C^2 m\omega^2\cos^2(\phi + t\omega)\Big|_{\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{1}{2}C^2 k\cos^2(\phi + \omega t)
$$

Die mechanische Gesamtenergie ist die Summe aus der potenziellen und kinetischen Energie (unabhängig von der Zeit!):

$$
E_{\text{mech}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}C^2 k\cos^2(\phi + \omega t) + \frac{1}{2}k\left(C\sin(\omega t + \phi)\right)^2 = \frac{1}{2}kC^2
$$

Beispiel 25 *Schwingung eines Stabes*

Ein Stab (Abbildung 23) sei um die Achse durch P drehbar aufgehängt. Wird er aus der Ruhelage ausgelenkt, wird er schwingen. Mit welcher Frequenz)

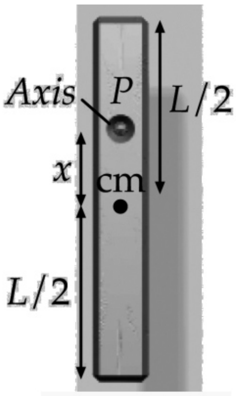

Abbildung 23: Schwingender Stab (physikalisches Pendel)

1. Aufstellen der Bewegungsgleichung (Mit $M_{ext} = \sum M_{\mathrm{ext},i} = I\alpha$ Gleichung 51)

$$\vec{M} = I\alpha = I\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$
$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -m \cdot g \cdot x \cdot \sin\phi$$

2. Auf Form der Schwingungsgleichung bringen und ω berechnen

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + -\frac{m \cdot g \cdot x}{I} \cdot \sin\phi = 0$$
$$\approx \frac{d^2\varphi}{dt^2} + -\frac{m \cdot g \cdot x}{I}\phi = 0 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{mgx}{I}}$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgx}}$$

Trägheitsmoment einsetzten

$$I = I_S + m \cdot x^2 = \frac{1}{12} m \cdot L^2 + m \cdot x^2$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgx}} = 2\pi \sqrt{\frac{(L^2 + 12x^2)}{12 \cdot g \cdot x}}$$

10 Gedämfte Schwingung

Überlässt man ein Schwingungssystem, einen Federschwinger, ein Pendel oder einen anderen beliebigen Schwinger, sich selbst, dann kommt es nach einiger Zeit zur Ruhe. Dem schwingenden System wird durch Reibungskräfte"(mechanische) Energie entzogen und in andere (z.B. Wärme-) energie umgewandelt. Periodische Bewegungen, bei denen die (mechanische) Energie nicht erhalten bleibt, sondern abnimmt, nennt man gedämpfte Schwingungen. Wenn die Dämpfung der Bewegung groß genug ist, wie z. B. bei einem Pendel, das in Sirup eingetaucht ist, kann der Oszillator keine volle Schwingungsperiode durchführen. Stattdessen bewegt er sich nach der Auslenkung mit einer Geschwindigkeit zur Gleichgewichtslage hin, die gegen null geht. Diese Art der Bewegung nennt man stark gedämpft (überdämpft). Wenn die Dämpfung klein ist, so dass das System mit einer Amplitude schwingt, die allmählich mit der Zeit abnimmt - wie ein Kind auf einer Spielplatzschaukel, wenn die Mutter nicht mehr der Schaukel bei jeder Schwingung einen Schubs versetzt - , nennt man diese Bewegung **schwach gedämpft (unterdämpft)**. Die Bewegung mit einer Dämpfung, bei der gerade noch eine Schwingung erfolgt und dann abgeklungen ist, nennt man den **aperiodischen Grenzfall** (kritisch gedämpft). (Die Bewegung mit einer geringeren Dämpfung als der kritischen wäre dann unterdämpft.)

