

Das Magnetfeld

26



Nordlichter entstehen, wenn der „Sonnenwind“ – ein Strom geladener Teilchen, die bei Kernfusionsreaktionen in der Sonne gebildet werden – in den Einfluss des Erdmagnetfelds gerät.

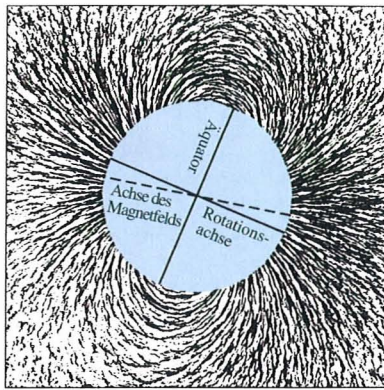


Wie wirkt das Erdmagnetfeld auf Teilchen subatomarer Dimension? Näheres erfahren Sie in Beispiel 26.1.

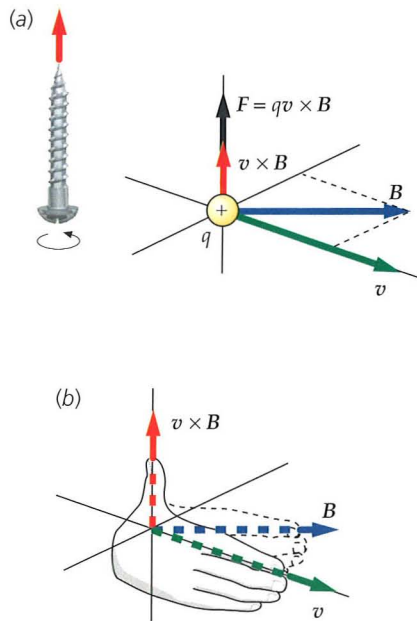
- 26.1 Die magnetische Kraft
- 26.2 Die Bewegung einer Punktladung in einem Magnetfeld
- 26.3 Das auf Leiterschleifen und Magnete ausgeübte Drehmoment
- 26.4 Der Hall-Effekt

Schon vor 2000 Jahren war im antiken Griechenland bekannt, dass bestimmte Steine (heute Magnetit genannt) Eisenstückchen anziehen. Schriftliche Überlieferungen belegen die Verwendung von Magneten zur Navigation bereits im 12. Jahrhundert.

1269 beobachtete Pierre de Maricourt, dass sich eine Nadel, die er auf einen kugelförmigen natürlichen Magneten gelegt hatte, entlang von Linien ausrichtete, die an gegenüberliegenden Enden der Kugel durch gemeinsame Punkte verliefen. Diese Punkte nannte er Pole. In der Folgezeit stellten viele Experimentatoren fest, dass jeder Magnet, unabhängig von seiner Form, zwei solche Pole besitzt – einen Nord- und einen Südpol –, in denen die vom Magneten ausgeübte Kraft stärker ist als in allen anderen



26.1 Magnetfeldlinien der Erde, sichtbar gemacht durch Eisenfeilspäne in der Umgebung einer homogen magnetischen Kugel. Die Feldlinien gehen vom magnetischen Nordpol aus, der sich in der Nähe des geografischen Südpols befindet, und laufen im magnetischen Südpol (nahe dem geografischen Nordpol) wieder zusammen.



26.2 Anwendung der Rechten-Hand-Regel zur Bestimmung der Richtung der Kraft, die auf eine Ladung wirkt, die in einem Magnetfeld bewegt wird. Ist q positiv, so zeigt \mathbf{F} in die gleiche Richtung wie $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. a) Das Kreuzprodukt $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ steht senkrecht sowohl auf \mathbf{v} als auch auf \mathbf{B} . Es zeigt in die Richtung, in die sich eine Rechtsschraube bewegt, wenn man sie in die Richtung dreht, in der \mathbf{v} (mit dem kleinstmöglichen Drehwinkel) in \mathbf{B} überführt wird. b) Wenn die Finger der rechten Hand so in Richtung von \mathbf{v} zeigen, dass sie auf \mathbf{B} zu gekrümmt werden können, so weist der Daumen in Richtung von $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

Punkten der Umgebung. Man beobachtete auch, dass gleichnamige Pole zweier Magneten einander abstoßen, während ungleichnamige Pole einander anziehen.

1600 entdeckte William Gilbert, dass die Erde selbst ein natürlicher Magnet ist, dessen Pole in der Nähe der geografischen Pole liegen. Da der Nordpol einer Kompassnadel in Richtung des Südpols eines anderen Magneten zeigt, liegt der magnetische Nordpol der Erde in der Nähe ihres geografischen Südpols, wie Sie in Abbildung 26.1 erkennen.

Elektrische Ladungen und magnetische Pole ähneln einander in vielerlei Hinsicht, aber zwischen ihnen besteht ein wesentlicher Unterschied: Magnetische Pole treten niemals isoliert, sondern stets paarweise auf. Wenn ein Stabmagnet in zwei Hälften geteilt wird, erscheinen an der Bruchstelle neue Pole – das bedeutet, es entstehen zwei Magnete mit jeweils einem Nord- und Südpol. Über die Existenz magnetischer Monopole wurde vielfach spekuliert. Viele Forscher haben in den zurückliegenden Jahren erfolglos versucht, ein solches Phänomen nachzuweisen. Es wurde aber auch noch nicht endgültig bewiesen, dass es magnetische Monopole nicht geben kann.

➤ In diesem Kapitel wollen wir untersuchen, wie ein gegebenes Magnetfeld auf bewegte Punktladungen und auf stromdurchflossene Leiter wirkt. Die Quellen des Magnetfelds werden in Kapitel 27 besprochen.

26.1 Die magnetische Kraft

Die Existenz eines Magnetfelds \mathbf{B} in einem bestimmten Punkt des Raums kann man mit Hilfe einer Kompassnadel nachweisen: Ist ein Magnetfeld vorhanden, so richtet sich die Nadel entlang der magnetischen Feldlinien aus.

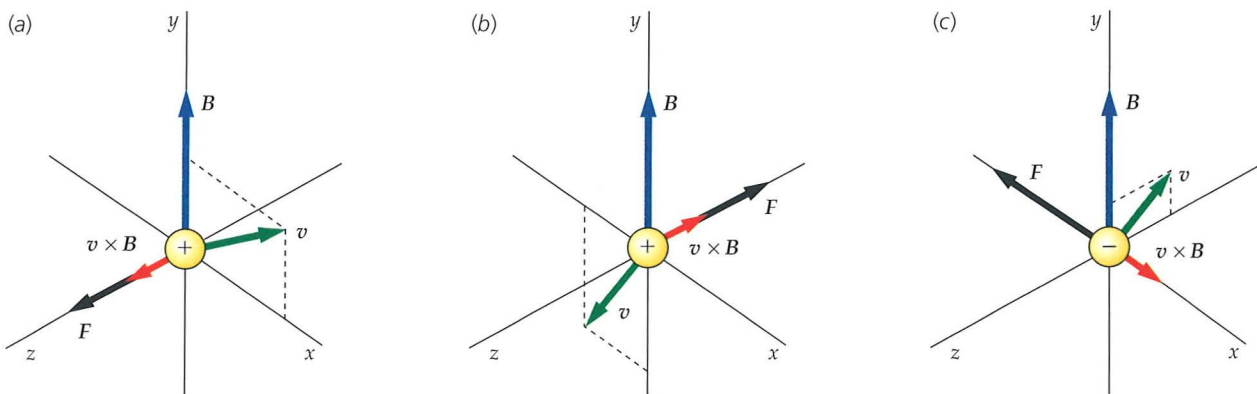
Experimentell beobachtet man, dass auf eine elektrische Ladung q , die sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} in einem Magnetfeld bewegt, eine Kraft wirkt; diese Kraft ist proportional zu q , v , B und dem Sinus des Winkels, den die Richtungen von \mathbf{v} und \mathbf{B} einschließen. Überraschenderweise ist die Kraft senkrecht sowohl zum Geschwindigkeitsvektor als auch zum Feldvektor gerichtet. Diese Ergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen: Auf eine Ladung q , die sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} in einem Magnetfeld \mathbf{B} bewegt, wirkt die (magnetische) Kraft \mathbf{F} mit

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (26.1)$$

MAGNETISCHE KRAFT AUF EINE BEWEGTE LADUNG

\mathbf{F} steht senkrecht sowohl auf \mathbf{v} als auch auf \mathbf{B} und folglich auch auf der Ebene, die \mathbf{v} und \mathbf{B} aufspannen. Die Richtung von $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ergibt sich aus der Rechten-Hand-Regel, indem die rechte Handfläche in Richtung von \mathbf{v} zeigt und dann in die Richtung von \mathbf{B} gedreht wird (Abbildung 26.2). Ist q positiv, so zeigt $\mathbf{F} \propto \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ in die Richtung des Daumens.

In Abbildung 26.3 sehen Sie verschiedene Beispiele für die Richtung der Kraft, die auf eine bewegte Ladung wirkt, wobei der Magnetfeldvektor \mathbf{B} jeweils senkrecht nach oben zeigt. Machen Sie sich bewusst, dass man die Richtung eines Magnetfelds \mathbf{B} bestimmen kann, indem man \mathbf{F} für mehrere Geschwindigkeiten \mathbf{v} in verschiedenen Richtungen misst und anschlie-



26.3 Richtung der Kraft, die im Magnetfeld \mathbf{B} auf eine mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegte Ladung q wirkt.

Wenn Gleichung 26.1 anwendet. Beispiel 26.1 illustriert die Kraft, die das Erdmagnetfeld auf ein Proton ausübt.

Gleichung 26.1 definiert das **Magnetfeld** \mathbf{B} anhand der auf eine bewegte Ladung ausgeübten Kraft. Die SI-Einheit der Stärke des Magnetfelds ist das **Tesla** (T). Auf eine Ladung von 1 C, die sich mit einer Geschwindigkeit von 1 m/s senkrecht zu einem Magnetfeld von 1 T bewegt, wirkt eine Kraft von 1 N:

$$1 \text{ T} = 1 \frac{\text{N}}{\text{C} \cdot \text{m/s}} = 1 \text{ N}/(\text{A} \cdot \text{m}). \quad (26.2)$$

Das Tesla ist eine relativ große Einheit. Die Stärke des Magnetfelds der Erde an deren Oberfläche beispielsweise ist etwas geringer als 10^{-4} T. In der Nähe starker Permanentmagneten herrschen Felder von ungefähr 0,1 T bis 0,5 T, und leistungsfähige Elektromagnete für Anwendungen in Labors und in der Industrie erzeugen Felder von 1–2 T. Feldstärken oberhalb von 10 T sind schwer aufrechtzuerhalten, weil die Magnete durch die gewaltigen Kräfte zerstört werden können. Eine weit verbreitete, aus dem CGS-System abgeleitete Einheit ist das **Gauß** (G) mit

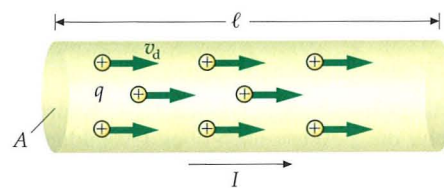
$$1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}. \quad (26.3)$$

DEFINITION DER EINHEIT GAUSS

In der Praxis werden Magnetfelder oft in der Einheit Gauß angegeben, obwohl dies keine SI-Einheit ist. Denken Sie deshalb daran, gegebenenfalls Gauß in Tesla umzurechnen.

Die auf einen stromdurchflossenen Leiter in einem Magnetfeld wirkende Kraft ist gleich der Summe der Kräfte auf alle geladenen Teilchen, deren Bewegung den Strom hervorruft. In Abbildung 26.6 sehen Sie einen kurzen Abschnitt eines Leiters mit der Querschnittsfläche A und der Länge ℓ , durch den ein Strom I fließt. Wird der Leiter in ein Magnetfeld gebracht, so wirkt auf jede Ladung die magnetische Kraft $q \mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$; \mathbf{v}_d ist die Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger und entspricht deren mittlerer Geschwindigkeit. Die Anzahl der Ladungsträger im Leiterabschnitt ist gleich der Anzahl pro Volumeneinheit (n/V), multipliziert mit dem Volumen $A \ell$. Insgesamt wirkt auf den Leiterabschnitt also die Kraft

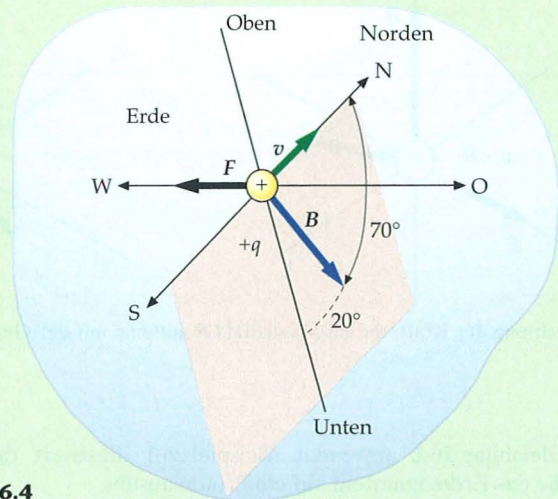
$$\mathbf{F} = (q \mathbf{v}_d \times \mathbf{B}) (n/V) A \ell.$$



26.6 Durch den Leiterabschnitt mit der Länge ℓ fließt ein Strom I . Ein äußeres Magnetfeld übt auf jeden einzelnen Ladungsträger im Leiter eine Kraft aus; diese Kräfte addieren sich zu einer Kraft auf den Leiter.

BEISPIEL 26.1: Die Kraft auf ein sich nordwärts bewegendes Proton

An einem bestimmten Ort auf der Erdoberfläche hat das Erdmagnetfeld eine Stärke von 0,6 G und ist nach unten sowie (da sich der Punkt auf der Nordhalbkugel befindet) nach Norden gerichtet, wobei es einen Winkel von etwa 70° mit der Horizontalen einschließt (Abbildung 26.4; diese Angaben treffen ungefähr auf Deutschland zu). Ein Proton ($q = +e$) bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $v = 10^7$ m/s horizontal nach Norden. Berechnen Sie die auf das Proton wirkende magnetische Kraft a) mit Hilfe der Beziehung $|\mathbf{F}| = q |\mathbf{v}| |\mathbf{B}| \sin \theta$ und b) vektoriell als $\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, indem Sie \mathbf{v} und \mathbf{B} in Komponentenschreibweise mit den Einheitsvektoren \hat{x} , \hat{y} und \hat{z} formulieren.



26.4

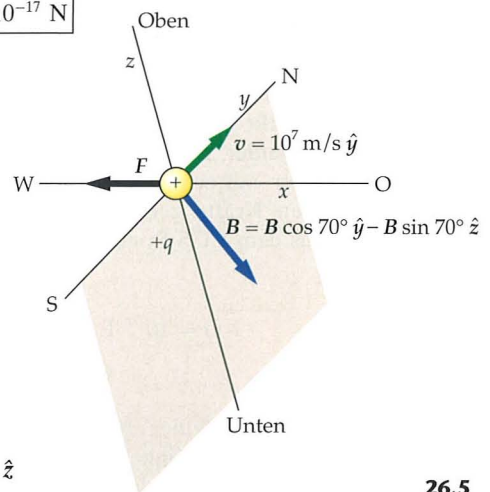
Problembeschreibung: Wir legen das Koordinatensystem so, dass die x -Achse nach Osten zeigt, die y -Achse nach Norden und die z -Achse nach oben (Abbildung 26.5). Der Vektor der Geschwindigkeit zeigt dann in y -Richtung.

Lösung:

Teilaufgabe a

Berechnen Sie $|\mathbf{F}| = q |\mathbf{v}| |\mathbf{B}| \sin \theta$ mit $\theta = 70^\circ$. Wie Sie Abbildung 26.4 entnehmen, zeigt die Kraft nach Westen:

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}| &= q |\mathbf{v}| |\mathbf{B}| \sin \theta \\ &= (1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}) \cdot (10^7 \text{ m/s}) \cdot (0,6 \cdot 10^{-4} \text{ T}) \cdot (0,94) \\ &= \boxed{9,02 \cdot 10^{-17} \text{ N}} \end{aligned}$$



26.5

Teilaufgabe b

1. Die magnetische Kraft ist gegeben als das Vektorprodukt von $q\mathbf{v}$ und \mathbf{B} :

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

2. Formulieren Sie \mathbf{v} und \mathbf{B} in Komponentenschreibweise:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_y \hat{y} \\ \mathbf{B} &= B_y \hat{y} + B_z \hat{z} \end{aligned}$$

3. Schreiben Sie die Beziehung $\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ für alle Komponenten auf:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} &= q(v_y \hat{y}) \times (B_y \hat{y} + B_z \hat{z}) \\ &= q v_y B_y (\hat{y} \times \hat{y}) + q v_y B_z (\hat{y} \times \hat{z}) \\ &= 0 + q v_y B_z \hat{x} \end{aligned}$$

4. Berechnen Sie nun \mathbf{F} :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q v \cdot (-\mathbf{B} \sin \theta) \cdot \hat{x} \\ &= -(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}) \cdot (10^7 \text{ m/s}) \cdot (0,6 \cdot 10^{-4} \text{ T}) \sin 70^\circ \hat{x} \\ &= \boxed{(-9,02 \cdot 10^{-17} \hat{x}) \text{ N}} \end{aligned}$$

Kommentar: Zu Beginn haben wir festgelegt, dass \hat{x} nach Osten zeigt; folglich zeigt die berechnete Kraft nach Westen, wie in Abbildung 26.5 eingezeichnet ist.

ÜBUNG: Welche Kraft wirkt auf ein Proton, das sich in einem Magnetfeld $\mathbf{B} = (2,0 \hat{z})$ T mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = (4 \cdot 10^6 \hat{x})$ m/s bewegt? (Lösung: $(-1,28 \cdot 10^{-12} \hat{y})$ N.)

Gleichung 25.3 gibt den Strom im Leiter an:

$$I = (n/V) q v_d A.$$

Für die Kraft können wir demnach schreiben:

$$\mathbf{F} = I \boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}. \quad (26.4)$$

MAGNETISCHE KRAFT AUF EINEN STROMDURCHFLOSSENEN LEITERABSCHNITT

Der Betrag des Vektors $\boldsymbol{\ell}$ ist die Länge des Leiters, seine Richtung ist parallel zum fließenden Strom. Fließt der Strom in positiver x -Richtung und liegt der Vektor des Magnetfelds in der Umgebung des Drahts in der x - y -Ebene, so zeigt die wirkende Kraft in z -Richtung (Abbildung 26.7). Beispiel 26.2 illustriert eine direkte Anwendung.

Bei der Herleitung von Gleichung 26.4 haben wir angenommen, dass der Leiterabschnitt geradlinig und das Magnetfeld über die gesamte Länge des Leiters konstant ist. Nun wollen wir die Beziehung für Leiter mit beliebiger Gestalt und beliebige Magnetfelder verallgemeinern. Wir wählen einen sehr kleinen Leiterabschnitt $d\boldsymbol{\ell}$; auf ihn wirke die Kraft $d\mathbf{F}$. Dann ist

$$d\mathbf{F} = I d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} \quad (26.5)$$

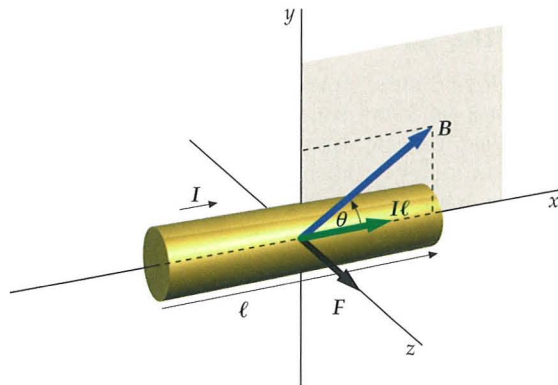
MAGNETISCHE KRAFT AUF EIN STROMELEMENT

mit \mathbf{B} als Vektor des Magnetfelds, in dem sich der Leiterabschnitt befindet. Die Größe $I d\boldsymbol{\ell}$ nennen wir **Stromelement**. Die insgesamt auf einen stromdurchflossenen Leiter wirkende Kraft erhalten wir durch Summation (Integration) der Kräfte, die auf alle Stromelemente des Leiters wirken. Gleichung 26.5 entspricht deshalb Gleichung 26.1, wobei das Stromelement $I d\boldsymbol{\ell}$ an die Stelle des Terms $q\mathbf{v}$ getreten ist. Eine Anwendung illustriert Beispiel 26.3.

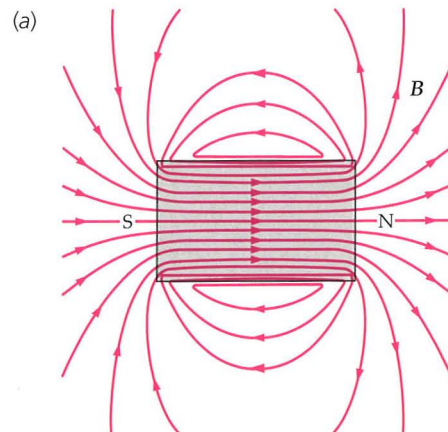
Ein elektrisches Feld \mathbf{E} kann durch Feldlinien dargestellt werden. Analog stellen wir ein Magnetfeld \mathbf{B} durch **Magnetfeldlinien** dar. In beiden Fällen gibt die Richtung der Linien die Richtung des Felds an, und die Dichte der Linien ist ein Maß für die Feldstärke. Abgesehen davon bestehen die folgenden wesentlichen Unterschiede zwischen elektrischen und magnetischen Feldlinien:

1. Elektrische Feldlinien zeigen in die Richtung der auf eine positive Ladung wirkenden elektrostatischen Kraft. Magnetfeldlinien stehen senkrecht zu der Kraft, die auf eine bewegte Ladung ausgeübt wird.
2. Elektrische Feldlinien gehen von positiven Ladungen aus und enden an negativen Ladungen. Magnetfeldlinien haben weder Anfang noch Ende, sie sind in sich geschlossen.

Abbildung 26.8 zeigt die Magnetfeldlinien innerhalb und außerhalb eines Stabmagneten.



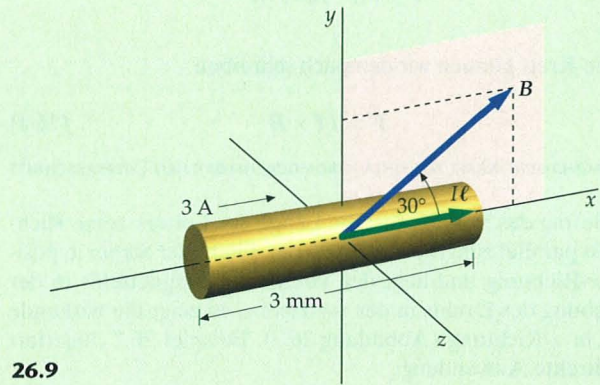
26.7 Magnetische Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiterabschnitt in einem Magnetfeld. Der Strom zeigt in x -Richtung, der Vektor des Magnetfelds liegt in der x - y -Ebene und schließt einen Winkel θ mit der positiven x -Richtung ein. Die Kraft \mathbf{F} zeigt in z -Richtung, senkrecht sowohl zu \mathbf{B} als auch zu $\boldsymbol{\ell}$. Ihr Betrag ist gleich $I |\boldsymbol{\ell}| |\mathbf{B}| \sin \theta$.



26.8 a) Magnetfeldlinien innerhalb und außerhalb eines Stabmagneten. Die Linien treten am Nordpol aus dem Magneten aus und am Südpol wieder ein. Sie haben aber weder Anfangs- noch Endpunkt, sondern bilden geschlossene Schleifen. b) Magnetfeldlinien in der Umgebung eines Stabmagneten, sichtbar gemacht mit Hilfe von Eisenfeilspänen.

BEISPIEL 26.2: Magnetische Kraft auf einen geraden Leiter

Durch einen 3 mm langen Drahtabschnitt fließt in positiver x -Richtung ein Strom von 3 A. Der Leiter ist von einem Magnetfeld mit einer Feldstärke von 0,02 T umgeben, dessen Vektor in der x - y -Ebene liegt und einen Winkel von 30° mit der x -Achse einschließt (Abbildung 26.9). Berechnen Sie die auf den Leiterabschnitt wirkende magnetische Kraft.



26.9

Problembeschreibung: Die magnetische Kraft zeigt in die Richtung von $\ell \times \mathbf{B}$. Wie Sie Abbildung 26.9 entnehmen, ist dies die positive z -Richtung.

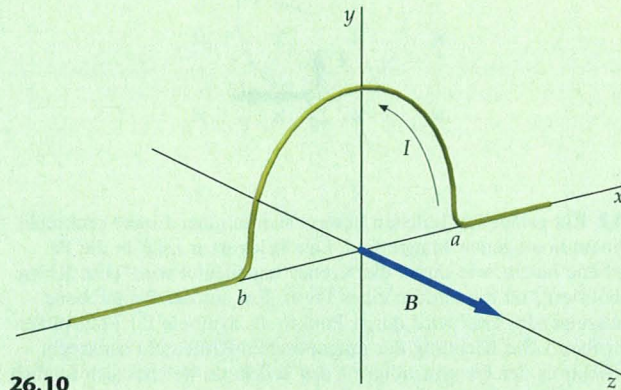
Lösung:

Die magnetische Kraft ist gegeben durch Gleichung 26.4:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= I \ell \times \mathbf{B} = I |\ell| |\mathbf{B}| \sin 30^\circ \hat{\mathbf{z}} \\
 &= (3 \text{ A}) \cdot (0,003 \text{ m}) \cdot (0,02 \text{ T}) \cdot (\sin 30^\circ) \cdot \hat{\mathbf{z}} \\
 &= \boxed{(9 \cdot 10^{-5} \hat{\mathbf{z}}) \text{ N}}
 \end{aligned}$$

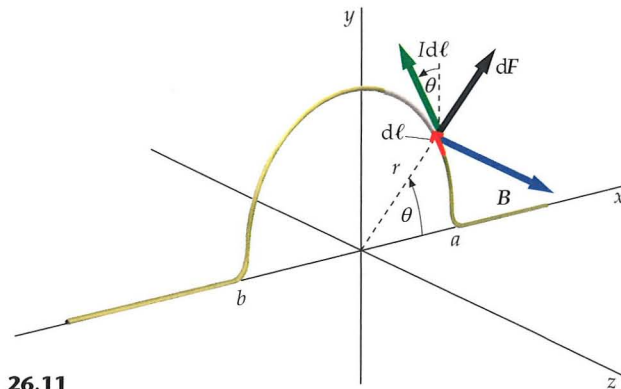
BEISPIEL 26.3: Magnetische Kraft auf einen gebogenen Leiter

Ein zu einem Halbkreis mit dem Radius r gebogener Leiter liegt in der x - y -Ebene. Zwischen den Punkten a und b fließt ein Strom I (Abbildung 26.10). Den Leiter umgibt ein senkrecht zur Ebene des Halbkreises gerichtetes Magnetfeld $\mathbf{B} = B \hat{\mathbf{z}}$. Welche Kraft wirkt auf den halbkreisförmigen Leiterabschnitt?