10.1 Schwach gedämpfter Oszillator (unterdämpfte Bewegung)

Ein häufiger Fall ist der, wo die Reibungskraft $\vec{F}_R$ linear von der Geschwindigkeit des gedämpften Körpers abhängt: $\vec{F}_R = -b \cdot \upsilon$. Darin ist b eine Konstante. Sie hängt für laminare Bewegungen linear von der Zähigkeit der Flüssigkeit und von der Geometrie des Kolbens ab. Für die nachfolgenden Überlegungen betrachten wir sie als eine empirische Konstante. Ein Schwingungssystem mit dieser geschwindigkeitsproportionalen Reibungskraft heißt linear gedämpft. Da die Reibungskraft der Bewegungsrichtung entgegengesetzt gerichtet ist, wird die von ihr verrichtete Arbeit negativ, und die mechanische Energie des Systems verringert sich mit der Zeit. Für eine schwache Dämpfung nehmen die Amplituden der Schwingung ab. Es liegt eine gedämpfte Schwingung vor, und das System heißt gedämpfter Oszillator.

Die schwingungsgleichung hat jetzt die Form:

$$m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2} + b \cdot x'(t) + k \cdot x(t) = 0 \tag{55}$$

Zur Lösung macht man den Ansatz:

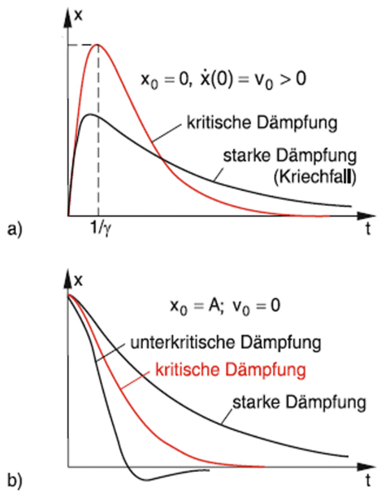

Abbildung 24: Beispiele für eine stark gedämpfte Bewegung (überdämpft) und den aperiodischen Grenzfall (kritische Dämpfung).

$$x(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot \underbrace{\xi(t)}_{A\cos\omega t + B\sin\omega t} \tag{56}$$

Durch Einsetzten erhält man eine Bestimmungsgleichung für die Konstanten δ und ω.

Bei schwacher Dämpfung ergibt sich z.B

$$\delta = \frac{b}{2m} \text{ sowie } \omega = \sqrt{\underbrace{\left(\frac{k}{m}\right)^2}_{\omega_0^2} - \delta^2}$$

welche dann in die Lösung 56 einzusetzen sind. Weiters können die Amplituden über die Anfangsbedingungen ermittelt werden.

11 Erzwungene Schwingungen

Damit ein gedämpftes System in Bewegung bleibt, muss ihm mechanische Energie zugeführt werden. Wenn einer gedämpften Schwingung mechanische Energie wieder zugeführt wird, so dass die Schwingung erhalten bleibt, spricht man von einer angetriebenen oder erzwungenen Schwingung. Ein bekanntes Beispiel ist eine Schaukel, die man durch Pumpenßum Schwingen bringt. Das bedeutet, dass man durch periodisches Bewegen des Oberkörpers und der Beine einen Oszillator antreibt. Wird mehr (mechanische) Energie dem System zugeführt als durch umgewandelte Wärmeenergie wieder abgegeben, dann nimmt die (mechanische) Energie mit der Zeit zu und ebenso die Amplitude der Schwingung. Wenn die zugeführte (mechanische) Energie gleich der durch einen dissipativen Prozess abgeführten Energie entspricht, dann bleibt die Amplitude zeitlich konstant. Man sagt, der Oszillator befindet sich in einem stationären Zustand.