26.10

Problembeschreibung: Die auf einen Abschnitt des halbkreisförmigen Drahts wirkende Kraft liegt in der x - y -Ebene, wie Sie Abbildung 26.11 entnehmen. Die Gesamtkraft erhalten wir, indem wir \mathbf{F} mit Hilfe von θ komponentenweise aufschreiben und die Integration für die x - und die y -Komponente getrennt von $\theta=0$ bis π ausführen.



26.11

Lösung:

- Schreiben Sie die auf ein Stromelement $I d\ell$ wirkende Kraft $d\mathbf{F}$ auf:
- Zerlegen Sie $d\ell$ in Komponenten mit den Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{x}}$ und $\hat{\mathbf{y}}$:
- Berechnen Sie $I d\ell$ unter Verwendung von $d\ell = r d\theta$ und $\mathbf{B} = B \hat{\mathbf{z}}$:
- Integrieren Sie nun jede Komponente von $d\mathbf{F}$ von $\theta=0$ bis $\theta=\pi$:

$$d\mathbf{F} = I d\ell \times \mathbf{B}$$

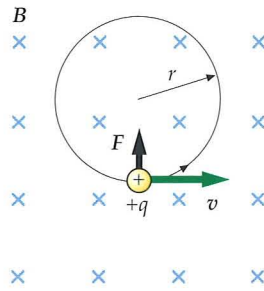
$$d\ell = -d\ell \sin \theta \hat{\mathbf{x}} + d\ell \cos \theta \hat{\mathbf{y}}$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= I d\ell \times \mathbf{B} \\ &= I (-r \sin \theta d\theta \hat{\mathbf{x}} + r \cos \theta d\theta \hat{\mathbf{y}}) \times B \hat{\mathbf{z}} \\ &= I r B \sin \theta d\theta \hat{\mathbf{y}} + I r B \cos \theta d\theta \hat{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int d\mathbf{F} = I r B \hat{\mathbf{x}} \int_0^\pi \cos \theta d\theta + I r B \hat{\mathbf{y}} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \\ &= I r B \hat{\mathbf{x}} \cdot (0) + I r B \hat{\mathbf{y}} \cdot (2) \\ &= \boxed{2 I r B \hat{\mathbf{y}}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Dass die x -Komponente von \mathbf{F} null sein muss, folgt aus der Symmetrie der Anordnung. Für den rechten Viertelkreis zeigt $d\mathbf{F}$ nach rechts, für den linken Viertelkreis nach links.

Kommentar: Diese resultierende Kraft ändert sich nicht, wenn der halbkreisförmige Drahtabschnitt durch einen geraden Leiter mit der Länge $2r$ ersetzt wird, der die Punkte a und b verbindet. Wie in Aufgabe 11 gezeigt wird, ist dieses Ergebnis allgemein gültig.



26.12 Ein geladenes Teilchen bewegt sich in einer Ebene senkrecht zu einem homogenen Magnetfeld. Der Feldvektor zeigt in die Papierebene hinein, wie durch die Kreuze angedeutet wird. (Ein Kreuz symbolisiert hier die Federn eines Pfeils. Ein aus der Papierebene herausragendes Feld wird durch Punkte als Symbole für Pfeilspitzen angegeben.) Die Richtung der magnetischen Kraft steht senkrecht zur Richtung der Geschwindigkeit des Teilchens, welches sich folglich auf einer Kreisbahn bewegt.

26.2 Die Bewegung einer Punktladung in einem Magnetfeld

Die auf ein geladenes, sich in einem Magnetfeld bewegendes Teilchen ausgeübte Kraft ist immer senkrecht zur Geschwindigkeit des Teilchens gerichtet. Das bedeutet, die magnetische Kraft ändert zwar die Richtung, nicht aber den Betrag der Geschwindigkeit. *Magnetfelder verrichten an Teilchen keine Arbeit und haben keinen Einfluss auf deren kinetische Energie.*

Ein spezieller Fall tritt ein, wenn sich ein Teilchen in einem homogenen Magnetfeld bewegt und seine Geschwindigkeit senkrecht zu dem Magnetfeld gerichtet ist. Wie Sie Abbildung 26.12 entnehmen, beschreibt das Teilchen dann eine Kreisbahn, seine Winkelgeschwindigkeit ist ω . Die für die Zentripetalbeschleunigung $a_{ZP} = -v^2/r$ bei der Kreisbewegung notwendige Kraft wird vom Magnetfeld ausgeübt. Auf einer Kreisbahn gilt für die Normalbeschleunigung a_n auf das Teilchen $a_n = -a_{ZP}$. Mit Hilfe dieser Gleichung setzen wir den Radius der Kreisbahn in Beziehung zur Stärke des Magnetfelds und zur Geschwindigkeit des Teilchens. Für eine Geschwindigkeit v ist die resultierende Normalbeschleunigung gleich $a_n = F/m = (q/m)vB$, weil die Vektoren v und B senkrecht aufeinander stehen. Daraus folgt

$$\frac{q}{m} v B = \frac{v^2}{r}.$$

Dabei kann die Ladung q sowohl positiv wie auch negativ sein. Daher ist

$$r = \frac{mv}{qB} \quad \text{oder} \quad r = \frac{mv}{|qB|}. \quad (26.6)$$

Als Periode einer Kreisbewegung bezeichnet man die Zeit, die das Teilchen benötigt, um den Umfang des Kreises einmal vollständig zu durchlaufen. Sie hängt wie folgt mit der Geschwindigkeit zusammen:

$$T = \frac{2\pi r}{v}.$$

Wir setzen hier $r = mv/|qB|$ ein (Gleichung 26.6) und erhalten die Periode der Kreisbewegung des Teilchens, die auch als **Zyklotronperiode** bezeichnet wird:

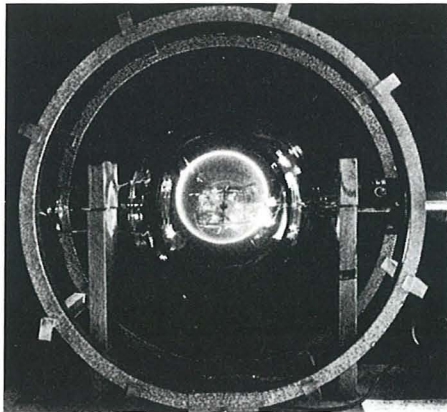
$$T = \frac{2\pi m v / |qB|}{v} = \frac{2\pi m}{|qB|}. \quad (26.7)$$

ZYKLOTRONPERIODE

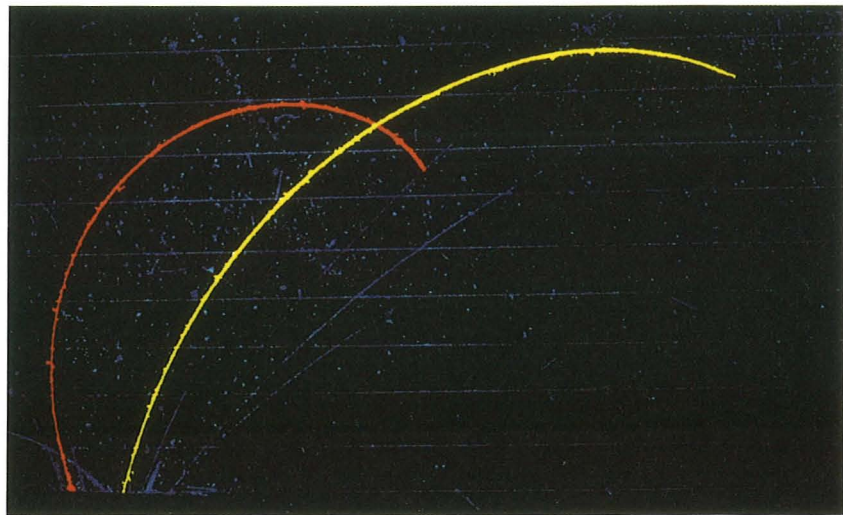
Der Kehrwert der Periode ist die Frequenz der Kreisbewegung, die **Zyklotronfrequenz**:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{|qB|}{2\pi m}, \quad \text{also} \quad \omega = 2\pi\nu = \frac{|qB|}{m} \quad \text{mit} \quad -\hat{\omega} = \frac{q}{|q|} \hat{B}. \quad (26.8)$$

ZYKLOTRONFREQUENZ



(a)



(b)

a) Kreisbahn von Elektronen, die sich in einem von zwei großen Spulen erzeugten Magnetfeld bewegen. Die Elektronen ionisieren das in der Röhre befindliche Gas; entlang der Teilchenbahn sendet dieses ein bläuliches Licht aus. b) Falschfarbenfoto von Spuren eines 1,6-MeV-Protons (rot) und eines 7-MeV-Alpha-teilchens (gelb) in einer Nebelkammer. Der Krümmungsradius der Bahn ist proportional zum Impuls und umgekehrt proportional zur Ladung des betreffenden Teilchens. Die Ladung des Alpha-teilchens ist doppelt so groß wie die des Protons, der Impuls des Alpha-teilchens ist bei den angegebenen Energien rund viermal so groß wie der des Protons; der Krümmungsradius der Bahn des Alpha-teilchens ist deshalb deutlich größer.

BEISPIEL 26.4: Die Zyklotronperiode

Ein Proton mit der Masse $m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ und der Ladung $q = e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ bewegt sich auf einer Kreisbahn mit einem Radius $r = 21 \text{ cm}$ senkrecht zu einem Magnetfeld mit $|\mathbf{B}| = 4000 \text{ G}$. Berechnen Sie a) die Periode der Bewegung und b) die Geschwindigkeit des Protons.

Lösung:

1. Berechnen Sie die Periode T aus Gleichung 26.7 mit $|\mathbf{B}| = 4000 \text{ G} = 0,4 \text{ T}$:

$$T = \frac{2\pi m}{|q\mathbf{B}|} = \frac{2\pi \cdot (1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg})}{(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}) \cdot (0,4 \text{ T})} \\ = 1,64 \cdot 10^{-7} \text{ s} = 164 \text{ ns}$$

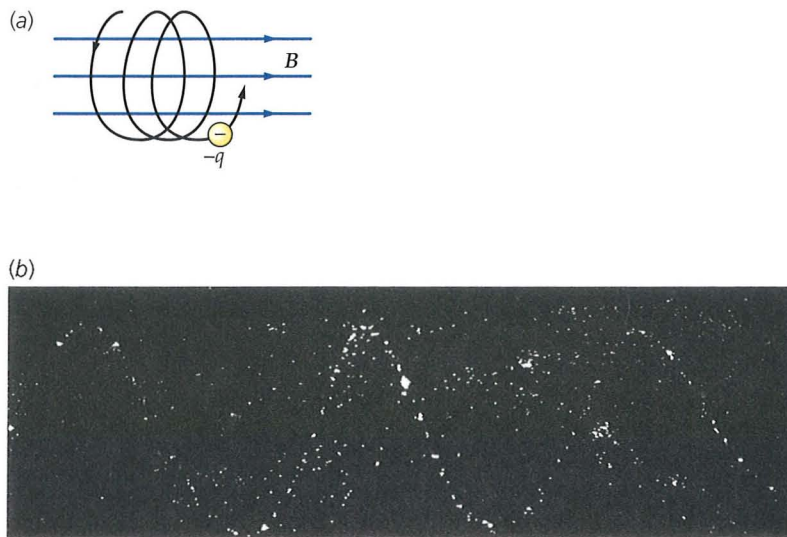
2. Die Geschwindigkeit berechnen Sie nun unter Verwendung von Gleichung 26.6:

$$v = \frac{r|q\mathbf{B}|}{m} = \frac{(0,21 \text{ m}) \cdot (1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}) \cdot (0,4 \text{ T})}{1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} \\ = 8,05 \cdot 10^6 \text{ m/s} = 8,05 \text{ m}/\mu\text{s}$$

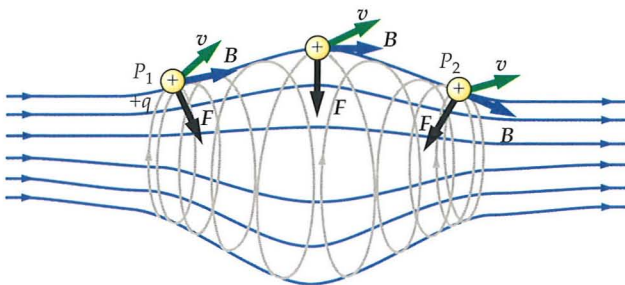
Kommentar: Der Radius der Kreisbahn ist proportional zur Geschwindigkeit, die Periode hingegen hängt weder von der Geschwindigkeit noch vom Radius ab.

! **Plausibilitätsprüfung:** Das Produkt aus Periode T und Geschwindigkeit v ergibt erwartungsgemäß den Umfang $2\pi r$ des Kreises: $vT = (8,05 \cdot 10^6 \text{ m/s}) \cdot (1,64 \cdot 10^{-7} \text{ s}) = 1,32 \text{ m}$; $2\pi r = 2\pi \cdot (0,21 \text{ m}) = 1,32 \text{ m}$.

Beachten Sie: Periode und Frequenz der Bewegung hängen gemäß den Gleichungen 26.7 und 26.8 vom Ladung-Masse-Verhältnis q/m des Teilchens ab, nicht von der Geschwindigkeit v oder vom Radius der Kreisbahn r . Zwei wichtige Anwendungen der Kreisbewegung von Teilchen in homogenen Magnetfeldern werden wir in diesem Kapitel noch besprechen: das Massenspektrometer und das Zyklotron, für das Beispiel 26.4 bereits eine Rechenanwendung vorwegnimmt.



26.13 a) Besitzt die Geschwindigkeit eines Teilchens Komponenten sowohl parallel als auch senkrecht zum homogenen Magnetfeld, so beschreibt das Teilchen eine Schraubenbahn um die Feldlinien. b) Nebelkammeraufnahme der Schraubenbahn eines Elektrons, das sich in einem Magnetfeld bewegt. Die Bahn wird durch die Kondensation von Wassertröpfchen in der Kammer sichtbar gemacht.



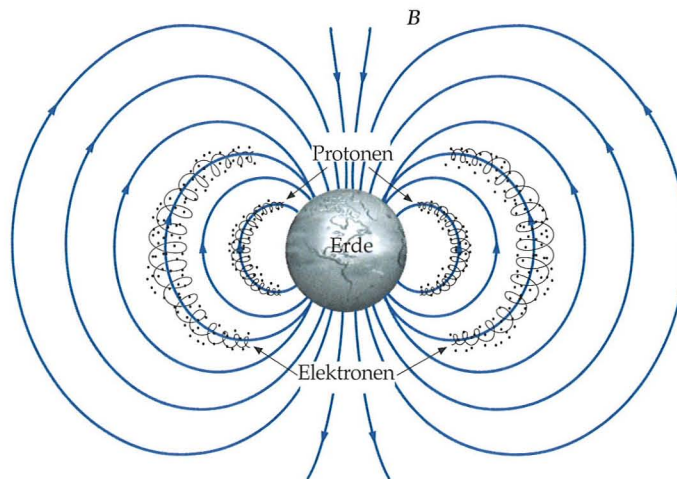
26.14 Magnetische Flasche. Das Feld ist auf beiden Seiten (rechts und links außen) wesentlich stärker als in der Mitte. Ein geladenes Teilchen bewegt sich darin auf Spiralbahnen um die Feldlinien hin und zurück, ohne die Flasche verlassen zu können.

Betrachten wir nun ein geladenes Teilchen, das mit einer Geschwindigkeit in ein Magnetfeld eintritt, deren Richtung nicht senkrecht zu B ist. Parallel zu B ist keine Komponente der Kraft und folglich auch keine Komponente der Beschleunigung verschieden von null; das bedeutet, die Geschwindigkeitskomponente parallel zu B bleibt konstant. Die magnetische Kraft wirkt senkrecht zu B auf das Teilchen, dessen Bewegung deshalb in der gleichen Weise beeinflusst wird wie oben besprochen, und das Teilchen beschreibt eine Schraubenbahn (Abbildung 26.13).

Die Bewegung geladener Teilchen in inhomogenen Magnetfeldern kann recht kompliziert sein. In Abbildung 26.14 sehen Sie eine **magnetische Flasche**, eine Anordnung, an deren Enden das Feld deutlich stärker ist als dazwischen. Eine ausführliche Analyse der Bewegung eines geladenen Teilchens in einem derartigen Feld zeigt, dass sich das Teilchen auf Spiralbahnen um die Feldlinien zwischen den Punkten P_1 und P_2 hin- und herbewegt, ohne die Flasche verlassen zu können. Solche Magnetfelder verwendet man z. B. in der Kernfusionsforschung zum Einschluss geladener Teilchen mit hoher Dichte (*Plasmen*). Ein ähnliches Phänomen ist die Oszillation von Ionen zwischen den magnetischen Polen der Erde innerhalb der Van-Allen-Gürtel (Abbildung 26.15).

Das Geschwindigkeitsfilter*

Die magnetische Kraft, die auf eine bewegte Ladung in einem homogenen Magnetfeld wirkt, kann durch eine elektrische Kraft kompensiert werden. Voraussetzung dafür ist eine geeignete Wahl von Betrag und Richtung des magnetischen und des elektrischen Felds. Die elektrische Kraft wirkt (für positiv geladene Teilchen) parallel zu den zugehörigen Feldlinien, die magnetische senkrecht dazu. In dem Gebiet, wo sich das Teilchen bewegt, müssen die beiden Felder deshalb senkrecht zueinander stehen, damit sich die Kräfte gegenseitig aufheben können. Solche Felder bezeichnet man als **gekreuzt**.



26.15 Van-Allen-Gürtel. Protonen (innerer Gürtel) und Elektronen (äußerer Gürtel) können das Erdmagnetfeld nicht verlassen und bewegen sich auf Spiralbahnen um die Magnetfeldlinien zwischen Nord- und Südpol hin und her.

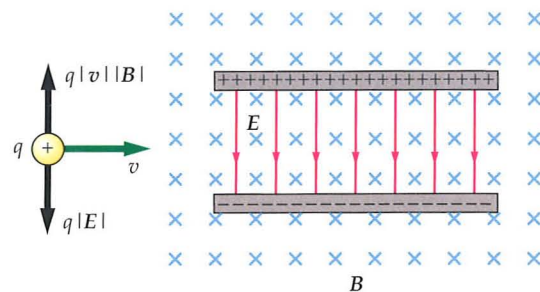
Abbildung 26.16 zeigt das Gebiet zwischen den Platten eines Kondensators, der ein elektrisches Feld erzeugt. Senkrecht zu diesem wirkt ein Magnetfeld (eines Magneten, dessen Pole Sie sich ober- und unterhalb der Papierebene vorstellen müssen). Betrachten wir nun ein Teilchen mit der Ladung q , das von links in dieses Gebiet eintritt. Insgesamt wirkt auf dieses Teilchen die Kraft

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Ist q positiv, so wirkt die elektrische Kraft vom Betrag $q|\mathbf{E}|$ nach unten und die magnetische Kraft vom Betrag $q|\mathbf{v}| |\mathbf{B}|$ nach oben; ist q negativ, wirken die Kräfte in den umgekehrten Richtungen. Die Kräfte heben einander gerade auf, wenn $q|\mathbf{E}| = q|\mathbf{v}| |\mathbf{B}|$ ist oder

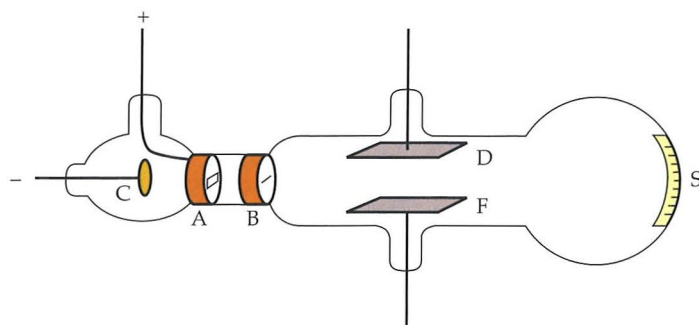
$$|\mathbf{v}| = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{B}|}. \quad (26.9)$$

Bei vorgegebenen Feldstärken kompensieren sich die Kräfte nur für Teilchen, die sich mit der durch Gleichung 26.9 gegebenen Geschwindigkeit bewegen. Jedes Teilchen mit dieser Geschwindigkeit – ungeachtet seiner Masse oder Ladung – durchläuft den Raum zwischen den Kondensatorplatten, ohne abgelenkt zu werden. Teilchen mit größerer Geschwindigkeit werden in Richtung der magnetischen Kraft abgelenkt, Teilchen mit geringerer Geschwindigkeit hingegen in Richtung der elektrischen Kraft. Eine derartige Anordnung gekreuzter Felder nennt man auch **(Wien'sches) Geschwindigkeitsfilter**. In der Praxis bringt man rechts von den Kondensatorplatten in Abbildung 26.16 eine Blende mit einem kleinen Loch so an, dass nur Teilchen mit der richtigen Geschwindigkeit diese Blende passieren können, nicht aber solche mit falschen Geschwindigkeiten.

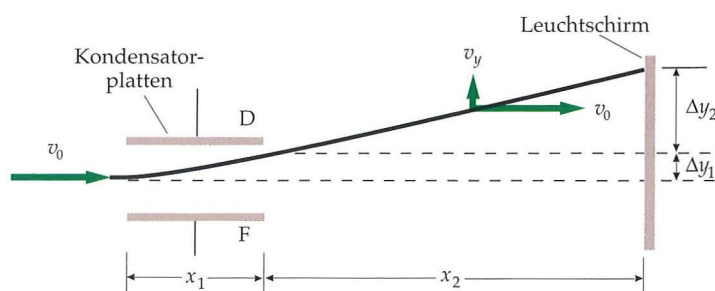


26.16 Gekreuzte Felder. Auf ein positiv geladenes Teilchen, das sich nach rechts bewegt, wirkt eine elektrische Kraft (nach unten) und eine magnetische Kraft (nach oben). Die Kräfte heben einander auf, wenn die Geschwindigkeit des Teilchens gemäß $|\mathbf{v}| |\mathbf{B}| = |\mathbf{E}|$ zu den Feldstärken in Beziehung steht.

ÜBUNG: Ein Proton bewegt sich in x -Richtung durch ein Gebiet mit gekreuzten Feldern ($\mathbf{E} = (2 \cdot 10^5 \hat{\mathbf{z}}) \text{ N/C}$, $\mathbf{B} = (-3000 \hat{\mathbf{y}}) \text{ G}$). a) Wie schnell muss sich das Proton bewegen, damit es nicht abgelenkt wird? b) In welcher Richtung wird das Proton abgelenkt, wenn es sich mit dem Doppelten der Teilaufgabe a erfüllenden Geschwindigkeit bewegt? (Lösung: a) 667 m/s, b) in negativer z -Richtung.)



26.17 Schema der von J. J. Thomson zur Messung von q/m verwendeten Kathodenstrahlröhre. Kathodenstrahlen (Elektronen) treten aus der Kathode C aus, fliegen durch die Spalte A und B und treffen auf einen Leuchtschirm S. Ein elektrisches Feld zwischen den Kondensatorplatten D und F oder ein (nicht eingezeichnetes) Magnetfeld kann den Strahl ablenken.



26.18 Die gesamte Ablenkung Δy eines Elektronenstrahls in J. J. Thomsons Experiment setzt sich zusammen aus der Ablenkung Δy_1 im Kondensator und der Ablenkung Δy_2 im feldfreien Raum zwischen Kondensator und Leuchtschirm.

Thomsons Experiment zur Messung von q/m^*

Ein Beispiel für die Anwendung gekreuzter Felder ist das berühmte Experiment Joseph John Thomsons im Jahr 1897: Thomson zeigte, dass Kathodenstrahlen sich durch elektrische und magnetische Felder ablenken lassen und folglich aus geladenen Teilchen bestehen müssen. Durch Messung der Ablenkung wies er nach, dass das Ladung-Masse-Verhältnis q/m aller dieser Teilchen gleich ist. Teilchen mit genau diesem Ladung-Masse-Verhältnis erzeugte Thomson unter Verwendung der unterschiedlichsten Kathodenmaterialien, was bedeutete, dass diese Teilchen zu den Grundbausteinen der Materie gehören. Heute nennt man diese Teilchen „Elektronen“.