Ein Federschwinger, schwinge z.B- vertikal. Durch eine periodische Auf- und Abwärtsbewegung des Aufhängepunkts der Feder mit einer Schwingungsfrequenz ω wird der Federschwinger angetrieben. Zuerst ist die Bewegung kompliziert, aber schließlich wird die stationäre Bewegung erreicht, in der das System mit derselben Frequenz wie der Treiber schwingt und die Amplitude und damit auch die Energie konstant bleibt. In dem stationären Zustand ist die Energie, die durch die treibende Kraft in das System pro Schwingung hineingepumpt wird, gleich der dissipativen Energie pro Schwingung, die durch Reibung verloren geht. In einem stationären Zustand hängt die Amplitude und damit die Energie des Schwingungssystems nicht nur von der Amplitude der treibenden Kraft ab, sondern auch von seiner Frequenz. Es gibt also Frequenzbereiche der treibenden Kraft, die das Schwingungssystem kaum anregen, und andere Frequenzen ω der treibenden Kraft, bei denen eine hohe Übertragungsrate der vom Federschwinger aufgenommenen Energie vorhanden ist. Diesen Bereich starker Anregung des Schwingers durch die treibende Kraft, der als **Resonanzbereich** bezeichnet wird, wollen wir näher behandeln. Die Eigenfrequenz ω_0 eines Oszillators ist die Frequenz, wenn keine treibenden Kräfte oder Reibungskräfte wirken. (Im Fall eines Federschwingers ist $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.) Ist die Frequenz ω der treibenden Kraft näherungsweise gleich der Eigenfrequenz des Systems, $\omega \approx \omega_0$, wird das angetriebene System mit einer relativ großen Amplitude schwingen. Wenn z. B. die Halterung mit einer Frequenz ganz in der Nähe der Eigenfrequenz des Masse-Feder-Systems schwingt, wird die Masse mit einer viel größeren Amplitude schwingen als in den Fällen, wo sich der Haltepunkt in höheren oder niedrigeren Frequenzen in Bezug auf ω_0 bewegt. Man sagt, das treibende System und das angetriebene System sind in der Nähe der Eigenfrequenz ω_0 in Resonanz. Resonanzerscheinungen können bei allen gekoppelten Schwingungssystemen auftreten und haben ein breites Anwendungsfeld bei mechanischen Schwingungen in Gasen, Flüssigkeiten und Festkörpern, in der Akustik (Musikinstrumente), bei elektromagnetischen und optischen Schwingungs- und Wellenerscheinungen. Wenn die treibende Frequenz ω gleich der Eigenfrequenz ω_0 des Oszillators ist, besitzt die Energie pro Schwingung, die auf den Oszillator übertragen wird, ein Maximum. Die Eigenfrequenz des Systems wird daher als **Resonanzfrequenz** bezeichnet.

11.1 Resonanz

Man kann einen erzwungenen Oszillator mathematisch behandeln, indem man annimmt, dass zusätzlich zur rücktreibenden Kraft und einer Reibungskraft noch eine äußere treibende Kraft auf den Oszillator einwirkt, die harmonisch mit der Zeit variiert. Die Schwingungsgleichung nimmt dann die folgende Form an (inhomogene Gleichung):

$$m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \gamma \cdot \frac{dx(t)}{dt} + k \cdot x(t) = F(t) = F_0 \cos(\omega \cdot t) \tag{57}$$

Die Annahme $F(t) = F_0 \cos(\omega \cdot t)$ ist nicht zwingend, aber der gebräuchlichste Fall.

Das ist eine inhomogene lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten für die Schwingungsbewegung $x(t)$ des erzwungenen Oszillators. Wir wollen die allgemeine Lösung von Gleichung 57 zuerst qualitativ diskutieren. Sie besteht aus zwei Teilen, nämlich der Lösung der homogenen Differenzialgleichung und einer partikulären Lösung. Die Lösung der homogenen Differenzialgleichung ist mit der eines gedämpften Oszillators (Gleichung 55) identisch. Die Konstanten in diesem Teil der Lösung hängen von den Anfangsbedingungen ab. Nach entsprechend langer Zeit kann dieser Teil der Lösung wegen der exponentiellen Abnahme der Amplitude für starke und schwache Dämpfung vernachlässigt werden. Er wird deshalb als Einschwingvorgang des erzwungenen Oszillators bezeichnet. Der zweite Lösungsanteil von Gleichung 57, die partikuläre Lösung, ist der für den erzwungenen Oszillator interessante Schwingungsanteil, nämlich die stationäre Lösung. Sie kann als

$$x(t) = A(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi) \tag{58}$$

geschrieben werden. Darin ist ω die Kreisfrequenz der treibenden Kraft (!!). Die Amplitude $A(\omega)$ ist durch