Abbildung 26.17 zeigt ein Schema der Kathodenstrahlröhre, an der Thomson seine Versuche ausführte. Elektronen werden von der Kathode C emittiert, die relativ zu den Spalten A und B negativ vorgespannt ist. Ein elektrisches Feld beschleunigt die Elektronen von C nach A, dann fliegen die Teilchen durch die Spalte A und B, passieren ein feldfreies Gebiet und treten in das elektrische Feld zwischen den Kondensatorplatten D und F ein. Das Feld steht senkrecht zur Bewegungsrichtung der Teilchen und beschleunigt diese kurzzeitig waagrecht (verleiht ihnen eine vertikale Geschwindigkeitskomponente). Die Elektronen werden abgelenkt und treffen auf dem Leuchtschirm S rechts in einem Punkt auf, der gegenüber dem Auftreffpunkt beim feldfreien Flug um eine Strecke Δy verschoben ist. Im Auftreffpunkt leuchtet der Schirm, wodurch sich der Strahl leicht lokalisieren lässt. Die Anfangsgeschwindigkeit der Elektronen v_0 wird durch Anlegen eines Magnetfelds \mathbf{B} zwischen den Platten festgelegt, dessen Richtung senkrecht sowohl zur Richtung des elektrischen Felds als auch zur Richtung der Geschwindigkeit steht. Die Feldstärke von \mathbf{B} wird zu Beginn des Versuchs so eingestellt, dass der Strahl keine Ablenkung erfährt. Dann ergibt sich die Anfangsgeschwindigkeit der Teilchen aus Gleichung 26.9.

Ist das Magnetfeld ausgeschaltet, so ist die Ablenkung des Strahls im Auftreffpunkt gleich Δy . Dieser Wert setzt sich aus zwei Beträgen zusammen, der Ablenkung Δy_1 während des Flugs durch das elektrische Feld zwischen den Platten und der Ablenkung Δy_2 während des anschließenden Flugs durch das feldfreie Gebiet (Abbildung 26.18).

Nun sei x_1 die Länge der Flugstrecke durch das elektrische Feld (die Länge der Kondensatorplatten). Bewegt sich das Elektron

BEISPIEL 26.5: Ablenkung eines Elektronenstrahls

Elektronen gelangen ohne Ablenkung durch das elektrische Feld zwischen den Kondensatorplatten in Thomsons Versuchsanordnung (siehe Abbildung 26.18), wenn die elektrische Feldstärke -3000 V/m und die Stärke des gekreuzt anliegenden Magnetfelds $1,40 \text{ G}$ beträgt. Die Kondensatorplatten seien 4 cm lang und ihre Enden 30 cm vom Leuchtschirm entfernt. Berechnen Sie die Ablenkung des Elektronenstrahls nach Ausschalten des Magnetfelds.

Problembeschreibung: Masse und Ladung des Elektrons sind bekannt: $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ und $q = -e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Die Geschwindigkeit des Elektrons folgt aus dem Verhältnis der elektrischen und magnetischen Feldstärke.

Lösung:

1. Gleichung 26.10 gibt die Gesamtablenkung des Elektrons an:

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 = \frac{1}{2} \frac{q E_y}{m v_0^2} x_1^2 + \frac{q E_y}{m v_0^2} x_1 x_2$$

2. Die Geschwindigkeit v_0 ist gleich $|E|/|B|$:

$$v_0 = \frac{|E|}{|B|} = \frac{3000 \text{ V/m}}{1,40 \cdot 10^{-4} \text{ T}} = 2,14 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

3. Setzen Sie dieses Ergebnis, die gegebene elektrische Feldstärke sowie die bekannten Werte von m und q in die Gleichung aus Schritt 1 ein, um Δy zu berechnen:

$$\begin{aligned} \Delta y_1 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}) \cdot (-3000 \text{ V/m})}{(9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}) \cdot (2,14 \cdot 10^7 \text{ m/s})^2} \cdot (0,04 \text{ m})^2 \\ &= 9,20 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ \Delta y_2 &= \frac{(-1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}) \cdot (-3000 \text{ V/m})}{(9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}) \cdot (2,14 \cdot 10^7 \text{ m/s})^2} \cdot (0,04 \text{ m}) \cdot (0,30 \text{ m}) \\ &= 1,38 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ \Delta y &= \Delta y_1 + \Delta y_2 \\ &= 9,20 \cdot 10^{-4} \text{ m} + 1,38 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ &= 0,92 \text{ mm} + 13,8 \text{ mm} \\ &= \boxed{14,7 \text{ mm}} \end{aligned}$$

beim Eintreten in das Gebiet zwischen den Platten mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 , so durchfliegt es den Ablenkbereich in einer Zeit $t_1 = x_1/v_0$. Die Vertikalgeschwindigkeit des Elektrons beim Verlassen des Kondensators ist dann

$$v_y = a_y t_1 = \frac{q E_y}{m} t_1 = \frac{q E_y}{m} \frac{x_1}{v_0}$$

mit E_y als aufwärts gerichteter Komponente des elektrischen Felds zwischen den Platten. Die Ablenkung in diesem Gebiet beträgt also

$$\Delta y_1 = \frac{1}{2} a_y t_1^2 = \frac{1}{2} \frac{q E_y}{m} \left(\frac{x_1}{v_0} \right)^2$$

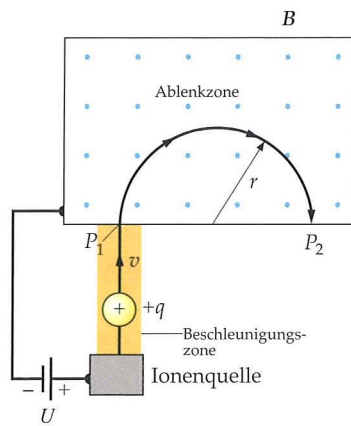
Zwischen den Kondensatorplatten und dem Schirm durchfliegt das Elektron die waagrecht gemessene Entfernung x_2 im feldfreien Raum. Die Geschwindigkeit des Teilchens ist dort konstant, die Flugzeit bis zum Schirm ist deshalb gegeben durch $t_2 = x_2/v_0$. Für die zusätzliche vertikale Ablenkung erhalten wir damit

$$\Delta y_2 = v_y t_2 = \frac{q E_y}{m} \frac{x_1}{v_0} \frac{x_2}{v_0}$$

Wir addieren die Beiträge zur Gesamtablenkung in vertikaler Richtung:

$$\begin{aligned} \Delta y &= \Delta y_1 + \Delta y_2 = \frac{1}{2} \frac{q E_y}{m v_0^2} x_1^2 + \frac{q E_y}{m v_0^2} x_1 x_2 \\ &= \frac{q E_y}{m v_0^2} \left(\frac{x_1^2}{2} + x_1 x_2 \right). \end{aligned} \quad (26.10)$$

Die gemessene Ablenkung Δy setzt man in Gleichung 26.10 ein und kann nun das Ladung-Masse-Verhältnis q/m (im Falle des Elektrons natürlich e/m) berechnen. Eine andere Anwendung dieser Gleichung ist die Ablenkung eines Elektronenstrahls in Beispiel 26.5.



26.19 Funktionsschema eines Massenspektrometers. Positiv geladene Ionen treten aus der Ionenquelle aus, werden durch eine Potentialdifferenz U beschleunigt und erreichen in P_1 ein homogenes Magnetfeld. Das Magnetfeld zeigt aus der Papierebene heraus, wie durch die Punkte angedeutet wird. Im Magnetfeld werden die Ionen auf eine Kreisbahn gezwungen, in Punkt P_2 treffen sie auf eine Fotoplatte. Der Radius der Kreisbahn hängt von der Masse der Ionen ab.

Das Massenspektrometer*

Das erste **Massenspektrometer** wurde 1919 von Francis William Aston zur Messung von Isotopenmassen gebaut. Ziel dieser Experimente ist zum einen der Nachweis von Isotopen, zum anderen die Ermittlung natürlicher Isotopenverhältnisse. Natürliches Magnesium z. B. enthält die Isotope ^{24}Mg (78,8 %), ^{25}Mg (10,1 %) und ^{26}Mg (11,2 %), deren Massenverhältnis ungefähr 24:25:26 beträgt.

Ein einfaches Schema eines Massenspektrometers sehen Sie in Abbildung 26.19. Durch Beschuss neutraler Atome mit Röntgen- oder Elektronenstrahlen entstehen positiv geladene Ionen (Elektronen werden aus den Atomen herausgeschlagen). Die Ionen treten aus der Ionenquelle aus, werden durch ein elektrisches Feld beschleunigt und erreichen in Punkt P_1 ein homogenes Magnetfeld. Sind die Ionen anfangs in Ruhe und ist die Potentialdifferenz gleich U , so ist die Summe aus ihrem Gewinn an kinetischer Energie $mv^2/2$ (mit dem die Ionen in das Magnetfeld eintreten) und ihrem Verlust an potenzieller Energie $-qU$ gleich null:

$$\frac{1}{2}mv^2 = qU. \quad (26.11)$$

Im Magnetfeld bewegen sich die Ionen auf einer halbkreisförmigen Bahn, deren Radius r durch Gleichung 26.6 gegeben ist ($r = mv/|qB|$), und treffen in Punkt P_2 auf eine Fotoplatte. Die Entfernung zwischen P_1 und P_2 beträgt $2r$.

Die Geschwindigkeit v kann aus den Gleichungen 26.6 und 26.11 eliminiert werden. So lässt sich m/q aus den bekannten Größen U , B und r berechnen. Dazu lösen wir zunächst Gleichung 26.6 nach v auf und quadrieren beide Seiten:

$$v^2 = \frac{r^2 q^2 B^2}{m^2}.$$

Diese Beziehung setzen wir für v^2 in Gleichung 26.11 ein und erhalten

$$\frac{1}{2}m \left(\frac{r^2 q^2 B^2}{m^2} \right) = qU.$$

Vereinfachen dieses Ausdrucks und Auflösen nach m/q liefert schließlich

$$\frac{m}{q} = \frac{B^2 r^2}{2U}. \quad (26.12)$$

Anhand dieser Beziehung wird in Beispiel 26.6 die Trennung von Nickelisotopen berechnet.

Mit Astons ursprünglicher Versuchsanordnung ließen sich relative Massendifferenzen $\Delta m/m$ mit einer Genauigkeit von ungefähr 1:10000 auflösen. Bessere Auflösungen erreicht man, indem man zwischen Ionenquelle und Magnetfeld ein Geschwindigkeitsfilter setzt, wodurch sich die Geschwindigkeit der in das Feld eintretenden Ionen eingrenzen und damit exakter festlegen lässt.

BEISPIEL 26.6: Trennung von Nickelisotopen

Ein ^{58}Ni -Ion mit der Ladung $+e$ und einer Masse von $9,62 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$ werde durch eine Potenzialdifferenz von 3 kV beschleunigt und anschließend in einem Magnetfeld von 0,12 T abgelenkt. a) Berechnen Sie den Krümmungsradius der Flugbahn im Magnetfeld. b) Das Massenverhältnis von ^{58}Ni und ^{60}Ni ist ungefähr 58 : 60. Wie groß ist die Differenz zwischen den Radien der Flugbahnen eines ^{58}Ni -Ions und eines ^{60}Ni -Ions?

Problembeschreibung: Zur Berechnung des Krümmungsradius r wenden wir Gleichung 26.12 an. Da wir die Massenabhängigkeit von r kennen, können wir den Bahnradius für ein ^{60}Ni -Ion aus dem Radius für ein ^{58}Ni -Ion berechnen und anschließend die Differenz der Radien bilden.

Lösung:

Teilaufgabe a

Lösen Sie Gleichung 26.12 nach r auf:

$$r = \sqrt{\frac{2mU}{qB^2}} = \left(\frac{2 \cdot (9,62 \cdot 10^{-26} \text{ kg}) \cdot (3000 \text{ V})}{(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}) \cdot (0,12 \text{ T})^2} \right)^{1/2} = \boxed{0,501 \text{ m}}$$

Teilaufgabe b

1. r_1 und r_2 seien die Radien der Flugbahn eines ^{58}Ni -Ions bzw. eines ^{60}Ni -Ions. Unter Verwendung Ihres Ergebnisses aus Teilaufgabe a berechnen Sie das Verhältnis von r_2 zu r_1 :

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \sqrt{\frac{60}{58}} = 1,017$$

2. Mit diesem Resultat berechnen Sie r_2 für ^{60}Ni :

$$r_2 = 1,017 r_1 = (1,017) \cdot (0,501 \text{ m}) = 0,510 \text{ m}$$

3. Bilden Sie nun $r_2 - r_1$, die Differenz der Bahnradien:

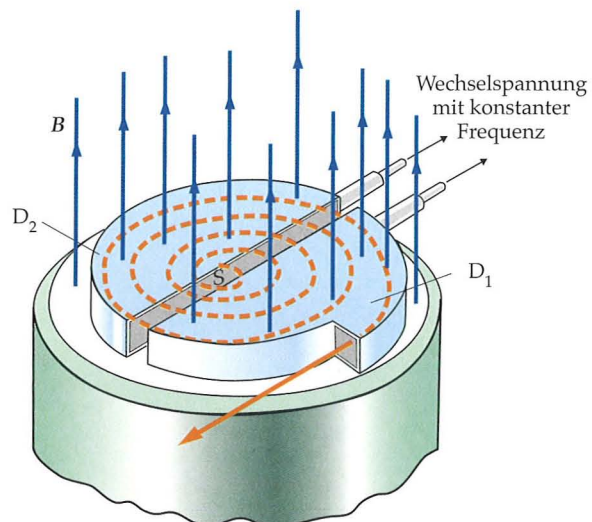
$$r_2 - r_1 = 0,510 \text{ m} - 0,501 \text{ m} = \boxed{9 \text{ mm}}$$

Das Zyklotron

Das Zyklotron wurde 1934 von Ernest O. Lawrence und M. Stanley Livingston entwickelt. Mit diesem Gerät lassen sich Teilchen wie Protonen und Deuteronen auf hohe Geschwindigkeiten beschleunigen. (Ein Deuteron ist ein Kern von schwerem Wasserstoff, ^2H , bestehend aus einem Proton und einem Neutron.) Diese energiereichen Teilchen werden anschließend auf Atomkerne geschossen, wodurch Kernreaktionen ausgelöst werden, deren Verlauf Rückschlüsse auf die Eigenschaften der Zielkerne zulässt. Außerdem verwendet man die schnellen Teilchen zur Erzeugung radioaktiver Substanzen und für medizinische Zwecke.

Das Funktionsschema eines Zyklotrons sehen Sie in Abbildung 26.20. Die Teilchen bewegen sich in zwei halbkreisförmigen, aufgrund ihrer Gestalt „Ds“ genannten Metallbehältern. Die Ds befinden sich in einer Vakuumkammer, damit die beschleunigten Teilchen keine Energie durch Zusammenstöße mit Molekülen der Luft verlieren können. An der gesamten Anordnung liegt ein von einem Elektromagneten erzeugtes homogenes äußeres Magnetfeld an. Zwischen den Ds wird eine Potenzialdifferenz U erzeugt, die sich mit der Periode T zeitlich ändert; T ist die durch Gleichung 26.7 gegebene Zyklotronperiode, $T = 2\pi m / |qB|$. Die Potenzialdifferenz bewirkt ein elektrisches Feld in der Lücke zwischen den Ds, während das Innere der Ds feldfrei bleibt (die Metallgehäuse wirken als Abschirmung).

Positiv geladene Teilchen treten mit niedriger Geschwindigkeit aus der Ionenquelle S im Mittelpunkt der Anordnung aus und in



26.20 Funktionsschema eines Zyklotrons; der obere Teil des Magneten wurde weggelassen. Geladene Teilchen, emittiert von einer Quelle S in der Mitte der Anordnung, werden durch eine in der Lücke zwischen den Ds herrschende Potenzialdifferenz beschleunigt und bewegen sich entlang der gestrichelt eingezeichneten Bahn. Die Potenzialdifferenz ändert ihr Vorzeichen mit der Zyklotronfrequenz des untersuchten Teilchens, die nicht vom Radius der Bahn abhängt. Jedes Mal, wenn die Teilchen die Lücke erreichen, werden sie erneut beschleunigt, weshalb der Bahnradius immer größer wird.

BEISPIEL 26.7: Energie eines beschleunigten Protons

Ein Zyklotron zur Beschleunigung von Protonen arbeitet mit einem Magnetfeld von 1,5 T, der maximale Radius der Ds beträgt 0,5 m. a) Geben Sie die Zyklotronfrequenz an. b) Mit welcher kinetischen Energie treten die Protonen aus dem Zyklotron aus?

Lösung:**Teilaufgabe a**

Die Zyklotronfrequenz ist durch Gleichung 26.8 gegeben:

$$\nu = \frac{|qB|}{2\pi m} = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}) \cdot (1,5 \text{ T})}{2\pi \cdot (1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg})} = 2,29 \cdot 10^7 \text{ Hz}$$

$$= \boxed{22,9 \text{ MHz}}$$

Teilaufgabe b

1. Die kinetische Energie der austretenden Protonen ergibt sich aus Gleichung 26.13:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \left(\frac{(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2 \cdot (1,5 \text{ T})^2}{1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} \right) \cdot (0,5 \text{ m})^2$$

$$= 4,31 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

2. Energien von Protonen und anderen Elementarteilchen werden üblicherweise in Elektronenvolt angegeben (1 eV = $1,6 \cdot 10^{-19}$ J):

$$E_{\text{kin}} = 4,31 \cdot 10^{-12} \text{ J} \cdot \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = \boxed{26,9 \text{ MeV}}$$

D_1 ein. Darin beschreiben sie eine halbkreisförmige Bahn und erreichen nach der Zeit $\frac{1}{2} T$ die Lücke zwischen D_1 und D_2 . Die Potenzialdifferenz wird so eingestellt, dass D_1 in diesem Moment auf höherem Potenzial liegt als D_2 . Folglich werden die Teilchen in der Lücke durch das elektrische Feld beschleunigt, ihre kinetische Energie nimmt um U zu.

Da die kinetische Energie der Teilchen nun höher ist, ist der Bahnradius in D_2 größer. Wieder kommen die Teilchen nach der Zeit $\frac{1}{2} T$ an der Lücke an, weil die Zyklotronperiode nicht von der Geschwindigkeit der Teilchen abhängt. Inzwischen hat das Potenzial in der Lücke sein Vorzeichen umgekehrt: D_2 befindet sich nun auf höherem Potenzial, die Teilchen werden beim Durchfliegen der Lücke erneut beschleunigt, und ihre kinetische Energie nimmt um qU zu. Dieser Vorgang findet stets beim Überqueren der Lücke statt. Auf diese Weise wird der Bahnradius allmählich größer, bis die Teilchen schließlich aus dem Magnetfeld austreten. In einem typischen Zyklotron erreichen die Teilchen nach 50 bis 100 Umläufen Energien von bis zu mehreren hundert Megaelektronenvolt.

Wir wollen nun die kinetische Energie eines Teilchens beim Austritt aus einem Zyklotron berechnen. Dazu setzen wir in Gleichung 26.6 r gleich dem Maximalradius der Ds und lösen nach v auf:

$$r = \frac{mv}{|qB|}, \quad v = \frac{|qB|r}{m}.$$

Die kinetische Energie ist dann

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{q^2 B^2}{m} \right) r^2. \quad (26.13)$$

In Beispiel 26.7 wird die Energie eines beschleunigten Protons berechnet.

26.3 Das auf Leiterschleifen und Magnete ausgeübte Drehmoment

Auf eine stromdurchflossene Leiterschleife wirkt in einem homogenen Magnetfeld keine resultierende Kraft, aber ein Drehmoment, wie im Folgenden gezeigt werden soll. Die Lage der Schleife beschreiben wir durch einen Einheitsvektor \hat{n} , der in Richtung der Normalen der Schleifenebene (senkrecht zu dieser) steht (Abbildung 26.21). Wenn sich die Finger der rechten Hand in Richtung des Stroms durch die Leiterschleife krümmen, zeigt der Daumen in Richtung von \hat{n} .

Abbildung 26.22 zeigt, welche Kräfte in einem homogenen Magnetfeld auf eine rechteckige Leiterschleife wirken, deren Normalenvektor \hat{n} einen Winkel θ mit der Richtung des Magnetfelds \mathbf{B} einschließt. Die Summe der Kräfte ist null, ihre Beträge sind gegeben durch

$$|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2| = I |\mathbf{a}| |\mathbf{B}|.$$

\mathbf{F}_1 und \mathbf{F}_2 bilden ein Kräftepaar. Das Drehmoment ist deshalb bezüglich jedes Punkts gleich. Zur Berechnung des Drehmoments wählen wir bequemerweise Punkt P in Abbildung 26.22. Der Betrag des Drehmoments ist

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{F}_2| |\mathbf{b}| \sin \theta = I |\mathbf{a}| |\mathbf{B}| |\mathbf{b}| \sin \theta = I |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta,$$

wobei der Flächenbetrag eines Parallelogramms mit den Seiten \mathbf{a} und \mathbf{b} gegeben ist durch $|\mathbf{A}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Für den Spezialfall des Rechtecks ergibt sich $|\mathbf{A}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin 90^\circ = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$; dies ist die Fläche der Leiterschleife. Für eine Schleife mit n Windungen gilt entsprechend

$$|\mathbf{M}| = n I |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta.$$

Das Drehmoment versucht die Schleife so zu drehen, dass \hat{n} in dieselbe Richtung zeigt wie \mathbf{B} , dass also die Schleifenebene senkrecht zu \mathbf{B} orientiert ist.

Eine einfachere Schreibweise für das Drehmoment ergibt sich, wenn wir zuvor das **magnetische Dipolmoment** $\boldsymbol{\mu}$ (oder kürzer das **magnetische Moment**) einführen. Für die Leiterschleife ist es wie folgt definiert:

$$\boldsymbol{\mu} = n I \mathbf{A}, \quad (26.14)$$

wobei der Flächenvektor \mathbf{A} in die Richtung der Normalen auf die Fläche zeigt:

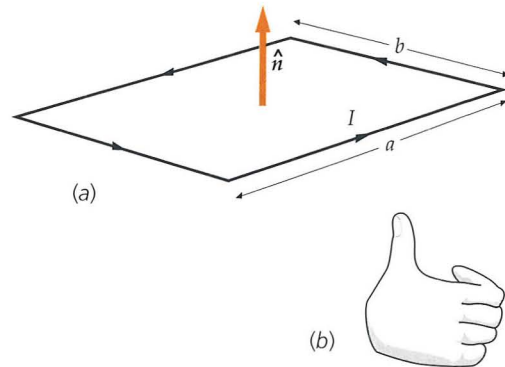
$$\mathbf{A} = A \hat{n},$$

MAGNETISCHES MOMENT EINER LEITERSCHLEIFE

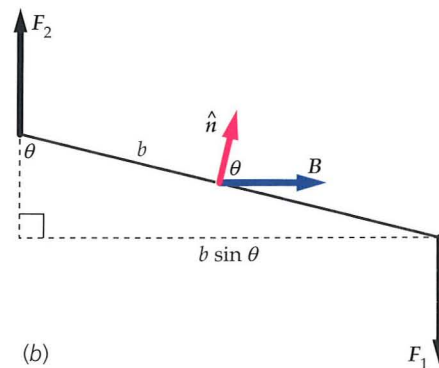
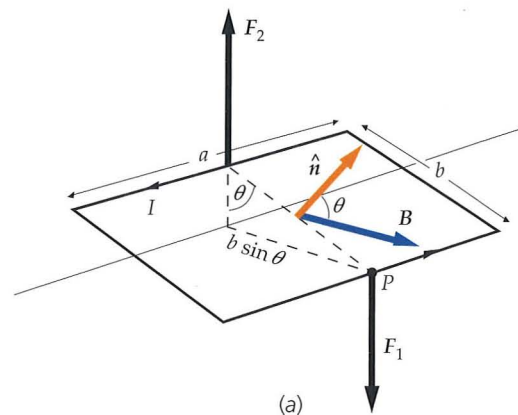
Die SI-Einheit des magnetischen Moments ist $\text{A} \cdot \text{m}^2$ (Ampere mal Meter zum Quadrat). Auf die Leiterschleife wirkt damit das Drehmoment

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}. \quad (26.15)$$

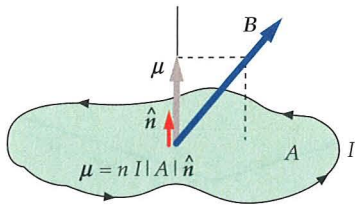
DREHMOMENT AUF EINE LEITERSCHLEIFE



26.21 a) Die Orientierung einer stromdurchflossenen Leiterschleife lässt sich durch den Normalenvektor \hat{n} beschreiben, einen Einheitsvektor, der senkrecht auf der Schleifenebene steht. b) Rechte-Hand-Regel zur Bestimmung der Richtung von \hat{n} : Wenn sich die Finger der rechten Hand in Richtung des Stroms durch die Leiterschleife krümmen, zeigt der Daumen in Richtung von \hat{n} .



26.22 a) Rechteckige, stromdurchflossene Leiterschleife, deren Normalenvektor \hat{n} einen Winkel θ mit der Richtung eines homogenen Magnetfelds \mathbf{B} einschließt. b) Seitenansicht der Leiterschleife: Das ausgeübte Drehmoment hat den Betrag $I |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta$ und ist so gerichtet, dass durch die Drehung der Schleife der Normalenvektor mit der Richtung von \mathbf{B} zur Deckung kommt.



26.23 Eine ebene, stromdurchflossene Leiterschleife beliebiger Form wird durch ihr magnetisches Moment $\mu = n I |A| \hat{n}$ beschrieben. In einem Magnetfeld \mathbf{B} wirkt auf die Schleife das Drehmoment $\mu \times \mathbf{B}$.

Wir haben Gleichung 26.15 zwar für eine rechteckige Leiterschleife abgeleitet, sie gilt aber für Leiterschleifen beliebiger Form – vorausgesetzt, sie liegen in einer Ebene. Das Drehmoment ergibt sich jeweils als Kreuzprodukt des magnetischen Moments μ der Schleife und des Magnetfelds \mathbf{B} , wobei das magnetische Moment als Vektor senkrecht zur Schleifenebene definiert ist, der in Richtung von \hat{n} zeigt und dessen Betrag gleich $n I |A|$ ist (Abbildung 26.23). Ein Vergleich von Gleichung 26.15 mit Gleichung 21.11 ($\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$) zeigt, dass sich eine Leiterschleife in einem Magnetfeld genauso verhält wie ein elektrischer Dipol in einem elektrischen Feld. Die Beispiele 26.8 und 26.9 verdeutlichen Anwendungen des Drehmoments bei Leiterschleifen.

Die potenzielle Energie eines magnetischen Dipols in einem Magnetfeld

Wirkt ein Drehmoment entlang eines Winkels, so wird Arbeit verrichtet. Die bei der Drehung eines Dipols um einen Winkel $d\theta$ verrichtete Arbeit ist

$$dW = -|\mathbf{M}| d\theta = -|\mu| |\mathbf{B}| \sin \theta d\theta.$$

Das Minuszeichen kommt zustande, weil der Winkel θ durch die Wirkung des Drehmoments kleiner wird. Setzen wir diese Arbeit gleich der Abnahme der potenziellen Energie des Systems, so erhalten wir

$$dE_{\text{pot}} = -dW = +|\mu| |\mathbf{B}| \sin \theta d\theta,$$

und die Integration liefert

$$E_{\text{pot}} = -|\mu| |\mathbf{B}| \cos \theta + E_{\text{pot},0}.$$

Als Nullpunkt der potenziellen Energie wählen wir $\theta = 90^\circ$. Dann ist $E_{\text{pot},0} = 0$, und die potenzielle Energie des Dipols ist

$$E_{\text{pot}} = -|\mu| |\mathbf{B}| \cos \theta = -\mu \cdot \mathbf{B}. \quad (26.16)$$

POTENZIELLE ENERGIE EINES MAGNETISCHEN DIPOLS

Gleichung 26.16 gibt die potenzielle Energie eines magnetischen Dipols an, der mit der Richtung eines umgebenden magnetischen Felds den Winkel θ einschließt. Diese Beziehung wird in Beispiel 26.10 verdeutlicht.

Bringt man einen kleinen Permanentmagneten, etwa eine Kompassnadel, in ein Magnetfeld \mathbf{B} , so wirkt auf sie ein Drehmoment: Die Nadel richtet sich entlang der Feldlinien aus. Dieser Effekt tritt auch mit zuvor nicht magnetischen Eisenfeilspänen auf, die durch das \mathbf{B} -Feld magnetisiert werden. Der Stabmagnet besitzt ein magnetisches Moment μ ; dieser Vektor zeigt in Richtung eines Pfeils, der Südpol und Nordpol des Magneten verbindet. Ein kleiner Stabmagnet verhält sich demnach im Magnetfeld genauso wie eine Leiterschleife. Das ist kein Zufall, denn das magnetische Moment des Stabmagneten wird von mikroskopischen Ringströmen verursacht, die wiederum durch die Bewegung der Elektronen in den Atomen des Magneten zustande kommen.

Zum Abschluss illustriert Beispiel 26.11, wie die Ladungen in einer rotierenden Scheibe zu einem magnetischen Moment führen.

BEISPIEL 26.8: Auf eine Leiterschleife wirkendes Drehmoment

Durch eine Leiterschleife mit 10 kreisrunden Windungen und einem Radius von 2 cm fließt ein Strom von 3 A. Die Achse der Schleife schließt mit der Richtung eines Magnetfelds von 8000 G einen Winkel von 30° ein. Berechnen Sie den Betrag des auf die Schleife wirkenden Drehmoments.

Lösung:

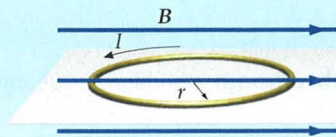
Den Betrag des Drehmoments gibt Gleichung 26.15 an:

$$\begin{aligned} |\mathbf{M}| &= |\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}| = |\boldsymbol{\mu}| |\mathbf{B}| \sin \theta = n I |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta \\ &= (10) \cdot (3 \text{ A}) \cdot \pi \cdot (0,02 \text{ m})^2 \cdot (0,8 \text{ T}) \cdot \sin 30^\circ \\ &= \boxed{1,51 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}} \end{aligned}$$

BEISPIEL 26.9: Kippen einer Leiterschleife

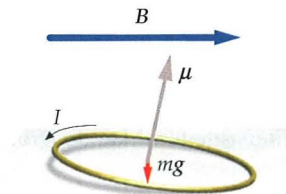
Eine kreisrunde Leiterschleife mit dem Radius r und der Masse m , durch die ein Strom I fließt, liegt auf einer waagerechten Fläche (Abbildung 26.24) und ist von einem waagrecht orientierten Magnetfeld \mathbf{B} umgeben. Wie groß darf die Stromstärke höchstens sein, damit sich der Umfang der Schleife gerade noch nicht seitlich von der Unterlage abhebt?

26.24

**ZUR ÜBUNG**

Problembeschreibung: Die Schleife beginnt sich zu heben, wenn der Betrag des resultierenden Drehmoments ungleich null ist (Abbildung 26.25). Um das Drehmoment zu eliminieren, das durch die Normalkraft entsteht, führen wir unsere Rechnung bezüglich des Berührungspunkts zwischen Schleife und Fläche aus. Das Magnetfeld ruft das Drehmoment $\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$ hervor, das bezüglich aller Punkte gleich ist, da jeweils Kräftepaare vorliegen. Der Hebelarm, an dem das Drehmoment der Gravitation angreift, ist der Radius des Kreises.

26.25

**Lösung:**

Decken Sie zunächst die rechte Spalte ab und versuchen Sie jeweils, die Ergebnisse selbst zu ermitteln.

Schritte**Ergebnisse**

1. Berechnen Sie das auf die Schleife wirkende magnetische Drehmoment.

$$M_B = \mu B = I \pi r^2 B$$

2. Berechnen Sie den Betrag des Drehmoments, das die Gravitationskraft auf die Schleife ausübt.

$$M_G = -m g r$$

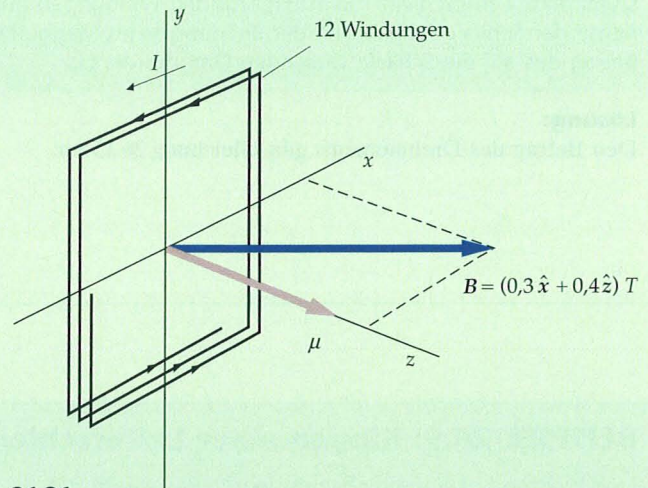
3. Setzen Sie die Beträge der Drehmomente gleich und lösen Sie nach dem Strom I auf.

$$I = \boxed{\frac{m g}{\pi r B}}$$

Kommentar: Die Drehmomentvektoren haben gleiche Beträge, aber entgegengesetzte Richtungen.

BEISPIEL 26.10: Auf eine quadratische Leiterschleife wirkendes Drehmoment

Durch eine quadratische Leiterschleife mit 12 Windungen und einer Kantenlänge von 40 cm fließt ein Strom von 3 A. Wie in Abbildung 26.26 dargestellt, liegt die Schleife in der x - y -Ebene. Sie ist von einem Magnetfeld $\mathbf{B} = (0,3\hat{x} + 0,4\hat{z})$ T umgeben. Berechnen Sie a) das magnetische Moment der Schleife, b) das auf die Schleife wirkende Drehmoment und c) die potenzielle Energie der Schleife.



Problembeschreibung: Abbildung 26.26 entnehmen wir, dass das magnetische Moment der Schleife in die positive z -Richtung zeigt.

Lösung:

Teilaufgabe a

Berechnen Sie zunächst das magnetische Moment der Schleife:

$$\begin{aligned}\mu &= n I |\mathbf{A}| \hat{z} = (12) \cdot (3 \text{ A}) \cdot (0,40 \text{ m})^2 \cdot \hat{z} \\ &= \boxed{5,76 \text{ A} \cdot \text{m}^2 \hat{z}}\end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Das auf eine Leiterschleife wirkende Drehmoment ist durch Gleichung 26.15 gegeben:

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \mu \times \mathbf{B} \\ &= (5,76 \hat{z}) \times (0,3\hat{x} + 0,4\hat{z}) \text{ A} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{T} \\ &= \boxed{1,73 \hat{y} \text{ N} \cdot \text{m}}\end{aligned}$$

Teilaufgabe c

Die potenzielle Energie ist gleich dem negativen Skalarprodukt von μ und \mathbf{B} :

$$\begin{aligned}E_{\text{pot}} &= -\mu \cdot \mathbf{B} \\ &= -(5,76 \hat{z}) \cdot (0,3\hat{x} + 0,4\hat{z}) \text{ A} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{T} \\ &= \boxed{-2,30 \text{ J}}\end{aligned}$$

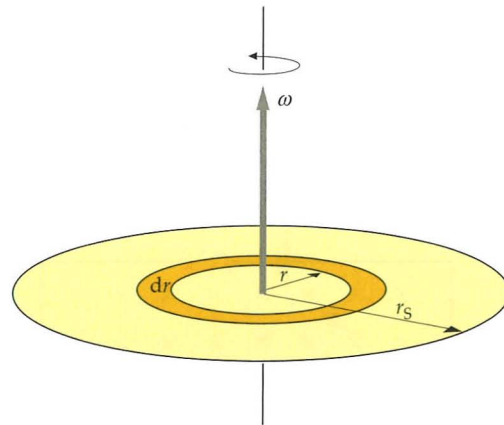
Kommentar: Wir haben folgende Beziehungen verwendet: $\hat{z} \times \hat{z} = 0$, $\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$, $\hat{z} \cdot \hat{x} = 0$ und $\hat{z} \cdot \hat{z} = 1$. Das Drehmoment zeigt in y -Richtung.

ÜBUNG: Berechnen Sie E_{pot} , wenn \mathbf{B} und μ gleich gerichtet sind. (Lösung: $E_{\text{pot}} = -\mu B = -(5,76 \text{ A} \cdot \text{m}^2) \cdot (0,5 \text{ T}) = -2,88 \text{ J}$. Wie Sie feststellen werden, ist diese Energie geringer als die in Beispiel 26.10 berechnete; in der Tat ist die potenzielle Energie minimal, wenn μ und \mathbf{B} in die gleiche Richtung zeigen.)

BEISPIEL 26.11: Magnetisches Moment einer rotierenden Scheibe

Die Oberfläche einer dünnen, aus einem nicht leitenden Material bestehenden Scheibe mit der Masse m und dem Radius r_s sei homogen geladen, die Ladungsdichte pro Flächeneinheit betrage σ . Die Scheibe drehe sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um ihre Achse. Berechnen Sie das magnetische Moment der rotierenden Scheibe.

Problembeschreibung: Wir berechnen das magnetische Moment eines Kreisrings mit dem Radius r und der Breite dr (Abbildung 26.27) und integrieren anschließend. Die Ladung auf dem Kreisring ist $dq = \sigma dA = \sigma 2\pi r dr$. Ist die Ladung positiv, so zeigt der Vektor des magnetischen Moments in die gleiche Richtung wie die Winkelgeschwindigkeit ω , die auch die Richtung des Normalenvektors \hat{n} angibt.



26.27

Lösung:

1. Das magnetische Moment des gekennzeichneten Kreisrings ist gleich dem Produkt aus dem Strom und der Fläche des Rings:

$$d\mu = (dI) A = (dI) \pi r^2$$

2. Der Strom im Kreisring ist gleich der Gesamtladung des Rings, dividiert durch die Zeit, die diese Ladung benötigt, um an einem bestimmten Punkt vorbeizulaufen. Diese Zeit ist gleich der Periode der Drehbewegung, also dem Kehrwert der Rotationsfrequenz $\nu = \omega/(2\pi)$:

$$\begin{aligned} dI &= \frac{dq}{T} = (dq) \nu = (\sigma dA) \frac{\omega}{2\pi} \\ &= (\sigma 2\pi r dr) \frac{\omega}{2\pi} = \sigma \omega r dr \end{aligned}$$

3. Setzen Sie dies in das Ergebnis aus Schritt 1 ein, um das magnetische Moment $d\mu$ des Kreisrings als Funktion von r und dr auszudrücken:

$$d\mu = (dI) \pi r^2 = (\sigma \omega r dr) \pi r^2 = \pi \sigma \omega r^3 dr$$

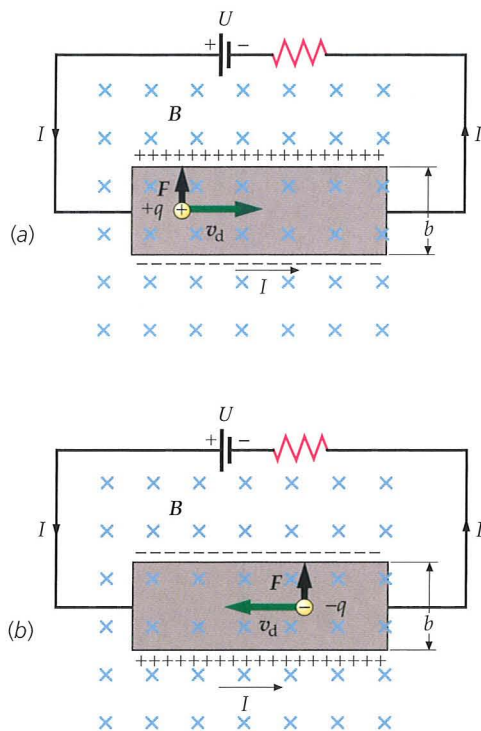
4. Integrieren Sie diesen Ausdruck in den Grenzen $r=0$ und $r=r_s$:

$$\mu = \int d\mu = \int_0^{r_s} \pi \sigma \omega r^3 dr = \frac{1}{4} \pi \sigma \omega r_s^4$$

5. Sie können das magnetische Moment nun als Vektor aufschreiben, indem Sie sich zunutze machen, dass μ für positive σ parallel zu ω ist:

$$\mu = \frac{\pi}{4} \sigma r_s^4 \omega$$

Kommentar: Betrachtet man die Gesamtladung $q = \sigma \pi r_s^2$ der Scheibe, so ist deren magnetisches Moment gegeben durch $\mu = \frac{1}{4} q r_s^2 \omega$. Der Drehimpuls der Scheibe ist $L = (\frac{1}{2} m r_s^2) \omega$. Eine allgemeinere Schreibweise für das magnetische Moment lautet deshalb $\mu = (q/(2m))L$ (siehe dazu Aufgabe 22).



26.28 Der Hall-Effekt. Das Magnetfeld zeigt in die Papierebene hinein, wie die Kreuze angeben. Wenn der Strom von links nach rechts fließt, übt das Magnetfeld eine nach oben gerichtete Kraft aus – gleichgültig, ob es sich a) um positive Ladungsträger handelt, die sich nach rechts bewegen, oder b) um negative Ladungsträger, die sich nach links bewegen.

26.4 Der Hall-Effekt

Wie wir gesehen haben, wirkt in Magnetfeldern auf bewegte Ladungen senkrecht zu ihrer Bewegungsrichtung eine Kraft. In einem stromdurchflossenen Leiter „schiebt“ diese Kraft die Ladungsträger auf eine Seite des Leiters, und es kommt zu einer Ladungstrennung. Dieses Phänomen nennt man **Hall-Effekt**. Man kann den Hall-Effekt ausnutzen, um das Vorzeichen und die Anzahldichte n der Ladungsträger in einem Leiter zu bestimmen oder auch um Magnetfeldstärken zu messen.

In Abbildung 26.28 sehen Sie zwei aus einem leitfähigen Material bestehende Streifen, die jeweils von links nach rechts von einem Strom I durchflossen werden (die linke Seite jedes Streifens ist mit dem positiven, die rechte mit dem negativen Pol einer Spannungsquelle verbunden). Die Streifen sind von einem Magnetfeld umgeben, das in die Papierebene hineinzeigt. Nehmen wir zunächst an, es handelt sich um positive Ladungsträger, die sich nach rechts bewegen (Abbildung 26.28a). Auf diese Teilchen wirkt die magnetische Kraft $q \mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$ (\mathbf{v}_d ist die Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger), die nach oben zeigt. Die positiv geladenen Teilchen bewegen sich deshalb in Richtung des oberen Rands des Streifens, im Bereich des unteren Rands verbleibt ein Überschuss an negativen Ladungen. Infolge dieser Ladungstrennung entsteht im Streifen ein elektrisches Feld, das auf die Ladungsträger eine Kraft ausübt, die der magnetischen Kraft entgegengesetzt gerichtet ist. Gleichen sich die Kräfte gerade aus, dann hört die Aufwärtsbewegung der Ladungsträger auf. Weil das elektrische Feld in Richtung abnehmenden Potentials zeigt, befindet sich in diesem Moment der obere Rand des Streifens auf höherem Potential als der untere. Diese Potentialdifferenz kann man mit einem empfindlichen Voltmeter messen.

Negative Ladungsträger (Abbildung 26.28b) hingegen müssen sich im Leiter nach links bewegen (da der Strom wieder von links nach rechts fließen soll). Die magnetische Kraft $q \mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$ zeigt auch in diesem Fall nach oben (sowohl q als auch \mathbf{v}_d haben das Vorzeichen geändert). Die Ladungsträger bewegen sich wie zuvor zum oberen Rand; dort sammelt sich nun aber ein Überschuss negativer Ladung an, während der untere Rand positiv geladen zurückbleibt.

Eine Messung des Vorzeichens der Potentialdifferenz zwischen oberem und unterem Rand des Streifens führt also unmittelbar zum Vorzeichen der Ladungsträger. In Halbleitern können negativ geladene Elektronen oder positiv geladene Löcher als Ladungsträger fungieren. Mit der beschriebenen Messung kann man dann feststellen, welcher Mechanismus des Ladungstransports in einem bestimmten Halbleiter überwiegt. Besteht der Streifen aus einem normalen metallischen Leiter, so findet man für den oberen Rand des Streifens in Abbildung 26.28b ein niedrigeres Potential als für den unteren Rand, was bedeutet, dass der obere Rand eine negative Überschussladung aufweisen muss. Experimente dieser Art führten historisch zu dem Schluss, dass negative Ladungsträger für die Leitfähigkeit typischer Metalle verantwortlich sind. Abbildung 26.28b gibt diese Situation korrekt wieder.

Die Potentialdifferenz zwischen dem oberen und dem unteren Rand des Streifens nennt man **Hall-Spannung**. Ihren Wert können wir als Funktion der Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger angeben. Das Magnetfeld übt auf die Ladungsträger im Streifen eine Kraft $q \mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$ aus. Diese Kraft wird kompensiert

BEISPIEL 26.12: Dichte der Ladungsträger in Silber

Eine 1 mm dicke und 1,5 cm breite Silberplatte, die von einem Strom $I = 2,5$ A durchflossen wird, ist umgeben von einem senkrecht zur Platte orientierten homogenen Magnetfeld mit einer Stärke von 1,25 T. Es wird eine Hall-Spannung von $-0,334$ μ V gemessen. a) Berechnen Sie die Anzahldichte der Ladungsträger in der Platte. b) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis aus Teilaufgabe a mit der Anzahldichte der Silberatome in der Platte. Silber hat die Dichte $\rho = 10,5$ g/cm³ und die molare Masse $m_{\text{Mol}} = 107,9$ g/mol.

Lösung:

1. Zur Berechnung von n/V setzen Sie alle Zahlenwerte in Gleichung 26.19 ein:

$$\begin{aligned} n/V &= -\frac{IB}{deU_H} = \frac{(2,5 \text{ A}) \cdot (1,25 \text{ T})}{(0,001 \text{ m}) \cdot (1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}) \cdot (3,34 \cdot 10^{-7} \text{ V})} \\ &= \boxed{5,85 \cdot 10^{28} \text{ Elektronen/m}^3} \end{aligned}$$

2. Die Dichte der Silberatome ist gleich $\rho n_A / m_{\text{Mol}}$:

$$\begin{aligned} n/V &= \rho \frac{n_A}{m_{\text{Mol}}} = (10,5 \text{ g/cm}^3) \cdot \frac{6,02 \cdot 10^{23} \text{ Atome/mol}}{107,9 \text{ g/mol}} \\ &= \boxed{5,86 \cdot 10^{22} \text{ Atome/cm}^3 = 5,86 \cdot 10^{28} \text{ Atome/m}^3} \end{aligned}$$

Kommentar: Ein Vergleich der beiden Resultate zeigt, dass in Silber pro Atom ungefähr ein Ladungsträger enthalten ist.

durch die elektrostatische Kraft $-qE_H$, wobei E_H das elektrische Feld ist, das durch die Ladungstrennung im Leiter entsteht. Wir schreiben also für den Gleichgewichtszustand $E_H = v_d B$. Ist die Breite des Streifens gleich b , so beträgt die Potentialdifferenz $E_H b$ und für die Hall-Spannung erhalten wir

$$U_H = E_H b = v_d B b. \quad (26.17)$$

Die Anzahldichte kann nicht negativ sein, also ist die Hall-Spannung hier so definiert, dass sie für negative Ladungsträger negativ ist, für positive Ladungsträger aber positiv. In Beispiel 26.12 werden aus einer negativen Hall-Spannung die Anzahldichten der Silberatome und der Ladungsträger berechnet.

ÜBUNG: Ein 2 cm breiter Streifen, der aus einem leitfähigen Material besteht, wird in ein Magnetfeld von 0,8 T gebracht. Die gemessene Hall-Spannung beträgt 0,64 μ V. Berechnen Sie die Driftgeschwindigkeit der Elektronen. (Lösung: $4,0 \cdot 10^{-5}$ m/s.)

In normalen Leitern ist die Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger sehr klein. Für Streifen mit gewöhnlichen Abmessungen und Magnetfeldstärken im Bereich von 1 T ist deshalb, wie aus der obigen Gleichung 26.17 ersichtlich, auch die Hall-Spannung sehr klein. Aus Messungen der Hall-Spannung eines Streifens mit gegebenen Abmessungen können wir die Anzahldichte n/V (Anzahl pro Volumeneinheit) der Ladungsträger im Leiter berechnen. Gleichung 25.3 liefert den Strom,

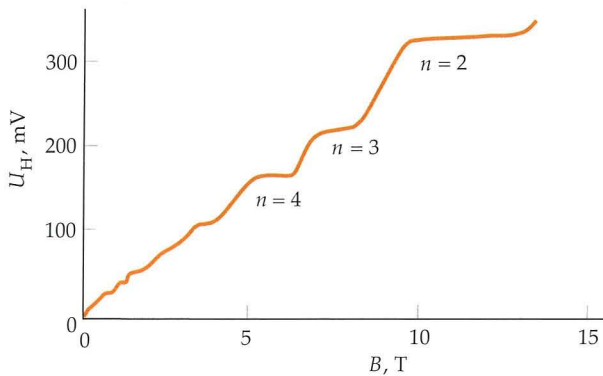
$$I = (n/V) q v_d A,$$

mit A als Querschnittsfläche des Streifens. Für einen Streifen mit der Breite b und der Dicke d ist $A = b d$. Die Ladungsträger sind Elektronen, für q setzen wir deshalb $-e$ ein. Die Anzahldichte n der Ladungsträger ist dann

$$n/V = \frac{I}{A q v_d} = -\frac{I}{b d e v_d}. \quad (26.18)$$

Wir setzen gemäß Gleichung 26.17 U_H/b für v_d ein und erhalten

$$n/V = -\frac{IB}{deU_H}. \quad (26.19)$$



26.29 Trägt man die Hall-Spannung als Funktion des angelegten Magnetfelds auf, so steigt der Graph nicht geradlinig, sondern in Stufen an: Die Hall-Spannung ist gequantelt. Die Messung fand bei einer Temperatur von 1,39 K und einer konstanten Stromstärke von 25,52 μA statt.

Die Hall-Spannung bietet einen bequemen Weg zur Messung von Magnetfeldern. Dazu stellen wir Gleichung 26.19 um:

$$U_H = -\frac{I}{(n/V)de}B. \quad (26.20)$$

Zu Beginn des Versuchs eicht man einen Metallstreifen durch Messung der Hall-Spannung bei gegebener Stromstärke in einem bekannten Magnetfeld. Anschließend bringt man den Streifen in ein unbekanntes Magnetfeld, misst die Hall-Spannung, wenn ein gegebener Strom fließt, und berechnet daraus die Stärke des Magnetfelds.

Der Quanten-Hall-Effekt *

Gemäß Gleichung 26.20 sollte die Hall-Spannung für einen gegebenen Leiterstreifen, in dem ein gegebener Strom fließt, linear von der Stärke des Magnetfelds abhängen. 1980 untersuchte der deutsche Physiker Klaus von Klitzing den Hall-Effekt in Halbleitern bei sehr tiefen Temperaturen in extrem starken Magnetfeldern und erhielt das überraschende Ergebnis, dass der lineare Zusammenhang unter diesen Bedingungen nicht mehr gilt. Im Graphen von U_H als Funktion von B erkennt man eine Reihe von Plateaus: Die Hall-Spannung kann nur bestimmte Werte annehmen, sie ist gequantelt (Abbildung 26.29). Für die Entdeckung dieses so genannten ganzzahligen Quanten-Hall-Effekts wurde von Klitzing 1985 mit dem Nobelpreis ausgezeichnet.

Die Theorie des ganzzahligen Quanten-Hall-Effekts sagt aus, dass der Hall-Widerstand, definiert als $R_H = U_H/I$, nur die Werte

$$R_H = \frac{U_H}{I} = \frac{R_K}{n} \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots \quad (26.21)$$

annehmen kann; n ist eine ganze Zahl und R_K die **Klitzing-Konstante**, die mit der Elementarladung e und der Planck'schen Konstante h wie folgt verknüpft ist:

$$R_K = \frac{h}{e^2}. \quad (26.22)$$

Da die Klitzing-Konstante bis auf wenige Millardstel genau gemessen werden kann, wurde ausgehend vom Quanten-Hall-Effekt ein Standard für den Widerstand festgelegt: Seit Januar 1990 ist das **Ohm** so definiert, dass die Klitzing-Konstante $R_{K(90)}$ den Wert

$$R_{K(90)} = 25\,812,807 \, \Omega \text{ (exakt)} \quad (26.23)$$

hat. $R_{K(90)}$ ist ein gerundeter, in internationaler Übereinkunft festgelegter Wert. Er weicht nur sehr wenig von R_K ab; gegenwärtig rechnet man mit $R_K = (25\,812,807\,572 \pm 0,000\,095) \, \Omega$.