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\gamma\omega}{m}\right)^2}} \tag{59}$$

gegeben und die Phasenkonstante ϕ durch

$$\tan\phi = \frac{\gamma\omega}{m\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)} \tag{60}$$

Beziehung 59 und 60 erhält man wieder durch Einsetzen des Ansatzes 58 in die Differentialgleichung. Die Berechnung ist jedoch etwas komplizierter als bei der freien Schwingung. Eine oft verwendeter Trick ist, dass man an Stelle von 58 die Funktion komplex ansetzt und dann die sogennnte elastische (Faktor vor Realteil) bzw. inelastische Amplitude (Faktor des Imaginärteiles, beschreibt Energieübertrag) berechnet. Das erleichert die Rechnung. Man nutzt bei dieser Vorgehensweise aus, dass bei linearen Gleichungen komplexer Größen sowohl Real- als auch Imaginärteil der komplexen Lösung beide für sich auch Lösungen der Gleichung sind. Man kann zeigen, dass nur der Imaginärteil dauernd Energie verbraucht, die von der treibenden Kraft geliefert wird. Der Realteil führt zu einer periodischen Energieaufnahme und Abgabe.

Betrachtet man die Gleichungen 59 und 60 zusammen mit $F(t) = F_0 \cos(\omega \cdot t)$, so kann man sehen, dass die Auslenkung des Oszillators und die treibende Kraft mit derselben Frequenz oszillieren, aber sich in der Phase durch ϕ unterscheiden. Wenn die treibende Frequenz ω viel kleiner als die Eigenfrequenz ω_0 ist, wird $\phi \approx 0$, wie man aus Gleichung 60 sieht. Im Resonanzfall ist $\omega = \omega_0$, und es wird $\phi = -\pi/2$, treibende Kraft und Oszillator sind um -90^0 phasenverschoben. Wird schließlich ω viel größer als ω_0, dann ist $\phi \approx -\pi$, die treibende Kraft eilt der Oszillatorschwingung um 180^o voraus. Zu Beginn dieses Kapitels wurde die Auslenkung eines Teilchens, das eine harmonische Schwingung ausführt, in der Form $x(t) = A(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$ angegeben. Vergleicht man dies mit der Lösung der harmonischen Schwingung, so erkennt man, dass beide Lösungen bis auf das Vorzeichen der Phasenkonstanten übereinstimmen. Die

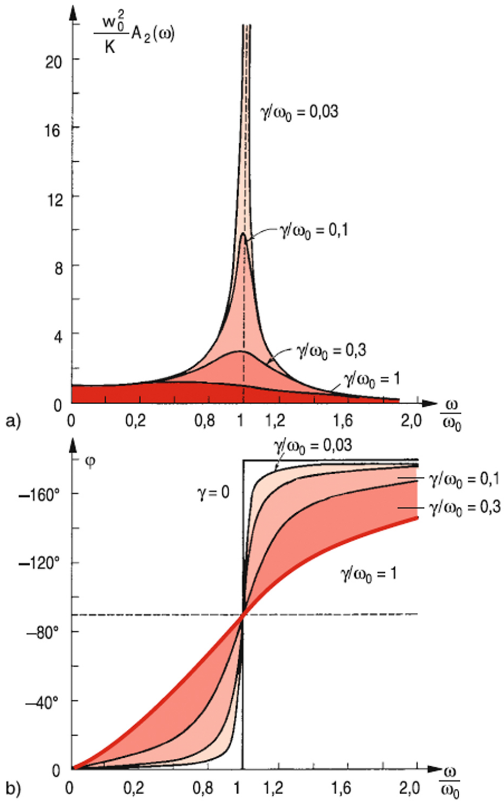

Abbildung 25: (a) Resonanzkurve der erzwungenen Schwingung für verschiedene Dämpfungen. Man beachte die Verschiebung des Maximums mit zunehmender Dämpfung. (b) Quantitativer Verlauf der Phasenverschiebung