1982 wurde experimentell beobachtet, dass die Hall-Spannung in bestimmten Fällen durch Gleichung 26.21 gegeben ist, wenn n diskreten rationalen Brüchen aus kleinen ganzen Zahlen entspricht. Für die Entdeckung und Erklärung dieses so genannten fraktionalen Quanten-Hall-Effekts erhielten die Amerikaner Laughlin, Stormer und Tsui 1998 den Nobelpreis.

Zusammenfassung

1. Magnetfelder üben auf bewegte Ladungen eine senkrecht zur Bewegungsrichtung orientierte Kraft aus.
2. Die magnetische Kraft ist ein Teil der elektromagnetischen Wechselwirkung, einer der vier grundlegenden Wechselwirkungsarten in der Natur.
3. Betrag und Richtung eines Magnetfelds \mathbf{B} sind definiert durch die Kraft $\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, die das Magnetfeld auf eine bewegte Ladung ausübt.

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
1. Magnetische Kraft	
Auf eine bewegte Ladung	$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ (26.1)
Auf ein Stromelement	$d\mathbf{F} = I d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}$ (26.5)
Einheit der Magnetfeldstärke	Die SI-Einheit der Magnetfeldstärke ist das Tesla (T). Häufig verwendet wird auch die Einheit Gauß (G) mit $1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$. (26.3)
2. Bewegung von Punktladungen	Ein Teilchen mit der Masse m und der Ladung q , das sich mit der Geschwindigkeit v in einer Ebene senkrecht zur Richtung eines homogenen Magnetfelds bewegt, beschreibt eine Kreisbahn. Periode und Frequenz der Kreisbewegung hängen weder vom Radius der Bahn noch von der Geschwindigkeit des Teilchens ab.
Bewegung auf Kreisbahn	$\frac{q}{m} v B = \frac{v^2}{r}$ (26.6)
Zyklotronperiode	$T = \frac{2\pi m}{ q\mathbf{B} }$ (26.7)
Zyklotronfrequenz	$\nu = \frac{1}{T} = \frac{ q\mathbf{B} }{2\pi m}$ (26.8)
Geschwindigkeitsfilter*	Ein Geschwindigkeitsfilter besteht aus einem elektrischen und einem magnetischen Feld, die aufeinander senkrecht stehen (gekreuzte Felder) und deren Kraftwirkung sich für ein Teilchen mit der Geschwindigkeit v kompensiert: $ \mathbf{E} = v \mathbf{B} $. (26.9)
Thomsons Versuch zur Bestimmung von q/m *	Die Ablenkung eines geladenen Teilchens in einem elektrischen Feld hängt von der Geschwindigkeit des Teilchens ab und ist proportional zu dessen Ladung-Masse-Verhältnis q/m . J. J. Thomson legte die Geschwindigkeit von Teilchen aus Kathodenstrahlen mit Hilfe gekreuzter Felder fest und ermittelte q/m durch anschließende Ablenkung der Teilchen in einem elektrischen Feld. Er wies nach, dass alle Kathodenstrahlen aus Teilchen mit einem bestimmten Ladung-Masse-Verhältnis bestehen. Wir nennen diese Teilchen Elektronen.
Massenspektrometer*	Das Ladung-Masse-Verhältnis q/m eines Ions mit bekannter Geschwindigkeit kann durch Messung des Radius der Kreisbahn bestimmt werden, auf der sich das Ion in einem Magnetfeld bekannter Stärke bewegt.
3. Leiterschleifen	
Magnetisches Dipolmoment	$\boldsymbol{\mu} = n I \mathbf{A}$ (26.14)
Drehmoment	$\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$ (26.15)

Potenzielle Energie eines magnetischen Dipols	$E_{\text{pot}} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}$	(26.16)
---	---	---------

Resultierende Kraft	Die resultierende Kraft auf eine Leiterschleife in einem <i>homogenen</i> Magnetfeld ist null.
---------------------	--

4. Der Hall-Effekt

Ist ein stromdurchflossener Leiter von einem Magnetfeld umgeben, so führt die auf die Ladungsträger wirkende magnetische Kraft zu einer Ladungstrennung. Dieses Phänomen heißt Hall-Effekt. Die Ladungstrennung erzeugt eine Potenzialdifferenz U_H , die Hall-Spannung. Aus der Messung des Vorzeichens der Hall-Spannung lässt sich das Vorzeichen der Ladungsträger in einem Leiter bestimmen, und aus dem Betrag von U_H kann die Anzahl der Ladungsträger pro Volumeneinheit berechnet werden.

Hall-Spannung	$U_H = E_H b = v_d B b = -\frac{I}{(n/V) d e} B$	(26.17, 26.20)
---------------	--	----------------

Quanten-Hall-Effekte *	Messungen bei sehr tiefen Temperaturen in extrem starken Magnetfeldern ergaben, dass der Hall-Widerstand $R_H = U_H/I$ gequantelt ist und nur folgende Werte annehmen kann:
------------------------	---

$$R_H = \frac{U_H}{I} = \frac{R_K}{n} \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots \quad (26.21)$$

Definition des Ohm *	$R_{K(90)} = 25\,812,807 \, \Omega$ (exakt)	(26.23)
----------------------	---	---------

$R_{K(90)}$ ist ein international festgelegter Rundungswert der Klitzing-Konstante R_K .

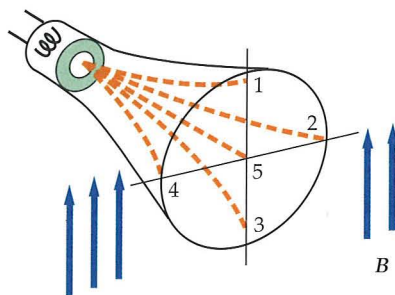
Aufgaben

Gelegentlich enthalten die Aufgaben mehr Angaben, als für die Lösung erforderlich sind. Bei einigen anderen dagegen werden Daten aus dem Allgemeinwissen, aus anderen Quellen oder sinnvolle Schätzungen benötigt.

- Einfache Aufgaben mit nur einem Rechenschritt.
- Mittelschwere Aufgaben, können die Kombination verschiedener Konzepte erfordern.
- Anspruchsvolle Aufgaben.

Verständnisaufgaben

26.1 • Eine Kathodenstrahlröhre befinde sich waagrecht in einem Magnetfeld, dessen Vektor senkrecht nach oben zeigt (Abbildung 26.30). Auf welcher der gestrichelt eingezeichneten Bahnen bewegen sich die von der Kathode emittierten Elektronen? a) Bahn 1, b) Bahn 2, c) Bahn 3, d) Bahn 4, e) Bahn 5.



26.30 Zu Aufgabe 26.1.

26.2 • Richtig oder falsch? Durch die magnetische Kraft wird ein geladenes Teilchen nicht beschleunigt, weil die Kraft senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor des Teilchens wirkt.

26.3 • Ein Strahl positiv geladener Teilchen passiert, ohne abgelenkt zu werden, von links nach rechts ein Geschwindigkeitsfilter, dessen elektrisches Feld nach oben zeigt. Anschließend wird die Strahlrichtung umgekehrt (von rechts nach links). Wird der Strahl jetzt abgelenkt? Wenn ja, in welche Richtung?

26.4 • Wie muss eine stromdurchflossene Leiterschleife relativ zu einem Magnetfeld ausgerichtet sein, damit das auf sie wirkende Drehmoment maximal ist?

26.5 • Ein positiv geladenes Teilchen bewegt sich in einem Magnetfeld nach Norden. Der Vektor der auf das Teilchen wirkenden magnetischen Kraft zeigt nordostwärts. Ist das Magnetfeld a) nach oben, b) nach Westen, c) nach Süden, d) nach unten gerichtet, oder e) kann die Kraft gar nicht nach Nordosten zeigen?

26.6 • Vergleichen Sie elektrische und magnetische Feldlinien. Erläutern Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede.

Schätzungs- und Näherungsaufgaben

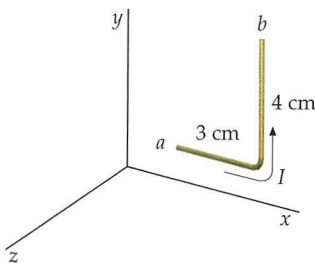
26.7 •• a) Wie groß muss das Ladung-Masse-Verhältnis eines Mikrometeoriten sein, damit der Einfluss des Erdmagnetfelds ausreicht, um das Körnchen auf einer erdnahen Umlaufbahn (in 400 km Höhe über der Oberfläche) zu halten? Die Feldstärke des Erdmagnetfelds sei (näherungsweise) $5 \cdot 10^{-5}$ T, die Geschwindigkeit sei senkrecht zur Feldrichtung orientiert und ihr Betrag entspreche der Bahngeschwindigkeit der Erde (30 km/s). b) Berechnen Sie die Ladung des Mikrometeoriten, wenn seine Masse gleich $3 \cdot 10^{-10}$ kg ist.

Die magnetische Kraft

26.8 • Eine Ladung $q = -3,64$ nC bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von $2,75 \cdot 10^6 \hat{x}$ m/s. Berechnen Sie die Kraft, die folgende Magnetfelder auf das Teilchen ausüben: a) $\mathbf{B} = 0,38 \hat{y}$ T, b) $\mathbf{B} = (0,75 \hat{x} + 0,75 \hat{y})$ T, c) $\mathbf{B} = 0,65 \hat{x}$ T und d) $\mathbf{B} = (0,75 \hat{x} + 0,75 \hat{z})$ T.

26.9 • Ein gerader Leiterabschnitt mit $I\ell = (2,7 \text{ A}) \times (3\hat{x} + 4\hat{y})$ cm wird von einem homogenen Magnetfeld $\mathbf{B} = 1,3\hat{x}$ T umgeben. Berechnen Sie die auf den Leiter wirkende Kraft.

26.10 •• Durch den in Abbildung 26.31 skizzierten Leiterabschnitt fließt von a nach b ein Strom von 1,8 A. Den Leiter umgibt ein Magnetfeld $\mathbf{B} = 1,2\hat{z}$ T. Berechnen Sie die insgesamt auf den Leiter wirkende Kraft und zeigen Sie, dass sich die gleiche Kraft für einen Leiter ergibt, der geradlinig von a nach b verläuft.



26.31 Zu Aufgabe 26.10.

26.11 ••• Durch einen in beliebiger Form gebogenen, in einem homogenen Magnetfeld \mathbf{B} befindlichen Draht fließt ein Strom I . Zeigen Sie explizit, dass die Kraft auf einen Abschnitt des Drahts, der von den Punkten a und b begrenzt wird, gegeben ist durch $\mathbf{F} = I\ell \times \mathbf{B}$; ℓ ist ein Vektor, der von Punkt a nach Punkt b zeigt.

Die Bewegung einer Punktladung in einem Magnetfeld

26.12 • Ein von der Sonne kommendes Elektron tritt mit einer Geschwindigkeit von $1 \cdot 10^7$ m/s hoch über dem Äquator in das Erdmagnetfeld ein, dessen Stärke dort $4 \cdot 10^{-7}$ T beträgt. Das Elektron bewegt sich anschließend auf einer nahezu kreisförmigen Bahn, abgesehen von einer geringfügigen Drift in Richtung der Magnetfeldlinien nach Norden. a) Geben Sie den Radius

der Kreisbahn an. b) Wie groß wäre dieser Radius in der Nähe des Nordpols, wo das Magnetfeld $2 \cdot 10^{-7}$ T stark ist?

26.13 •• Protonen und Deuteronen (jeweils mit der Ladung $+e$) sowie Alphateilchen (mit der Ladung $+2e$) gleicher kinetischer Energie treten in ein homogenes Magnetfeld \mathbf{B} ein, das senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor der Teilchen steht. Die Bahnradien bezeichnen wir mit r_p , r_D und r_α . Berechnen Sie die Verhältnisse r_D/r_p und r_α/r_p für $m_\alpha = 2m_D = 4m_p$.

26.14 •• Ein Teilchenstrahl mit der Geschwindigkeit v trete in ein homogenes Magnetfeld \mathbf{B} ein, das einen kleinen Winkel θ mit v einschließt. Nachdem sich das Teilchen eine Strecke $2\pi(m/|q\mathbf{B}|)v \cos \theta$ weit bewegt hat (gemessen entlang der Richtung von \mathbf{B}), zeigt sein Geschwindigkeitsvektor in dieselbe Richtung wie beim Eintritt in das Feld. Zeigen Sie dies.

Das Geschwindigkeitsfilter

26.15 • Ein Geschwindigkeitsfilter arbeite mit einem 0,28 T starken Magnetfeld senkrecht zu einem 0,46 MV/m starken elektrischen Feld. a) Wie schnell muss sich ein Teilchen bewegen, um das Filter ohne Ablenkung zu durchqueren? b) Protonen und c) Elektronen welcher Energie können das Filter unabgelenkt durchqueren?

Thomsons Messung von q/m für Elektronen; das Massenspektrometer

26.16 •• Es gibt zwei stabile Chlorisotope, ^{35}Cl und ^{37}Cl , deren natürliche Häufigkeit 76% bzw. 24% ist. Eine natürliche Mischung einfach ionisierter Chlormoleküle in der Gasphase soll mit Hilfe eines Massenspektrometers in die Isotopenanteile getrennt werden. Das Spektrometer arbeitet mit einer Magnetfeldstärke von 1,2 T. Welche Beschleunigungsspannung muss mindestens anliegen, damit die räumliche Trennung der Isotopen 1,4 cm beträgt?

Das Zyklotron

26.17 •• Ein Zyklotron zur Beschleunigung von Protonen arbeite mit einem Magnetfeld von 1,4 T und habe einen Radius von 0,7 m. a) Geben Sie die Zyklotronfrequenz an. b) Berechnen Sie die maximale Energie der Protonen beim Austritt aus dem Zyklotron. c) Wie ändern sich Ihre Antworten, wenn Sie Deuteronen anstelle von Protonen betrachten? Deuteronen haben die gleiche Ladung wie Protonen, ihre Masse ist jedoch doppelt so groß.

26.18 •• Zeigen Sie: Der Bahnradius eines geladenen Teilchens in einem Zyklotron ist proportional zur Wurzel aus der Anzahl der absolvierten Umläufe.

Das auf Leiterschleifen und Magnete ausgeübte Drehmoment

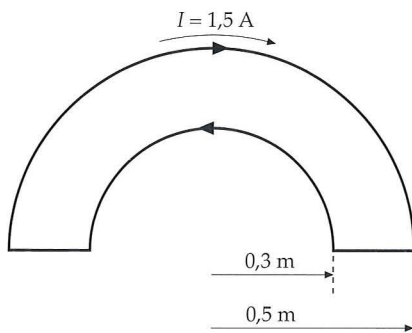
26.19 • Ein elektrischer Leiter hat die Form eines Quadrats mit der Seitenlänge $\ell = 6$ cm und liegt in der x - y -Ebene. Durch den Leiter fließt ein Strom $I = 2,5$ A, es herrscht ein äußeres homogenes Magnetfeld mit einer Stärke von 0,3 T.

Geben Sie den Betrag des Drehmoments an, das auf den Leiter wirkt, wenn das Magnetfeld a) in z -Richtung und b) in x -Richtung zeigt.

26.20 • Wiederholen Sie Aufgabe 19 für einen Leiter in Form eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $\ell = 8$ cm.

Magnetische Momente

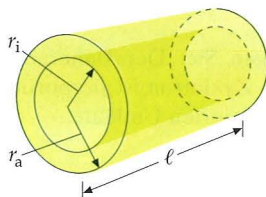
26.21 •• Eine Leiterschleife besteht aus zwei Halbkreisbögen, verbunden durch gerade Abschnitte (Abbildung 26.32). Der innere Radius ist 0,3 m, der äußere 0,5 m. Durch die Schleife fließt (im äußeren Bogen in Uhrzeigerrichtung) ein Strom $I = 1,5$ A. Geben Sie das magnetische Moment der Leiterschleife an.



26.32 Zu Aufgabe 26.21.

26.22 •• Ein Teilchen mit der Ladung q und der Masse m bewegt sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω auf einer Kreisbahn mit dem Radius r . a) Zeigen Sie, dass der Mittelwert des Stroms gegeben ist durch $I = q\omega/(2\pi)$ und dass der Betrag des magnetischen Moments $\mu = \frac{1}{2} q \omega r^2$ ist. b) Zeigen Sie, dass der Betrag des Drehimpulses $L = m r^2 \omega$ ist und dass die Beziehung zwischen den Vektoren des magnetischen Moments und des Drehimpulses $\boldsymbol{\mu} = (\frac{1}{2} q/m) \mathbf{L}$ lautet.

26.23 ••• Gegeben ist ein Hohlzylinder mit der Länge ℓ , dem Außenradius r_a und dem Innenradius r_i (Abbildung 26.33), der sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um seine Längsachse dreht. Auf dem Zylinder herrscht eine homogene Ladungsdichte ρ . Leiten Sie einen Ausdruck für das magnetische Moment des Zylinders als Funktion von ω her.

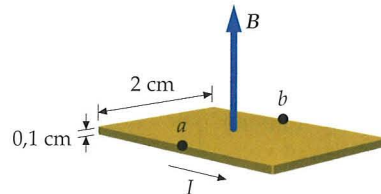


26.33 Zu Aufgabe 26.23.

26.24 ••• An der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius r herrscht eine homogene Ladungsdichte ρ . Die Kugel rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω um ihren Durchmesser. Geben Sie das magnetische Moment der rotierenden Kugel an.

Der Hall-Effekt

26.25 • Ein 2 cm breiter und 0,1 cm dicker Metallstreifen wird von einem Strom mit einer Stärke von 20 A durchflossen und befindet sich in einem homogenen Magnetfeld von 2 T (Abbildung 26.34). Es wird eine Hall-Spannung von $4,27 \mu\text{V}$ gemessen. Berechnen Sie a) die Driftgeschwindigkeit der Elektronen und b) die Anzahldichte der Ladungsträger im Leiter. c) Befindet sich Punkt a oder Punkt b auf höherem Potenzial?



26.34 Zu Aufgabe 26.25.

26.26 •• Blut enthält geladene Teilchen (Ionen), so dass fließendes Blut eine Hall-Spannung über dem Durchmesser einer Ader hervorrufen kann. Die Fließgeschwindigkeit des Bluts in einer großen Arterie mit einem Durchmesser von 0,85 cm sei 0,6 m/s. Ein Abschnitt der Arterie befindet sich in einem Magnetfeld von 0,2 T. Welche Potenzialdifferenz baut sich dort maximal über dem Durchmesser der Ader auf?

26.27 •• Der Hall-Koeffizient R ist definiert gemäß $R = E_y/(j_x B_z)$ mit j_x als Strom pro Flächeneinheit der Platte in x -Richtung, B_z als Stärke des Magnetfelds in z -Richtung und E_y als resultierendes Hall-Feld in y -Richtung. Zeigen Sie, dass der Hall-Koeffizient gleich $1/((n/V)q)$ ist (q ist die Ladung pro Ladungsträger, für Elektronen $-1,6 \cdot 10^{-19}$ C). (Die Hall-Koeffizienten einwertiger Metalle wie Kupfer, Silber und Natrium sind folglich negativ.)

Allgemeine Aufgaben

26.28 • Ein Alphateilchen (Ladung $+2e$) bewegt sich in einem Magnetfeld von 1 T auf einer Kreisbahn mit einem Radius von 0,5 m. Berechnen Sie a) die Periode, b) den Betrag der Geschwindigkeit und c) die kinetische Energie des Teilchens (in Elektronenvolt). Für die Masse des Teilchens setzen Sie $m = 6,65 \cdot 10^{-27}$ kg ein.

26.29 •• Ein langer, dünner Stabmagnet mit dem magnetischen Moment $\boldsymbol{\mu}$ parallel zu seiner Längsachse ist in der Mitte reibungsfrei gelagert und wird als Kompassnadel verwendet. In einem horizontal orientierten Magnetfeld \mathbf{B} richtet sich die Nadel an den Feldlinien aus. Zeigen Sie, dass die Nadel nach einer Auslenkung um den Winkel θ mit der Frequenz $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{|\boldsymbol{\mu}| |\mathbf{B}| / I}$ um ihre Gleichgewichtslage schwingt! I ist das Trägheitsmoment bezüglich des Lagers.

26.30 •• Ein leitfähiger Draht ist parallel zur x -Achse ausgerichtet und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 20 m/s in positiver x -Richtung. Die Anordnung befindet sich in einem Magnetfeld $\mathbf{B} = 0,5 \hat{z}$ T. a) Geben Sie Betrag und Richtung der magnetischen Kraft an, die auf ein Elektron in diesem Leiter wirkt. b) Durch die magnetische Kraft bewegen sich die Elektronen so lange zu einem Ende des Drahts (wodurch das andere

Ende eine positive Ladung erhält), bis die Kraft des durch die Ladungstrennung erzeugten elektrischen Felds die magnetische Kraft kompensiert. Berechnen Sie Betrag und Richtung dieses elektrischen Felds im stationären Zustand. c) Der bewegte Leiter sei 2 m lang. Welche Potenzialdifferenz baut sich durch das in b berechnete elektrische Feld zwischen den Enden des Leiters auf?

26.31 ••• Das magnetische Moment μ eines kleinen Stabmagneten schließe einen Winkel θ mit der x -Achse ein. Der

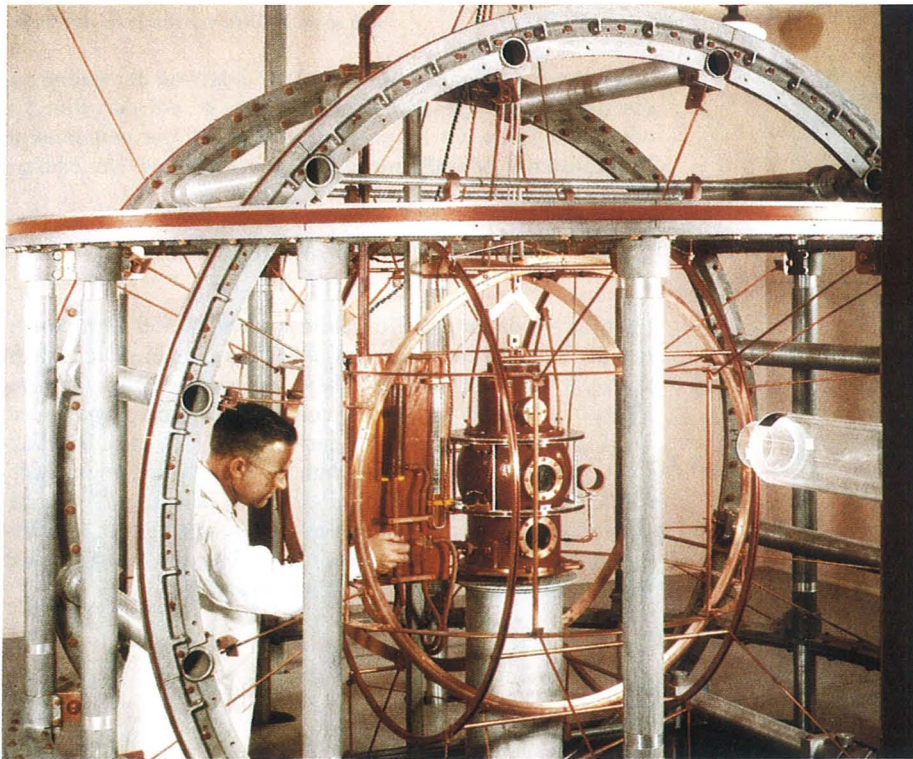
Magnet befinde sich in einem inhomogenen Magnetfeld $\mathbf{B} = B_x(x)\hat{\mathbf{x}} + B_y(y)\hat{\mathbf{y}}$. Zeigen Sie, dass auf den Magneten die resultierende Kraft

$$\mathbf{F} = \mu_x \frac{\partial B_x}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \mu_y \frac{\partial B_y}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} \quad (25.61)$$

wirkt. Verwenden Sie die Beziehungen $F_x = -dE_{\text{pot}}/dx$ und $F_y = -dE_{\text{pot}}/dy$.

Quellen des Magnetfelds

27



Diese großen Spulen im Kettering Magnetics Laboratory der Oakland University werden Helmholtz-Spulen genannt. Sie dienen zum Ausgleich des Magnetfelds der Erde und zur Erzeugung eines homogenen Magnetfelds in einem kleinen Raumbereich, in dem magnetische Eigenschaften der Materie untersucht werden.

? Welche Form nimmt das Magnetfeld einer Strom führenden Spule Ihrer Meinung nach an? Magnetfelder von Spulen werden in Abschnitt 27.2 behandelt.

27.1 Das Magnetfeld bewegter Punktladungen

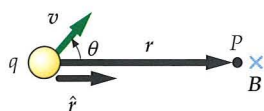
27.2 Das Magnetfeld von Strömen:
Das Biot-Savart'sche Gesetz

27.3 Der Gauß'sche Satz für Magnetfelder

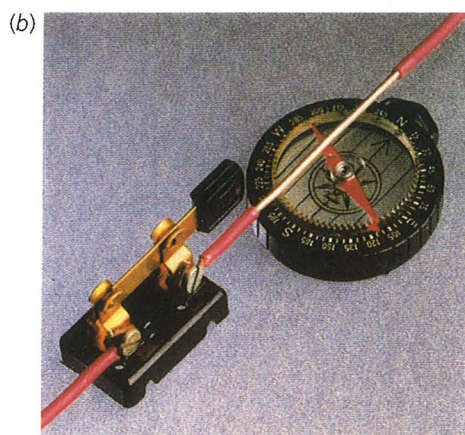
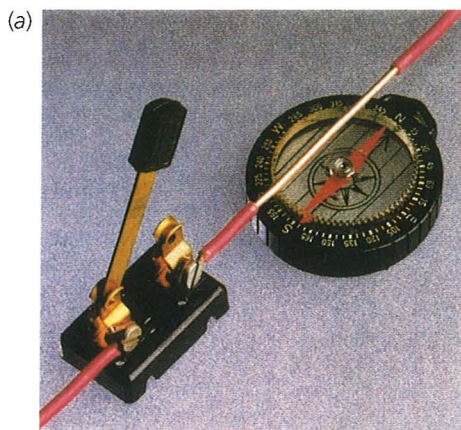
27.4 Das Ampère'sche Gesetz

27.5 Magnetismus in Materie

Die ersten bekannten Quellen von Magnetfeldern waren Permanentmagnete. Dass eine Kompassnadel von einem elektrischen Strom abgelenkt wird, entdeckte Hans Christian Ørsted 1820; einen Monat später berichteten Jean-Baptiste Biot und Félix Savart über ihre Messungen des Drehmoments, das ein Magnet in der Nähe eines langen, Strom führenden Drahts erfährt. Ihre Ergebnisse analysierten sie anhand des von jedem einzelnen Stromelement erzeugten Magnetfelds. André-Marie Ampère ging einen Schritt weiter, indem er zeigte, dass umgekehrt auch auf Stromelemente in Anwesenheit eines Magnetfelds eine Kraft wirkt und dass zwei Ströme aufeinander eine Kraft ausüben.



27.1 Eine positive, sich mit der Geschwindigkeit v bewegende Punktladung q erzeugt ein Magnetfeld B in einem Punkt P des Felds, der in Richtung von $v \times \hat{r}$ liegt. Dabei ist \hat{r} der Einheitsvektor, der von der Ladung nach P zeigt. Das Feld ändert sich umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands zwischen Ladung und P und ist proportional zum Sinus des Winkels zwischen v und \hat{r} . (Das blaue Kreuz neben P soll andeuten, dass das Feld in die Papierebene hineinzeigt.)



Das Experiment von Ørsted zum Nachweis des Magnetfelds bei einem Strom führenden Leiter. a) Wenn kein Strom durch den Draht fließt, zeigt die Kompassnadel nach Norden. b) Führt der Draht einen Strom, so wird die Nadel in Richtung des aufgebauten Magnetfelds abgelenkt. Im gezeigten Fall fließt der Strom von links unten nach rechts oben. Um den Draht in der Aufnahme deutlicher sichtbar zu machen, wurde die Isolierung entfernt.

➤ In diesem Kapitel betrachten wir zunächst das von einer einzelnen bewegten Ladung und von bewegten Ladungen in einem Stromelement erzeugte Magnetfeld. Dann berechnen wir, welche Magnetfelder von einigen allgemeinen Strom führenden Anordnungen bewirkt werden: einem geraden Leiterabschnitt, einem langen, geraden Draht, einer Leiterschleife und einer Zylinderspule. Im Anschluss diskutieren wir das Ampère'sche Gesetz, das den Zusammenhang zwischen dem Linienintegral des Magnetfelds um eine geschlossene Leiterschleife und dem insgesamt in der Schleife fließenden Strom herstellt. Abschließend besprechen wir magnetische Eigenschaften der Materie.

27.1 Das Magnetfeld bewegter Punktladungen

Eine Punktladung q , die sich mit der Geschwindigkeit v bewegt ($v \ll c$ vorausgesetzt), erzeugt im Raum ein Magnetfeld B , das senkrecht zu v und dem Einheitsvektor \hat{r} steht:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{r^2} v \times \hat{r}. \quad (27.1)$$

MAGNETFELD EINER BEWEGTEN PUNKTLADUNG

Der Einheitsvektor \hat{r} (Abbildung 27.1) zeigt von der Ladung q , die sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, auf den Punkt P des Felds; μ_0 ist ein Proportionalitätsfaktor, die **magnetische Feldkonstante** oder **Permeabilität des Vakuums**. Ihr exakter Wert ist

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2. \quad (27.2)$$

(Achten Sie darauf, die Konstante μ_0 nicht mit der Komponente μ des magnetischen Moments μ zu verwechseln.) Die Einheit von μ_0 bewirkt, dass B die Einheit Tesla erhält, wenn q in Coulomb, v in Metern pro Sekunde und r in Metern angegeben ist. Die Einheit N/A^2 ergibt sich wegen $1 \text{ T} = 1 \text{ N}/(\text{A} \cdot \text{m})$. Den Faktor $1/(4\pi)$ haben wir in Gleichung 27.1 als Konvention eingeführt, damit im Ampère'schen Gesetz (Gleichung 27.15), das wir in Abschnitt 27.4 besprechen wollen, der Faktor 4π nicht auftaucht. Beispiel 27.1 verdeutlicht, dass die Magnetfelder bewegter Punktladungen sehr schwach sind.

27.2 Das Magnetfeld von Strömen: Das Biot-Savart'sche Gesetz

Im vorangehenden Kapitel haben wir unsere Diskussion von Kräften, die auf Punktladungen wirken, auf Kräfte erweitert, die auf Stromelemente wirken. Dazu wurde qv durch das Stromelement $I d\ell$ ersetzt (siehe Gleichung 26.5). In gleicher Weise wollen wir nun für das von einem Stromelement erzeugte Magnetfeld vorgehen. Aus Gleichung 27.1 ergibt sich mit $qv = I d\ell$ das Magnetfeld dB , das von einem Stromelement $I d\ell$ hervorgerufen wird:

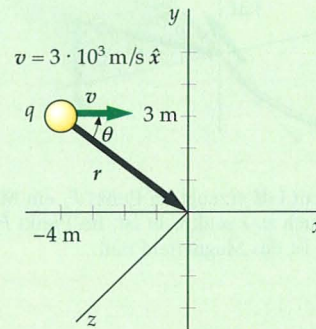
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell \times \hat{r}}{r^2}. \quad (27.3)$$

BIOT-SAVART'SCHES GESETZ

Diese als **Biot-Savart'sches Gesetz** bezeichnete Gleichung wurde unabhängig auch von Ampère hergeleitet. Sie ist wie Gleichung 27.1 dem Coulomb'schen Gesetz für das elektrische Feld einer Punktladung analog: Die Quelle des Magnetfelds ist eine bewegte Ladung q v oder ein Stromelement $I d\ell$, die Quelle des elektrostatischen Felds ist eine Ladung q . Die Stärke des Magnetfelds nimmt quadratisch mit der Entfernung von der bewegten Ladung oder dem Stromelement ab, wie auch das elektrische Feld mit dem Quadrat des Abstands von der Punktladung schwächer wird. Deutlich verschieden sind allerdings die Richtungsaspekte der beiden Felder: Das elektrische Feld zeigt

BEISPIEL 27.1: Das Magnetfeld einer Punktladung

Ein Massepunkt mit der Ladung $q = 4,5 \text{ nC}$ bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v = 3 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ parallel zur x -Achse entlang der Linie mit $y = 3 \text{ m}$. Wie groß ist das von dieser Ladung im Koordinatenursprung erzeugte Magnetfeld, wenn sich die Ladung im Punkt ($x = -4 \text{ m}$, $y = 3 \text{ m}$) befindet (Abbildung 27.2)?

**27.2****Lösung:**

1. Das Magnetfeld ist gegeben durch Gleichung 27.1:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \text{ mit } \mathbf{v} = v \hat{\mathbf{x}}$$

2. Berechnen Sie \mathbf{r} und r aus Abbildung 27.2; schreiben Sie $\hat{\mathbf{r}}$ in Form der Komponenten entlang $\hat{\mathbf{x}}$ und $\hat{\mathbf{y}}$:

$$\mathbf{r} = 4 \text{ m } \hat{\mathbf{x}} - 3 \text{ m } \hat{\mathbf{y}}$$

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{4^2 + 3^2} \text{ m} = 5 \text{ m}$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{4 \text{ m } \hat{\mathbf{x}} - 3 \text{ m } \hat{\mathbf{y}}}{5 \text{ m}} = 0,8 \hat{\mathbf{x}} - 0,6 \hat{\mathbf{y}}$$

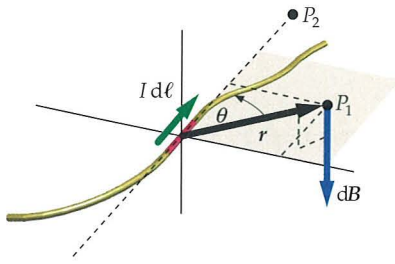
3. Setzen Sie diese Ergebnisse in Gleichung 27.1 ein:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \frac{q \cdot \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \\ &= \frac{\mu_0}{4 \pi} \frac{q(v \hat{\mathbf{x}}) \cdot (0,8 \hat{\mathbf{x}} - 0,6 \hat{\mathbf{y}})}{r^2} \\ &= \frac{\mu_0}{4 \pi} \frac{q(-0,6v \hat{\mathbf{z}})}{r^2} \\ &= -(10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}) \cdot \frac{(4,5 \cdot 10^{-9} \text{ C}) \cdot (0,6) \cdot (3 \cdot 10^3 \text{ m/s})}{(5 \text{ m})^2} \hat{\mathbf{z}} \\ &= \boxed{-3,24 \cdot 10^{-14} \text{ T } \hat{\mathbf{z}}} \end{aligned}$$

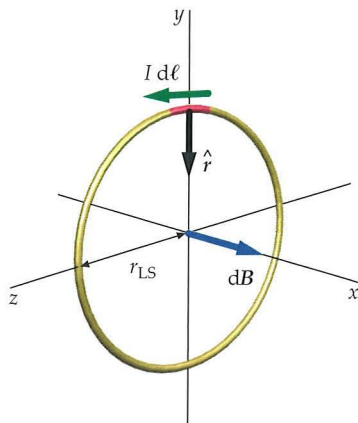
Kommentar: Sie können \mathbf{B} auch berechnen, ohne den Einheitsvektor $\hat{\mathbf{r}}$ explizit angeben zu müssen. Aus Abbildung 27.2 entnehmen wir, dass $\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}$ in die negative z -Richtung zeigt. Der Wert von $\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}$ ist außerdem gleich $|\mathbf{v}| \sin \theta$ mit $\sin \theta = (3 \text{ m}) / (5 \text{ m}) = 0,6$. Fügen wir diese Ergebnisse zusammen, so erhalten wir $\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}} = |\mathbf{v}| \sin \theta (-\hat{\mathbf{z}}) = -v(0,6)\hat{\mathbf{z}}$ in Übereinstimmung mit unserem Resultat in Zeile 3 von Schritt 3. Dieses Beispiel zeigt Ihnen überdies, dass von einer bewegten Ladung erzeugte Magnetfelder sehr schwach sind. Der Stärke des Magnetfelds der Erde in der Nähe der Oberfläche unseres Planeten beträgt zum Vergleich 10^{-4} T .

ÜBUNG: Berechnen Sie für die gleiche Situation das Magnetfeld auf der y -Achse bei $y = 3 \text{ m}$ bzw. $y = 6 \text{ m}$. (Lösung: $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{B} = 3,24 \cdot 10^{-14} \text{ T } \hat{\mathbf{z}}$.)

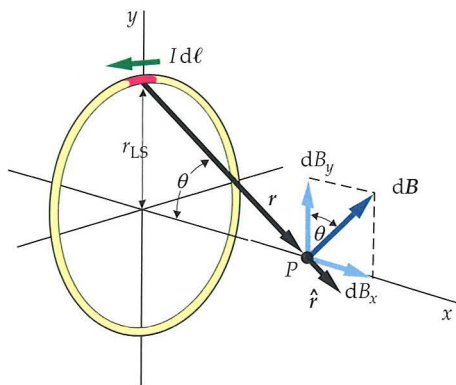
radial in Richtung $\hat{\mathbf{r}}$ von der Punktladung zum gegebenen Punkt des Felds (wenn die Punktladung positiv ist), das Magnetfeld hingegen steht senkrecht auf $\hat{\mathbf{r}}$ und \mathbf{v} (Punktladung) bzw. ℓ (Stromelement). In einem Punkt, der sich auf der Achse eines Stromelements befindet (P_2 in Abbildung 27.3), erzeugt dieses Element kein Magnetfeld. (Aus Gleichung 27.3 folgt $d\mathbf{B} = 0$, wenn $d\ell$ und $\hat{\mathbf{r}}$ parallel oder antiparallel sind.)



27.3 Das Stromelement $I d\ell$ erzeugt im Punkt P_1 ein Magnetfeld, das sowohl zu $d\ell$ als auch zu r senkrecht ist. Im Punkt P_2 , der in Richtung von $d\ell$ liegt, ist das Magnetfeld null.



27.4 Stromelement zur Berechnung des Magnetfelds im Mittelpunkt einer kreisförmigen Leiterschleife. Jedes Element erzeugt ein Magnetfeld, das in Richtung der Achse der Schleife zeigt.



27.5 Geometrie zur Berechnung des Magnetfelds in einem Punkt auf der Achse einer kreisförmigen Leiterschleife.

Will man das Magnetfeld berechnen, das vom insgesamt in einem Stromkreis fließenden Strom erzeugt wird, so ermittelt man zunächst mit Hilfe des Biot-Savart'schen Gesetzes die Felder zu jedem Stromelement. Anschließend summiert (integriert) man über alle Stromelemente im Stromkreis. Abgesehen von Stromkreisen mit sehr einfacher Geometrie ist eine solche Berechnung kompliziert.

Magnetfelder von Leiterschleifen

In Abbildung 27.4 sehen Sie ein Stromelement $I d\ell$ einer Leiterschleife mit dem Radius r_{LS} ; der Einheitsvektor \hat{r} zeigt vom Stromelement zum Mittelpunkt der Schleife. Das von diesem Element im Mittelpunkt der Schleife erzeugte Magnetfeld ist entlang der Achse der Schleife gerichtet, seine Komponente ist gegeben durch

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I |d\ell| \sin \theta}{r_{LS}^2}$$

mit θ als Winkel zwischen $d\ell$ und \hat{r} . Für alle Stromelemente gilt $\theta = 90^\circ$ und folglich $\sin \theta = 1$. Um das vom gesamten Strom erzeugte Magnetfeld zu berechnen, integrieren wir über alle Stromelemente in der Schleife. Da r_{LS} für alle Elemente gleich ist, erhalten wir

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_{LS}^2} \oint |d\ell|.$$

Das Integral von $|d\ell|$ um die Schleife ist gleich der Gesamtlänge $2\pi r_{LS}$, dem Umfang der Schleife. Insgesamt erzeugt die Leiterschleife also das Magnetfeld

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_{LS}^2} 2\pi r_{LS} = \frac{\mu_0 I}{2 r_{LS}}. \quad (27.4)$$

MAGNETFELD IM MITTELPUNKT EINER LEITERSCHLEIFE

ÜBUNG: Welcher Strom muss in einer kreisförmigen Leiterschleife mit einem Radius von 8 cm fließen, damit im Mittelpunkt der Schleife ein 2 G starkes Magnetfeld herrscht?
(Lösung: 25,5 A.)

In Abbildung 27.5 ist die Geometrie zur Berechnung des Magnetfelds in einem Punkt P auf der Achse einer kreisförmigen Leiterschleife skizziert; der Abstand zwischen P und dem Mittelpunkt der Schleife sei gleich x . Betrachten wir zunächst das (rot gekennzeichnete) Stromelement an der Oberseite der Schleife. Hier gilt wie für die gesamte Schleife: $I d\ell$ zeigt in Richtung der Tangente an die Schleife und steht senkrecht auf dem Vektor r , der das Stromelement mit Punkt P verbindet. Die Richtung des von diesem Stromelement hervorgerufenen Magnetfelds dB entnehmen Sie der Skizze: senkrecht zu \hat{r} und auch zu $I d\ell$. Der Wert von dB ist

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I |d\ell \times \hat{r}|}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell}{(x^2 + r_{LS}^2)^{3/2}}.$$

Wir machen uns hier zunutze, dass $r^2 = x^2 + r_{LS}^2$ ist und dass $d\ell$ und \hat{r} senkrecht aufeinander stehen, weshalb gilt: $|d\ell \times \hat{r}| = d\ell$.

Bei der Summation über alle Stromelemente in der Schleife addieren sich die Komponenten senkrecht zur Achse der Schleife (wie dB_y in Abbildung 27.5) zu null; nur Komponenten dB_x , parallel zur Achse, bleiben übrig. Wir berechnen demnach nur die x -Komponente des Felds. Aus Abbildung 27.5 ergibt sich

$$\begin{aligned} dB_x &= |d\mathbf{B}| \sin \theta = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell}{(x^2 + r_{LS}^2)} \right) \cdot \left(\frac{r_{LS}}{\sqrt{x^2 + r_{LS}^2}} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I r_{LS} d\ell}{(x^2 + r_{LS}^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Um das von der gesamten Leiterschleife hervorgerufene Feld zu ermitteln, integrieren wir dB_x über die Schleife:

$$B_x = \oint dB_x = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I r_{LS}}{(x^2 + r_{LS}^2)^{3/2}} d\ell.$$

Weil sich bei der Summation über die Elemente der Schleife weder x noch r_{LS} ändert, dürfen wir diese Größen vor das Integral ziehen:

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I r_{LS}}{(x^2 + r_{LS}^2)^{3/2}} \oint d\ell.$$

Das Integral von $d\ell$ um die Schleife ist gleich $2\pi r_{LS}$. Wir haben also

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I r_{LS}}{(x^2 + r_{LS}^2)^{3/2}} 2\pi r_{LS} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi r_{LS}^2 I}{(x^2 + r_{LS}^2)^{3/2}}. \quad (27.5)$$

MAGNETFELD AUF DER AchSE EINER LEITERSCHLEIFE

ÜBUNG: Zeigen Sie, dass sich Gleichung 27.5 im Mittelpunkt der Leiterschleife auf Gleichung 27.4 ($B_x = \mu_0 I / 2 r_{LS}$) reduziert!

Weit von der Schleife entfernt ist $|x|$ viel größer als r_{LS} , und es wird $(x^2 + r_{LS}^2)^{3/2} \approx (x^2)^{3/2} = |x|^3$. Es gilt dann

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi r_{LS}^2 I}{|x|^3}$$

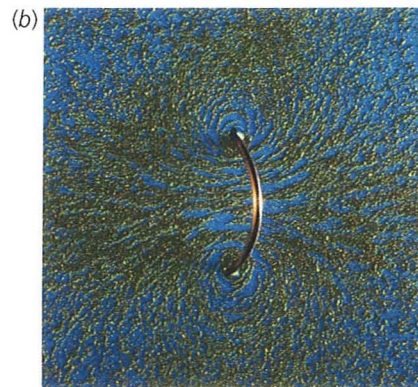
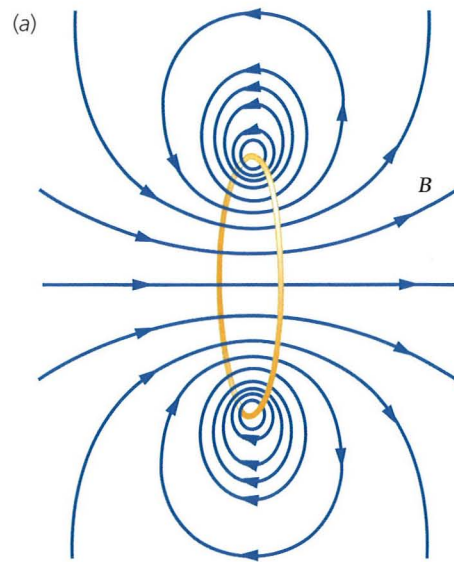
oder

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu}{|x|^3} \quad (27.6)$$

MAGNETFELD AUF DER AchSE EINES MAGNETISCHEN DIPOLS

mit $\mu = I\pi r_{LS}^2$ als magnetischem Moment der Leiterschleife. Machen Sie sich die Ähnlichkeit dieser Beziehung mit dem Ausdruck für das elektrische Feld auf der Achse eines elektrischen Dipols mit dem Dipolmoment φ (siehe Gleichung 21.10) bewusst:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\varphi}{|x|^3}.$$



27.6 a) Magnetfeldlinien einer kreisförmigen Leiterschleife. b) Magnetfeldlinien eines stromdurchflossenen Rings, sichtbar gemacht mit Hilfe von Eisenfeilspänen.

Unser Resultat – eine Leiterschleife erzeugt in großer Entfernung ein magnetisches Dipolfeld – gilt, obwohl wir es hier nicht nachgewiesen haben, allgemein für jeden Punkt, ob er sich nun auf der Achse der Schleife befindet oder nicht. Eine Leiterschleife verhält sich demnach wie ein magnetischer Dipol: Wird sie in ein äußeres Magnetfeld gebracht (wie in Kapitel 26 erläutert), so wirkt auf sie ein Drehmoment $\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$, und sie ruft in großem Abstand ein magnetisches Dipolfeld hervor. In Abbildung 27.6 sehen Sie die Magnetfeldlinien einer Leiterschleife. In Beispiel 27.2 wird das Magnetfeld einer Leiterschleife mit n Windungen betrachtet und in Beispiel 27.3 mit der bewegten Ladung verknüpft. Schließlich wird zur Übung in Beispiel 27.4 ein Stabmagnet im Feld dieser Leiterschleife untersucht.

BEISPIEL 27.2: B auf der Achse einer Leiterschleife mit mehreren Windungen

Eine mehrfach schraubenartig gewundene Leiterschleife mit kreisförmigem Querschnitt und einem Radius von 5,0 cm hat 12 Windungen und liegt in der y - z -Ebene ($x=0$) mit ihrem Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Die Leiterschleife wird von einem Strom von 4 A durchflossen, der so gerichtet ist, dass das magnetische Moment der Schleife in Richtung der x -Achse zeigt. Berechnen Sie mit Hilfe von Gleichung 27.5 das Magnetfeld auf der x -Achse bei a) $x=0$, b) $x=15$ cm und c) $x=3$ m. d) Wenden Sie Gleichung 27.6 zur Berechnung des Magnetfelds auf der x -Achse bei $x=3$ m an.

Problembeschreibung: Das von einer Leiterschleife mit n Windungen erzeugte Magnetfeld ist n -mal so groß wie das von einer einzelnen Windung erzeugte Feld. a) Bei $x=0$ (Mittelpunkt der Windungen) ist gemäß Gleichung 27.4 $B = \mu_0 n / (2 r_{LS})$. Gleichung 27.5 gibt das vom Strom in einer Windung hervorgerufene Magnetfeld auf der Achse an. In großer Entfernung von der Schleife, wie in Aufgabenteil c, berechnen wir das Feld mit Hilfe von Gleichung 27.6. Weil wir n Windungen betrachten, ist das magnetische Moment hier gleich $\mu = n I \pi r_{LS}^2$.

Lösung:**Teilaufgabe a**

Im Mittelpunkt der Leiterschleife ist B_x n -mal so groß wie der durch Gleichung 27.4 für eine Windung gegebene Wert:

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\mu_0 n I}{2 r_{LS}} \\ &= (4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}) \cdot \frac{(12) \cdot (4 \text{ A})}{2 \cdot (0,05 \text{ m})} = \boxed{6,03 \cdot 10^{-4} \text{ T}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Auf der Achse ist B_x gleich dem n -fachen des durch Gleichung 27.5 gegebenen Werts:

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi r_{LS}^2 n I}{(x^2 + r_{LS}^2)^{3/2}} \\ &= (10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}) \cdot \frac{2\pi (0,05 \text{ m})^2 \cdot (12) \cdot (4 \text{ A})}{((0,15 \text{ m})^2 + (0,05 \text{ m})^2)^{3/2}} \\ &= \boxed{1,91 \cdot 10^{-5} \text{ T}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe c

Wenden Sie wieder Gleichung 27.5 an:

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi r_{LS}^2 n I}{(x^2 + r_{LS}^2)^{3/2}} \\ &= (10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}) \cdot \frac{2\pi (0,05 \text{ m})^2 \cdot (12) \cdot (4 \text{ A})}{((3 \text{ m})^2 + (0,05 \text{ m})^2)^{3/2}} \\ &= \boxed{2,791 \cdot 10^{-9} \text{ T}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe d

1. 3 m sind groß gegen den Radius der Schleife, $r_{LS}=0,05$ m. Sie können deshalb Gleichung 27.6 für das Magnetfeld weit von der Schleife entfernt anwenden:

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu}{|x|^3}$$

2. Das magnetische Moment der Leiterschleife ist gleich nIA :

$$\mu = n I \pi r_{LS}^2 = (12) \cdot (4 \text{ A}) \cdot \pi \cdot (0,05 \text{ m})^2 = 0,377 \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

3. In B_x aus Schritt 1 setzen Sie nun μ und $x=3$ m ein:

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu}{|x|^3} = (10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}) \cdot \frac{2 \cdot (0,377 \text{ A} \cdot \text{m}^2)}{(3 \text{ m})^3} \\ &= \boxed{2,793 \cdot 10^{-9} \text{ T}} \end{aligned}$$

Kommentar: In Teilaufgabe d ist $x=60r_{LS}$, weshalb wir eine Näherung verwenden dürfen, die für $x \gg r_{LS}$ gilt. Das Ergebnis weicht vom tatsächlichen, in Teilaufgabe c berechneten Wert um weniger als ein zehntel Prozent ab.

BEISPIEL 27.3: Die bewegte Ladungsmenge

In der in Beispiel 27.2 besprochenen Leiterschleife fließt ein Strom von 4 A. Berechnen Sie die im Draht bewegte Ladung (in Coulomb) unter der Annahme, dass die Driftgeschwindigkeit gleich $1,4 \cdot 10^{-4}$ m/s ist. (Für die Driftgeschwindigkeit in einem Draht, der einen Strom von 1 A führt, hatten wir in Beispiel 25.1 einen Wert von $3,4 \cdot 10^{-5}$ m/s berechnet.)