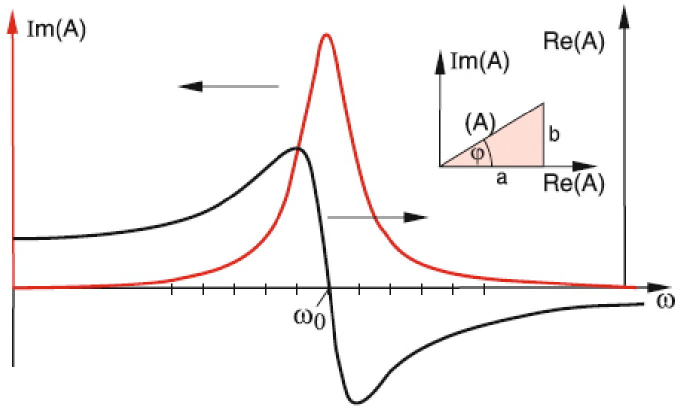

Abbildung 26: Elastische und Inelastische Amplitude.

Phasenkonstante ϕ der erzwungenen Schwingung liegt zwischen 0 und $-\pi$, wie wir eben gesehen haben. Somit bleibt die Phase des angetriebenen Oszillators immer hinter der Phase der treibenden Kraft zurück. Die Phasenkonstante wird bei dem gewählten Ansatz negativ.

Die bei der Resonanz aufgenommen Leistung ergibt sich zu (wobei $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\gamma\omega}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\right)$ zu verwenden ist

$$\begin{aligned} P &= \frac{dW}{dt} = F(t)\cdot\dot{x}(t) \\ &= F_0\cos(\omega\cdot t)\cdot(-1)\cdot A(\omega)\cdot\omega\cdot\sin(\omega t-\phi) = \\ &= -\frac{F_0^2\omega\cos(\omega t)\sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{\gamma\omega}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\right)+\omega t\right)}{\sqrt{m^2\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\gamma^2\omega^2}} \end{aligned}$$

Die über eine Periode gemittelte Leistung (ins System übertragene Energie) ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} P\,dt = \\ &= \frac{\omega}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\omega}\left(-\frac{F_0^2\omega\cos(\omega t)\sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{\gamma\omega}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\right)+\omega t\right)}{\sqrt{m^2\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\gamma^2\omega^2}}\right)dt && (61) \\ &= \frac{F_o^2\gamma\omega^2}{2\left(m^2\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\gamma^2\omega^2\right)} && (62) \end{aligned}$$

$$\bar{P} = \frac{F_o^2\gamma\omega^2}{2\left(m^2\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\gamma^2\omega^2\right)} \tag{63}$$

und die maximal übertragene Energie in der Resonanz ergibt sich zu:

$$\frac{1}{2}\frac{F_o^2}{\gamma}$$

Der durch 63 beschriebene Energieübertrag als Funktion der Frequenz ist die bekannte Lorentz-Resonanzkurve.

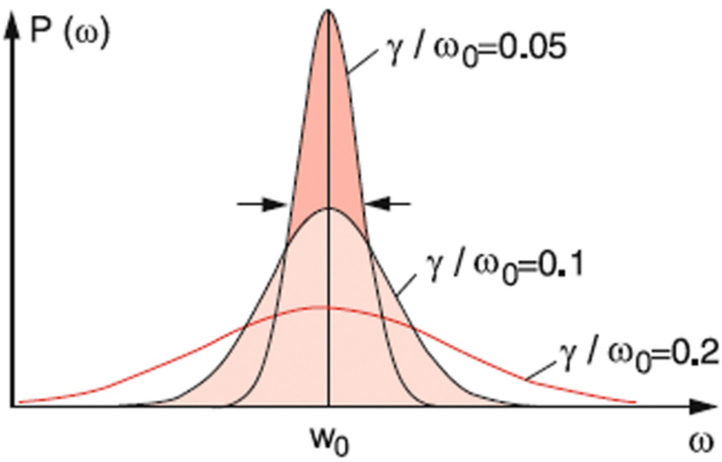

Abbildung 27: Leistungsaufnahme bei erzwungener Schwingung (Lorentzkurve).