Problembeschreibung: Die Menge der im Draht bewegten Ladung q ergibt sich als Produkt der Rate, mit der die Ladungsträger an einem Ende in den Draht eintreten, und der Zeit, die sie zum Durchlaufen des Drahts benötigen. Die Rate des Ladungseintritts ist gleich dem fließenden Strom I ; die zum Durchlaufen einer Strecke mit der Länge ℓ erforderliche Zeit ist gleich der Driftgeschwindigkeit ℓ/v_d .

Lösung:

1. Die bewegte Ladung ist gleich dem Produkt aus dem Strom und der zum Durchlaufen des Drahts benötigten Zeit:

$$q = I \Delta t$$

2. Die Driftgeschwindigkeit ist gleich dem Quotienten aus der Länge des Drahts und der Zeit:

$$v_d = \frac{\ell}{\Delta t}$$

3. Die Länge ℓ entspricht dem Umfang einer Windung der Leiterschleife, multipliziert mit der Anzahl der Windungen. Aus dem Ergebnis von Schritt 2 berechnen Sie außerdem die Zeit:

$$\ell = n 2 \pi r_{LS} = (12) \cdot 2 \pi \cdot (0,05 \text{ m}) = 3,77 \text{ m}$$

und

$$\Delta t = \frac{\ell}{v_d} = \frac{3,77 \text{ m}}{1,4 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}} = 2,69 \cdot 10^4 \text{ s}$$

4. Nun setzen Sie alles in Schritt 1 ein. Sie erhalten die bewegte Ladung:

$$q = I \Delta t = (4 \text{ A}) \cdot (2,69 \cdot 10^4 \text{ s})$$

$$= \boxed{1,08 \cdot 10^5 \text{ C}}$$

Kommentar: Der Strom besteht aus mehr als 10^5 C bewegter Ladung. Verglichen mit der Ladungsmenge, die in einem gewöhnlichen Kondensator gespeichert wird, ist das sehr viel.

BEISPIEL 27.4: Auf einen Stabmagneten wirkendes Drehmoment

Ein kleiner Stabmagnet mit dem magnetischen Moment $\mu = 0,03 \text{ A} \cdot \text{m}^2$ wird so in die Mitte der Leiterschleife aus Beispiel 27.2 gebracht, dass der Vektor seines magnetischen Moments in der x - y -Ebene liegt und mit der x -Achse einen Winkel von 30° einschließt. Berechnen Sie das auf den Stabmagneten wirkende Drehmoment; nehmen Sie dazu \mathbf{B} im Bereich des Magneten als konstant an.

ZUR ÜBUNG

Problembeschreibung: Das auf den Magneten wirkende Drehmoment ist gegeben als $\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$. Weil \mathbf{B} in positive x -Richtung zeigt, zeigt das Produkt $\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$ in negative z -Richtung, wie Sie Abbildung 27.7 entnehmen können.

Lösung:

Decken Sie zunächst die rechte Spalte ab und versuchen Sie jeweils, die Ergebnisse selbst zu ermitteln.

Schritte

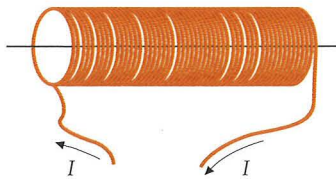
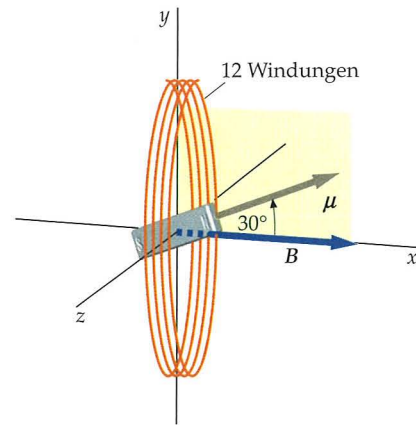
1. Berechnen Sie den Betrag des Drehmoments aus der Beziehung $\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$.
2. Geben Sie mit Hilfe eines Einheitsvektors die Richtung an.

27.7

Ergebnisse

$$|\mathbf{M}| = 9,04 \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\mathbf{M} = - (9,04 \cdot 10^{-6} \hat{z}) \text{ N} \cdot \text{m}$$

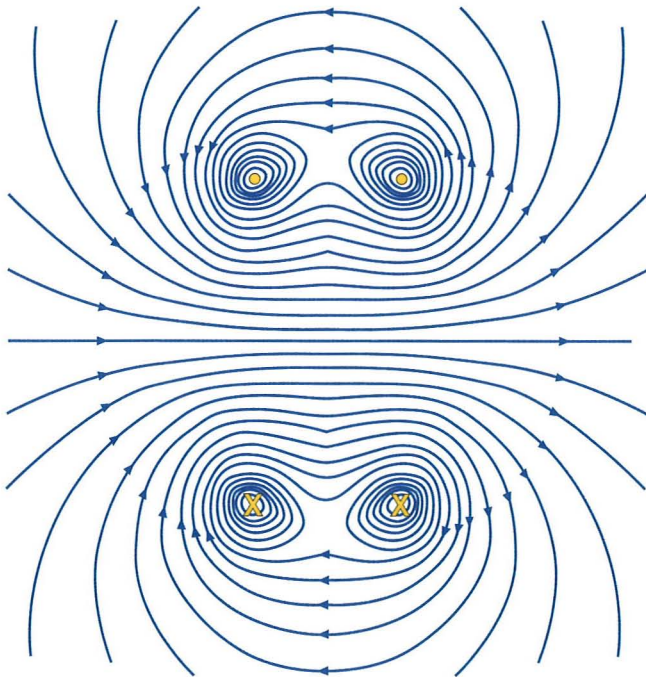


27.8 Eine dicht gewickelte Spule kann man sich als eine Reihe nahe beieinander liegender Leiterschleifen vorstellen, die jeweils vom gleichen Strom durchflossen werden. Im Inneren der Spule entsteht ein homogenes Magnetfeld.

Das Magnetfeld im Inneren einer stromdurchflossenen Spule

Eine **Zylinderspule** ist ein fest zu einer Spirale mit eng beieinander liegenden Windungen aufgewickelter Draht (Abbildung 27.8); solange keine Verwechslungen auftreten können, werden wir im Folgenden einfach von einer **Spule** sprechen. Fließt durch die Spule ein Strom, so baut sich in dem von den Leiterschleifen umschlossenen Raum ein starkes, homogenes Magnetfeld auf. Die Spule spielt daher die gleiche Rolle in der Magnetostatik wie der Plattenkondensator in der Elektrostatik, zwischen dessen Platten ein starkes, homogenes elektrisches Feld entsteht. Das Magnetfeld einer stromdurchflossenen Spule gleicht im Wesentlichen dem Magnetfeld von n identischen, nebeneinander angeordneten Leiterschleifen. In Abbildung 27.9 sehen Sie die Magnetfeldlinien zweier solcher Schleifen.

Abbildung 27.10 zeigt die Magnetfeldlinien einer langen, dicht gewickelten Spule. Innerhalb der Spule sind die Feldlinien annähernd parallel zur Achse. Der Abstand zwischen ihnen ist gering und einheitlich; das zugehörige Feld ist folglich stark und homogen. Außerhalb der Spule liegen die Feldlinien deutlich weniger dicht beieinander, sie konvergieren an einem Ende und diver-



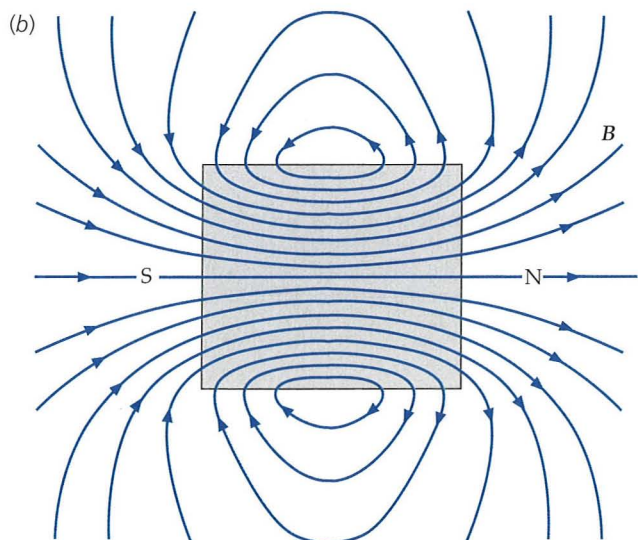
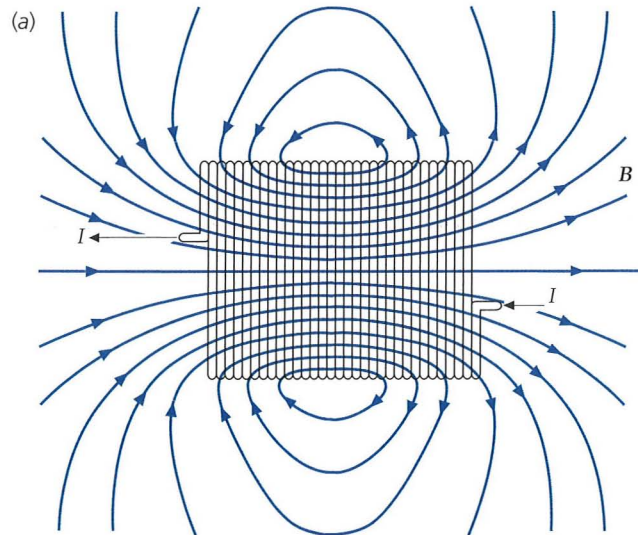
27.9 Magnetfeldlinien zweier koaxialer Leiterschleifen, die vom gleichen Strom durchflossen werden. Die Schnittpunkte der Leiterschleifen mit der Papierebene sind markiert: An den Kreuzen fließt der Strom in die Papierebene hinein, an den Punkten tritt er wieder aus. Im achsennahen Gebiet zwischen den Leiterschleifen überlagern die beiden Magnetfelder einander. Das resultierende Feld ist stark und bemerkenswert homogen. In den von der Achse wegzeigenden Gebieten ist das Feld verhältnismäßig schwach.

gieren am anderen Ende. Ein Vergleich mit Abbildung 27.8 zeigt, dass das Feldlinienmuster einer stromdurchflossenen Spule mit demjenigen eines Stabmagneten gleicher Form übereinstimmt.

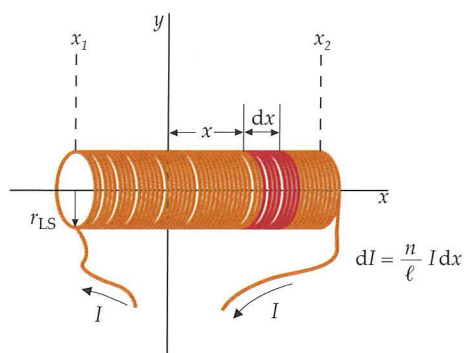
Betrachten wir eine aus n Windungen bestehende Spule mit der Länge ℓ , die von einem Strom I durchflossen wird. Als x -Achse wählen wir die Achse der Spule; das linke Ende der Spule liege bei $x = x_1$, das rechte Ende bei $x = x_2$ (Abbildung 27.11). Zu berechnen ist das Magnetfeld im Ursprung des Koordinatensystems. In der Abbildung ist ein Abschnitt der Spule mit der Länge dx im Abstand x vom Ursprung hervorgehoben. Ist n/ℓ die Anzahl der Windungen pro Längeneinheit (die Dichte der Windungen), so enthält der Abschnitt $(n/\ell) dx$ Windungen, in denen jeweils ein Strom I fließt. Der Abschnitt kann folglich einer einzelnen Leiterschleife gleichgesetzt werden, die von einem Strom $dI = (n/\ell) I dx$ durchflossen wird. Gleichung 27.5 gibt das Magnetfeld in einem Punkt auf der x -Achse an, das eine im Ursprung befindliche, von einem Strom $(n/\ell) I dx$ durchflossene Leiterschleife erzeugt. Wir ersetzen in dieser Beziehung I durch $dI = (n/\ell) I dx$ und erhalten

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi r_{LS}^2 (n/\ell) I dx}{(x^2 + r_{LS}^2)^{3/2}}.$$

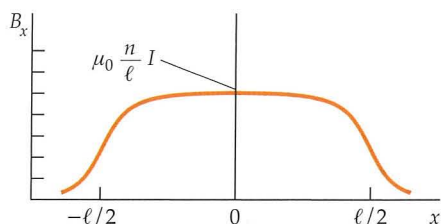
Diese Gleichung liefert uns umgekehrt auch das Magnetfeld im Ursprung, das von einer in x befindlichen Leiterschleife erzeugt wird. Das von der gesamten Spule im Ursprung hervorgerufene



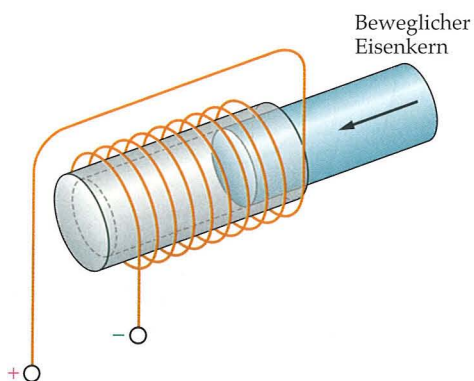
27.10 a) Magnetfeldlinien einer stromdurchflossenen Spule. b) Das Linienmuster gleicht dem eines Stabmagneten gleicher Gestalt. c) Magnetfeldlinien einer Spule, sichtbar gemacht mit Hilfe von Eisenfeilspänen.



27.11 Schema zur Berechnung des Magnetfelds innerhalb einer Spule entlang deren Achse. Der Spulenabschnitt dx enthält $n/\ell dx$ Windungen mit n/ℓ als Anzahl der Windungen pro Längeneinheit. Den Ausschnitt dx kann man als einzelne Leiterschleife behandeln, die vom Strom $dI = (n/\ell) I dx$ durchflossen wird.



27.12 Magnetfeld im Inneren einer Spule auf deren Achse als Funktion der Position x . In hinreichend großer Entfernung von den Enden der Spule ist das Magnetfeld nahezu konstant. Die Länge ℓ dieser Spule ist zehnmals so groß wie ihr Radius.



27.13 Anlasserspule eines Autos. Fließt durch die Spule ein Strom, so zieht das erzeugte Magnetfeld den Eisenkern ins Innere der Spule, woraufhin das Ritzel des Anlassermotors an das Schwungrad des Motors kuppelt, so dass der Motor gedreht werden kann. Wird die Stromzufuhr zur Spule unterbrochen, so kuppelt eine Feder das Ritzel wieder ab und schiebt den Eisenkern nach rechts in seine Ausgangslage.

Magnetfeld erhalten wir, indem wir die obige Beziehung in den Grenzen $x=x_1$ und $x=x_2$ integrieren:

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi r_{LS}^2 \frac{n}{\ell} I \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(x^2 + r_{LS}^2)^{3/2}}. \quad (27.7)$$

Das Integral kann durch Substitution ($x = r_{LS} \tan \theta$) gelöst oder in einer Formelsammlung nachgeschlagen werden. Sein Wert ist

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(x^2 + r_{LS}^2)^{3/2}} &= \frac{x}{r_{LS}^2 \sqrt{x^2 + r_{LS}^2}} \Big|_{x_1}^{x_2} \\ &= \frac{1}{r_{LS}^2} \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + r_{LS}^2}} - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + r_{LS}^2}} \right). \end{aligned}$$

Wir setzen dies in Gleichung 27.7 ein und erhalten

$$B_x = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{n}{\ell} I \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + r_{LS}^2}} - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + r_{LS}^2}} \right). \quad (27.8)$$

B_x AUF DER ACHE EINER SPULE BEI $x=0$

Im Inneren einer „langen“ Spule (einer Spule, deren Länge ℓ groß gegen ihren Radius r_{LS} ist), hinreichend weit von ihren Enden entfernt, geht der linke Klammerausdruck gegen $+1$, der rechte gegen -1 . Wo diese Bedingungen erfüllt sind, ist das Magnetfeld gegeben durch

$$B_x = \frac{\mu_0 n I}{\ell}. \quad (27.9)$$

MAGNETFELD IM INNEREN EINER LANGEN SPULE

Liegt das linke Ende der Spule im Ursprung, so ist $x_1=0$ und $x_2=\ell$. Bei $\ell \gg r_{LS}$ wird dann der rechte Klammerausdruck in Gleichung 27.8 null, und der linke geht gegen 1. Folglich ist $B \approx \frac{1}{2} \mu_0 (n/\ell) I$, das bedeutet, das Magnetfeld \mathbf{B} an jedem Ende einer langen Spule ist halb so groß wie das Magnetfeld an weit von den Enden entfernten Punkten im Spuleninneren. In Abbildung 27.12 wurde das Magnetfeld auf der x -Achse einer Spule gegen die Position auf der Achse aufgetragen (die Mitte der Spule liegt im Ursprung). Wie Sie sehen, kann das Magnetfeld auf der Achse in guter Näherung als homogen (ortsunabhängig) betrachtet werden, solange die Entfernung von den Enden der Spule groß genug ist. Die Stärke des Magnetfelds reicht aus, um beim Anlassen eines Autos Bewegungen eines Eisenkerns auf ein Ritzel zu übertragen, das den Anlassermotor in Bewegung setzt (Abbildung 27.13).

BEISPIEL 27.5: B in der Mitte einer Spule

Berechnen Sie das Magnetfeld im Mittelpunkt einer 20 cm langen Spule mit einem Radius von 1,4 cm und 600 Windungen, durch die ein Strom von 4 A fließt.

Lösung:

1. Mit Hilfe von Gleichung 27.8 berechnen Sie das Feld exakt:

$$B_x = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{n}{\ell} I \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + r_{LS}^2}} - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + r_{LS}^2}} \right)$$

2. Wir betrachten einen Punkt in der Mitte der Spule. In diesem Fall ist $x_1 = -10$ cm und $x_2 = +10$ cm, und die Klammerausdrücke in Gleichung 27.8 nehmen folgende Werte an:

$$\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + r_{LS}^2}} = \frac{10 \text{ cm}}{(10 \text{ cm})^2 + (1,4 \text{ cm})^2} = 0,990$$

$$\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + r_{LS}^2}} = \frac{-10 \text{ cm}}{\sqrt{(-10 \text{ cm})^2 + (1,4 \text{ cm})^2}} = -0,990$$

3. Nun setzen Sie diese Ergebnisse in die Gleichung für B_x (Schritt 1) ein (Wd. steht für Windungen):

$$B_x = \frac{1}{2} (4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}) \cdot \frac{600 \text{ Wd.}}{0,2 \text{ m}} \cdot (4 \text{ A}) \cdot (0,990 + 0,990) = 1,50 \cdot 10^{-2} \text{ T}$$

Kommentar: Mit der Näherung, die uns zu Gleichung 27.9 führte, könnten wir hier 0,99 durch 1 ersetzen; die Abweichung beträgt nur 1%. Machen Sie sich bewusst, dass das Magnetfeld innerhalb der Spule ziemlich groß ist (rund das 250fache des Erdmagnetfelds).

ÜBUNG: Berechnen Sie B_x mit Hilfe der Näherungsgleichung für lange Spulen. (Lösung: $1,51 \cdot 10^{-2}$ T)

Das Magnetfeld eines geraden, stromdurchflossenen Leiters

Wir wollen nun das Magnetfeld \mathbf{B} berechnen, das ein Abschnitt eines geraden, stromdurchflossenen Leiters in einem Punkt P hervorruft. Die geometrische Anordnung zeigt Abbildung 27.14. Der Draht liege auf der x -Achse, die Projektion von P auf den Draht befinde sich bei $x=0$ und r_\perp sei der (senkrechte) Abstand zwischen P und dem Draht.

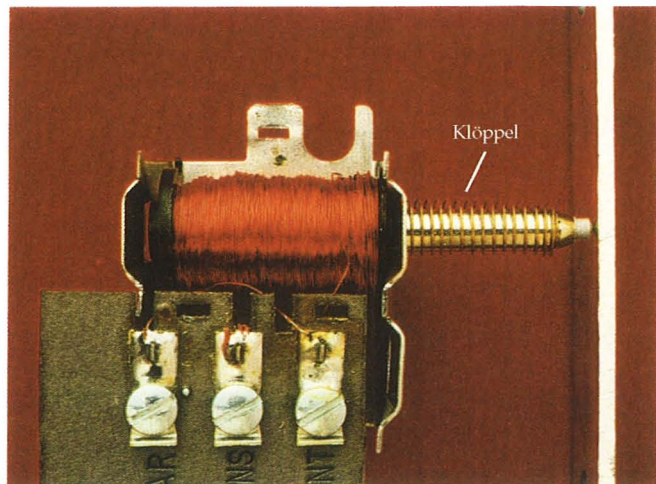
In Abbildung 27.14 wurde ein typisches Stromelement $I d\ell$ im Abstand x vom Ursprung herausgegriffen. Der Vektor \mathbf{r} zeigt von diesem Element in Richtung P . Die Richtung des von dem Element in P erzeugten Magnetfelds ist gleich der Richtung von $I d\ell \times \hat{\mathbf{r}}$; sie zeigt aus der Papierebene heraus in z -Richtung. Weil dies auch für die von allen anderen Stromelementen hervorgerufenen Magnetfelder gilt, müssen wir lediglich die z -Komponente des Felds berechnen. Das abgebildete Stromelement liefert folgenden Beitrag zum Magnetfeld (siehe Gleichung 27.3):

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dx}{r^2} \sin \phi.$$

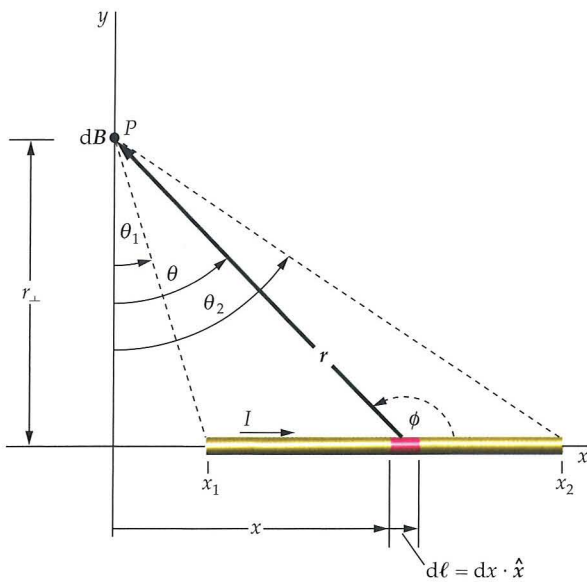
Es ist bequemer, mit dem Winkel θ anstelle von ϕ weiterzuarbeiten:

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dx}{r^2} \cos \theta. \quad (27.10)$$

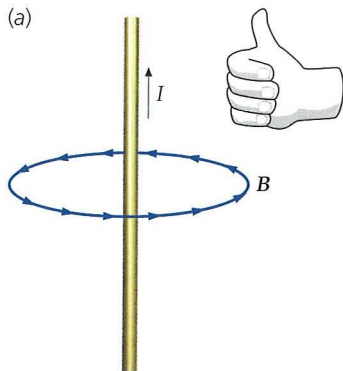
Um nun die Beiträge aller Stromelemente zu summieren, müssen wir eine Beziehung zwischen den Variablen θ , r und x finden.



Innenansicht einer Türklingel. Fließt durch die Spule ein Wechselstrom, so zieht das Magnetfeld den Klöppel periodisch hin und her, so dass er den (hier abmontierten) Glockendeckel periodisch anschlägt. Die Feder zieht den Klöppel zurück in die Ausgangslage.



27.14 Schema zur Berechnung des Magnetfelds, das von einem geraden Leiterabschnitt in einem Punkt P hervorgerufen wird. Jedes Element des Leiterabschnitts trägt zum Magnetfeld in P bei; das Feld zeigt aus der Papierebene heraus. Das Resultat geben wir als Funktion der Winkel θ_1 und θ_2 an.



27.15 a) Zur Bestimmung der Richtung des von einem langen, geraden, stromdurchflossenen Leiter erzeugten Magnetfelds wenden wir die Rechte-Hand-Regel an. Die Magnetfeldlinien bilden Kreise um den Draht in Richtung der Finger der rechten Hand, wenn der Daumen in die Stromrichtung zeigt. b) Feldlinien des von einem langen Draht hervorgerufenen Magnetfelds, sichtbar gemacht durch Eisenfeilspäne.

Am einfachsten ist es, x und r in Abhängigkeit von θ aufzuschreiben:

$$x = r_{\perp} \tan \theta.$$

Wir leiten beide Seiten dieser Beziehung ab (r_{\perp} ist konstant) und erhalten

$$dx = r_{\perp} \sec^2 \theta d\theta = r_{\perp} \frac{r^2}{r_{\perp}^2} d\theta = \frac{r^2}{r_{\perp}} d\theta$$

mit $\sec \theta = r/r_{\perp}$. Einsetzen dieser Beziehung für dx in Gleichung 27.10 liefert

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} \frac{r^2}{r_{\perp}} d\theta \cos \theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_{\perp}} \cos \theta d\theta.$$

Zur Berechnung des gesamten Magnetfelds integrieren wir diesen Ausdruck in den Grenzen $\theta = \theta_1$ und $\theta = \theta_2$ (θ_1 und θ_2 sind in Abbildung 27.14 eingezeichnet):

$$B_z = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_{\perp}} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_{\perp}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta.$$

Abschließend rechnen wir das Integral aus:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_{\perp}} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_{\perp}} (\cos \phi_1 - \cos \phi_2). \end{aligned} \quad (27.11)$$

MAGNETFELD EINES GERADEN LEITERABSCHNITTS

Dieser Ausdruck gibt das Magnetfeld an, das ein beliebiger stromdurchflossener Leiterabschnitt in einem Punkt P auf der y -Achse erzeugt. Es ist eine Funktion des senkrechten Abstands r_{\perp} zwischen P und der Achse des Leiters sowie der Winkel ϕ_1 und ϕ_2 , die die Verbindungslinien zwischen P und den Endpunkten des Leiters mit der Achse einschließen. Beispiel 27.6 verdeutlicht die Anwendung dieser Beziehung. Geht die Länge des Drahts in beiden Richtungen gegen unendlich, so geht ϕ_1 gegen 0° und ϕ_2 gegen 180° . Das von einem solchen sehr langen Leiter hervorgerufene Magnetfeld erhalten wir, indem wir in Gleichung 27.11 $\phi_1 = 0^\circ$ und $\phi_2 = 180^\circ$ setzen:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r_{\perp}}. \quad (27.12)$$

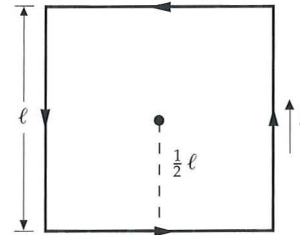
MAGNETFELD EINES UNENDLICH LANGEN GERADEN LEITERS

In jedem Punkt des Raums zeigen die Magnetfeldlinien eines langen, geraden stromdurchflossenen Leiters in Richtung der Tangenten an einen Kreis um den Leiter mit dem Radius r_{\perp} (r_{\perp} ist der senkrechte Abstand zwischen dem Draht und dem betrachteten Punkt des Felds). Um die Richtung von \mathbf{B} zu bestimmen, wenden wir die Rechte-Hand-Regel an (Abbildung 27.15 a). Die Magnetfeldlinien bilden Kreise um den Leiter, wie Abbildung 27.15 b zeigt; deshalb haben wir in den Gleichungen 27.11 und 27.12 den Index an der magnetischen Feldstärke weggelassen. Eine Anwendung der Gleichung 27.12 illustriert Beispiel 27.7.

BEISPIEL 27.6: B im Mittelpunkt einer quadratischen Leiterschleife

Berechnen Sie das Magnetfeld im Mittelpunkt einer quadratischen Leiterschleife mit der Seitenlänge $\ell = 50$ cm, durch die ein Strom von 1,5 A fließt.

Problembeschreibung: Das Magnetfeld im Mittelpunkt der Leiterschleife ist gleich der Summe der Beiträge der vier Seitenabschnitte. Abbildung 27.16 entnehmen wir, dass die vier Felder gleich sind; alle Felder zeigen aus der Papierebene heraus. Demzufolge berechnen wir mit Hilfe von Gleichung 27.11 das von einer Seite erzeugte Magnetfeld und multiplizieren es mit 4, um das Gesamtfeld zu erhalten.

**27.16**

$$B = 4 B_S$$

$$\begin{aligned} B_S &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_\perp} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{\frac{1}{2}\ell} \cdot (\sin(+45^\circ) - \sin(-45^\circ)) \\ &= (10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}) \cdot \frac{1,5 \text{ A}}{0,25 \text{ m}} \cdot 2 \sin 45^\circ \\ &= 8,49 \cdot 10^{-7} \text{ T} \end{aligned}$$

3. Diesen Wert multiplizieren Sie nun noch mit 4:

$$B = 4 B_S = 4 \cdot (8,49 \cdot 10^{-7} \text{ T}) = \boxed{3,39 \cdot 10^{-6} \text{ T}}$$

ÜBUNG: Vergleichen Sie das Magnetfeld im Mittelpunkt einer kreisrunden Leiterschleife mit dem Radius r_\perp mit dem Magnetfeld im Mittelpunkt einer quadratischen Leiterschleife mit der Kantenlänge $\ell = 2 r_\perp$; in beiden Schleifen soll der gleiche Strom fließen. Welche Schleife erzeugt das stärkere Feld? (*Lösung:* Das Magnetfeld im Mittelpunkt der kreisrunden Schleife ist um etwa 10 % stärker.)

ÜBUNG: Durch einen langen, geraden Leiter fließt ein Strom von 12 A. In welchem Abstand von dem Leiter ist der Betrag des erzeugten Magnetfelds gleich 0,6 G, dem Betrag des Erdmagnetfelds? (*Lösung:* $r = 4,00$ cm.)

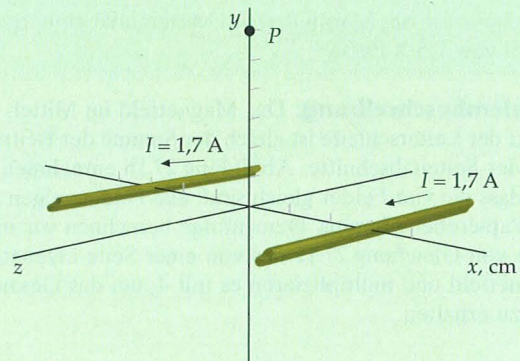
Zu dem durch Gleichung 27.12 ausgedrückten Ergebnis gelangten Biot und Savart im Jahre 1820 auf experimentellem Weg. Im Zuge ihrer Analyse leiteten die beiden Forscher die Beziehung für das von einem Stromelement erzeugte Magnetfeld in Gleichung 27.3 her.



Mit diesem Prüfgerät kann man elektrische Ströme messen. Die Backen der Zange umschließen das Strom führende Kabel, ohne den leitenden Draht zu berühren. Ein eingebauter Hall-Generator misst das vom Strom führenden Leiter erzeugte Magnetfeld und gibt eine zur Feldstärke proportionale Spannung aus; die Feldstärke wiederum ist proportional zu dem im Leiter fließenden Strom.

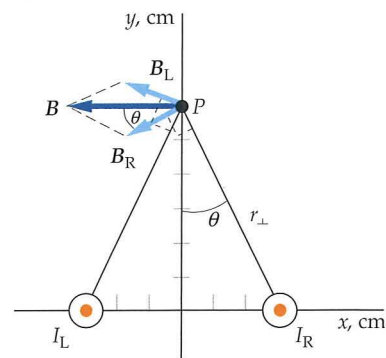
BEISPIEL 27.7: B zweier paralleler stromdurchflossener Leiter

Zwei lange, gerade Leiter liegen parallel zur z -Achse entlang der Linie mit $x = -3$ cm und $y = 0$ bzw. mit $x = +3$ cm und $y = 0$ (Abbildung 27.17). Durch beide Leiter fließt in positiver z -Richtung ein Strom von 1,7 A. Berechnen Sie das Magnetfeld im Punkt P auf der y -Achse bei $y = 6$ cm.



27.17

Problembeschreibung: Das Magnetfeld im Punkt P ergibt sich durch Vektoraddition des vom linken und des vom rechten Leiter hervorgerufenen Feldbeitrags, B_L bzw. B_R (Abbildung 27.18). Durch beide Leiter fließt der gleiche Strom, und beide sind gleich weit vom Punkt P entfernt. Deshalb müssen die Feldstärken $|B_L|$ und $|B_R|$ ebenfalls gleich sein. B_L steht senkrecht auf der (senkrechten) Verbindung zwischen P und dem linken Leiter; analog gilt dies für B_R und den rechten Leiter.



27.18

Lösung:

1. Das Magnetfeld im Punkt P erhalten Sie durch Addition der Vektoren B_L und B_R :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_R$$

2. Wie Sie Abbildung 27.18 entnehmen, zeigt das resultierende Magnetfeld in negative x -Richtung, seine Komponente in dieser Richtung lautet $2 |B_L| \cos \theta$:

$$\mathbf{B} = -2 |B_L| \cos \theta \hat{x}$$

3. Gleichung 27.12 liefert die Beträge von B_L und B_R :

$$|B_L| = |B_R| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r_\perp}$$

4. r_\perp ist der (senkrechte) Abstand zwischen P und jedem der Leiter. Berechnen Sie diesen Abstand aus der Abbildung und setzen Sie ihn dann in die Beziehungen für $|B_L|$ und $|B_R|$ ein:

$$r_\perp = \sqrt{(3 \text{ cm})^2 + (6 \text{ cm})^2} = 6,71 \text{ cm}$$

also

$$|B_L| = |B_R| = (10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}) \cdot \frac{2 \cdot (1,7 \text{ A})}{0,0671 \text{ m}} = 5,07 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

5. Den Wert von $\cos \theta$ entnehmen Sie ebenfalls der Abbildung:

$$\cos \theta = \frac{6 \text{ cm}}{r_\perp} = \frac{6 \text{ cm}}{6,71 \text{ cm}} = 0,894$$

6. Abschließend setzen Sie Ihre Resultate für $\cos \theta$ und B_L in die Gleichung für \mathbf{B} (Schritt 2) ein:

$$\mathbf{B} = -2 \cdot (5,07 \cdot 10^{-6} \text{ T}) \cdot (0,894) \hat{x} = \boxed{(-9,07 \cdot 10^{-6} \hat{x}) \text{ T}}$$

ÜBUNG: Wie groß ist B im Koordinatenursprung? (Lösung: 0.)

ÜBUNG: Wie groß ist B im Koordinatenursprung, wenn I_R in die Papierebene hineinzeigt? (Lösung: $\mathbf{B} = (2,27 \cdot 10^{-5} \hat{y}) \text{ T}$.)

Die Kraft zwischen zwei parallelen, stromdurchflossenen Leitern

Um die Kraft zu bestimmen, die zwei stromdurchflossene Leiter aufeinander ausüben, verwenden wir zwei bereits hergeleitete Beziehungen: Gleichung 27.12 gibt, wie in Beispiel 27.7 erläutert, das von einem langen, geraden, stromdurchflossenen Leiter erzeugte Magnetfeld an, Gleichung 26.5 ($d\mathbf{F} = I d\mathbf{\ell} \times \mathbf{B}$) liefert die von einem Magnetfeld auf einen Abschnitt eines stromdurchflossenen Leiters ausgeübte Kraft. In Abbildung 27.19 sehen Sie zwei lange parallele Leiter, durch die in gleicher Richtung ein Strom fließt. Wir betrachten zunächst die Kraft, die auf einen Abschnitt $d\ell_2$ wirkt, in dem ein Strom I_2 fließt. An diesem Abschnitt herrscht ein Magnetfeld \mathbf{B}_1 , das von dem Strom I_1 herrührt; es steht senkrecht auf dem Stromelement $I_2 d\ell_2$, wie die Abbildung zeigt. Gleiches gilt für alle anderen Stromelemente des Leiters. Die auf das Stromelement $I_2 d\ell_2$ wirkende Kraft $d\mathbf{F}_2$ zeigt wegen $d\mathbf{F}_2 = I_2 d\ell_2 \times \mathbf{B}_1$ in Richtung des ersten Leiters. Analog erfährt ein Stromelement $I_1 d\ell_1$ eine Kraft, die in Richtung des zweiten Leiters zeigt. Das bedeutet, die beiden parallelen, in gleicher Richtung von Strömen durchflossenen Leiter ziehen sich gegenseitig an. Kehrt man die Stromrichtung in einem der beiden Leiter um, so kehrt sich auch die Richtung der Kraft um: Leiter, in denen antiparallele Ströme fließen, stoßen einander ab. Dieser Effekt entdeckte Ampère nur eine Woche, nachdem er von Ørsted's Beobachtungen zur Wirkung eines Stroms auf eine Kompassnadel erfahren hatte.

Die von dem Magnetfeld \mathbf{B}_1 auf das Stromelement $I_2 d\ell_2$ ausgeübte Kraft hat die Größe

$$dF_2 = I_2 |d\ell_2 \times \mathbf{B}_1|.$$

Da das Magnetfeld senkrecht auf dem Stromelement $I_2 d\ell_2$ steht, ergibt sich

$$dF_2 = I_2 d\ell_2 B_1.$$

Ist der Abstand zwischen den Drähten im Vergleich zu ihrer Länge sehr klein, so wird das Magnetfeld \mathbf{B}_1 gut durch Gleichung 27.12 für das Feld eines unendlich langen stromdurchflossenen Leiters angenähert. Weil \mathbf{r}_\perp vom Draht 1 zum Draht 2 zeigt, ist die Kraft, die auf das Stromelement $I_2 d\ell_2$ wirkt

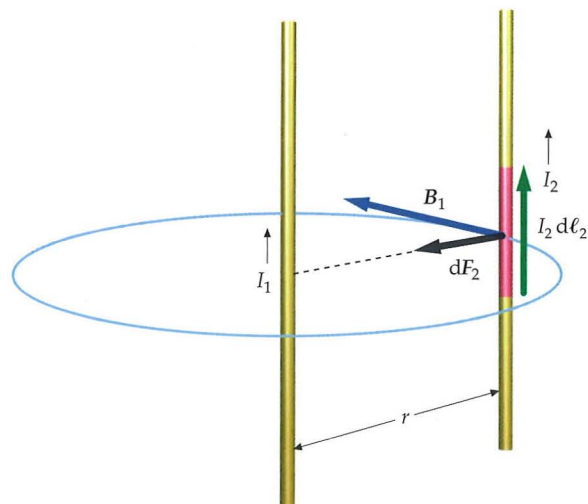
$$dF_2 = -I_2 d\ell_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi |r_\perp|},$$

und für die Kraft pro Längeneinheit (Meter) erhalten wir schließlich

$$\frac{dF_2}{d\ell_2} = -I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi |r_\perp|} = -2 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{|r_\perp|}. \quad (27.13)$$

Das negative Vorzeichen zeigt, dass die Kraft zwischen den Drähten anziehend ist, wenn I_1 und I_2 dasselbe Vorzeichen besitzen.

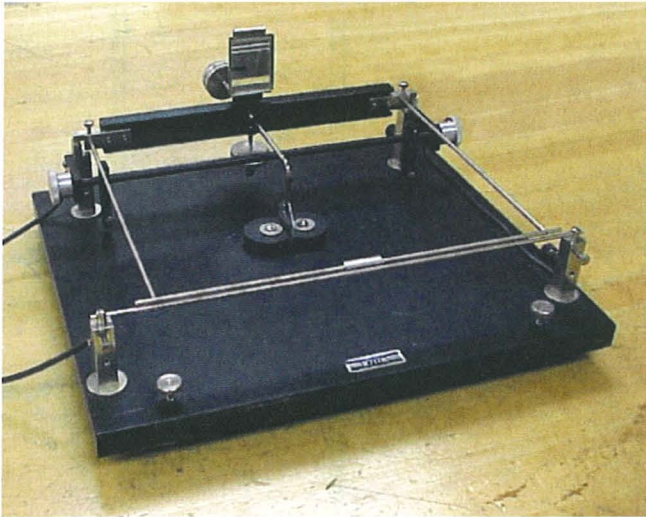
In Kapitel 21 haben wir die Einheit Coulomb mit Hilfe des Ampere definiert, jedoch die Definition des Ampere aufgeschoben. Wir wollen sie jetzt nachholen:



27.19 Zwei lange gerade Leiter, die von parallelen Strömen durchflossen werden. Das vom Strom I_1 erzeugte Magnetfeld \mathbf{B}_1 steht senkrecht auf I_2 . Die Kraft, die \mathbf{B}_1 auf I_2 ausübt, zeigt in Richtung des ersten Leiters. Das Magnetfeld des Stroms I_2 übt auf I_1 eine gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft aus. Deshalb ziehen die Leiter einander an.

Ein Ampere ist die Stärke eines zeitlich unveränderlichen Stroms, der durch zwei im Vakuum parallel im Abstand von 1 m angeordnete, geradlinige, unendlich lange Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigem Querschnitt fließt und zwischen diesen Leitern je 1 m Leiterlänge eine Kraft von $2 \cdot 10^{-7}$ N hervorruft.

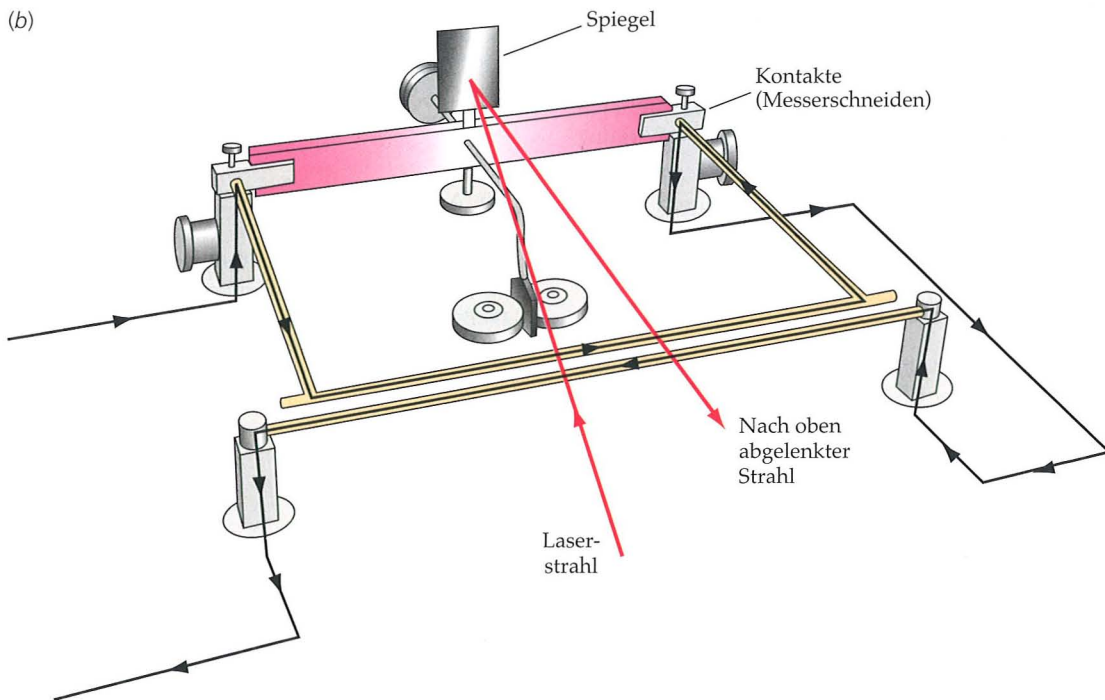
DEFINITION DES AMPERE



(a)

Durch diese Definition des Ampere ist der Wert der magnetischen Feldkonstante μ_0 exakt auf $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$ festgelegt. Außerdem ermöglicht sie die Messung der Einheit der Stromstärke (und damit auch der elektrischen Ladung) mit ausschließlich mechanischen Mitteln. In der Praxis wählt man den Abstand zwischen den (endlich) langen Leitern wesentlich geringer als 1 m, um die Kraft exakt messen zu können.

In Abbildung 27.20 sehen Sie eine **Stromwaage**, eine Vorrichtung, mit der man Amperemeter unter Verwendung der gegebenen Definition des Ampere eichen kann. Die beiden Leiter (Drähte oder Metallstäbe) sind übereinander angeordnet. Der obere Leiter ist rückwärtig auf Messerschneiden gelagert und kann ohne nennenswerte Reibung nach vorn und hinten kippen. Zu Beginn der Eichung wird der obere Leiter so ausbalanciert, dass der Abstand zwischen den beiden Leitern sehr klein ist. Die Leiter sind in Reihe geschaltet, so dass durch beide der gleiche Strom fließt. Da aber die Stromrichtungen entgegengesetzt sind, stoßen die Leiter einander ab, sobald der Strom ein-



27.20 a) Eine Stromwaage, wie sie in vielen physikalischen Labors verwendet wird. b) Schemazeichnung einer Stromwaage. Durch die beiden parallelen Stäbe im Vordergrund fließen gleich starke, aber entgegengesetzt gerichtete Ströme, weshalb die Leiter einander abstoßen. Der obere Stab ist über rechtwinklig angesetzte Verbindungsstäbe kippbar auf Messerschneiden gelagert, so dass der Spiegel je nach Position dieses Stabs aus der Senkrechten gekippt wird. Durch Tariergewichte auf dem oberen Stab gleicht man die nach dem Einschalten des Stroms wirkende Abstoßungskraft aus. Mit Hilfe eines Laserstrahls, der am Spiegel reflektiert wird, kann man die Position des oberen Leiterstabs exakt bestimmen.

BEISPIEL 27.8: Messung mit einer Stromwaage

In zwei 50 cm langen Leitern einer Stromwaage fließt (in entgegengesetzten Richtungen) jeweils ein Strom von 15 A. Die Entfernung zwischen den Achsen der Leiter beträgt 1,5 mm. Welche Masse muss man am oberen Stab anbringen, um die abstoßende Kraft zu kompensieren?

ZUR ÜBUNG

Problembeschreibung: Gleichung 27.13 gibt die Kraft an, die der obere Stab pro Längeneinheit auf den unteren Stab ausübt. Wir berechnen diese Kraft für einen Stab der Länge ℓ und setzen sie gleich der Gewichtskraft mg .

Lösung:

Decken Sie zunächst die rechte Spalte ab und versuchen Sie jeweils, die Ergebnisse selbst zu ermitteln.

Schritte

Ergebnisse

1. Setzen Sie die Gewichtskraft mg gleich der zwischen den Stäben wirkenden Abstoßungskraft.

$$mg = 2 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{r_\perp} \ell$$

2. Nun lösen Sie nach der Masse m auf.

$$m = 1,53 \cdot 10^{-3} \text{ kg} = \boxed{1,53 \text{ g}}.$$

Kommentar: Zum Ausgleich der Waage werden nur 1,53 g benötigt. Die Kraft zwischen geraden stromdurchflossenen Leitern ist, wie wir sehen, relativ gering, selbst wenn starke Ströme (15 A) fließen und die Leiter nur 1,5 mm voneinander entfernt sind.

geschaltet wird. Nun legt man Tariergewichte auf den oberen Leiter, bis der ursprüngliche Abstand wieder hergestellt ist. Man misst die Kraft (Abstoßung) zwischen den Leitern also über die Masse, die man benötigt, um die Waage ins Gleichgewicht zu bringen. Wie Beispiel 27.8 zeigt, ist diese Kraft relativ gering.

27.3 Der Gauß'sche Satz für Magnetfelder

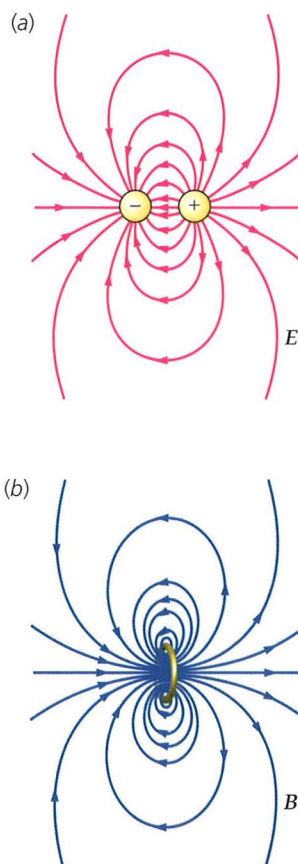
Die Magnetfeldlinien in den Abbildungen 27.6, 27.9 und 27.10 unterscheiden sich deutlich von elektrischen Feldlinien: Während die Linien von \mathbf{B} geschlossene Schleifen bilden, beginnen und enden die Linien von \mathbf{E} an elektrischen Ladungen. Als Analoga zu den elektrischen Ladungen sind magnetische Monopole zu betrachten, wie sie scheinbar an den Enden eines Stabmagneten auftreten. Die Magnetfeldlinien scheinen vom Nordpol des Magneten auszugehen und im Südpol wieder zusammenzulaufen (Abbildung 27.10b). Innerhalb des Magneten gibt es jedoch keinen Punkt nahe dem Nordpolende, in dem die Linien beginnen, und keinen Punkt in der Nähe des Südpolendes, in dem sie sich treffen; stattdessen verlaufen die Linien, wie in der Abbildung erkennbar ist, vom Süd- zurück zum Nordpol.

Wird ein Ende eines Stabmagneten von einer Gauß'schen Oberfläche umschlossen, so ist die Anzahl der Magnetfeldlinien, die durch die Fläche herausdringen, gleich der Anzahl der Feldlinien, die in die Fläche eintreten. Der magnetische Fluss Φ_{mag} durch eine beliebige geschlossene Fläche A ist stets null. (Wie Sie sich erinnern, ist der elektrische Fluss ein Maß für die Anzahl elektrischer Feldlinien, die eine geschlossene Oberfläche verlassen; es gilt $\Phi_{\text{el}} = q_{\text{innen}}/\epsilon_0$.) Demnach ist

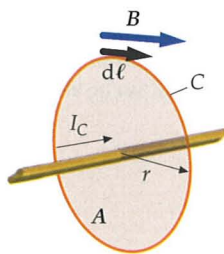
$$\Phi_{\text{mag}} = \oint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \oint_A B_n dA = 0 \quad (27.14)$$

GAUSS'SCHER SATZ FÜR MAGNETFELDER

mit B_n als Normalkomponente von \mathbf{B} bezüglich der Oberfläche A in einem Flächenelement $d\mathbf{A}$, das parallel zu \hat{n} gerichtet ist. Der magnetische Fluss Φ_{mag} ist exakt analog zum elektrischen Fluss definiert (wobei natürlich \mathbf{E} durch \mathbf{B} ersetzt wurde). Gleichung 27.14 wird deshalb als Gauß'scher Satz für Magnetfelder bezeichnet. Mit Worten ausgedrückt besagt die mathematische Formel: Es gibt keine Punkte im Raum, von denen Magnetfeldlinien ausgehen oder in denen sie zusammenlaufen. Magnetische Monopole gibt es nicht – zumindest wurden sie bislang noch nicht gefunden, obwohl dieses Thema nach wie vor kontrovers diskutiert und die Suche als noch nicht abgeschlossen betrachtet wird.



27.21 a) Elektrische Feldlinien eines elektrischen Dipols. b) Magnetfeldlinien eines magnetischen Dipols. In großer Entfernung von den Dipolen sind die Muster identisch. Im Gebiet zwischen den elektrischen Ladungen (a) ist die Richtung der elektrischen Feldlinien entgegengesetzt der Richtung des Dipolmoments; innerhalb der Leiter Schleife in b sind die Magnetfeldlinien parallel zur Richtung des Dipolmoments.



27.22 Die positive Richtung des Linienintegrals im Ampère'schen Gesetz hängt mit der positiven Richtung des durch die Oberfläche tretenden Stroms über eine Rechte-Hand-Regel zusammen.

Als fundamentale Einheit des Magnetismus gilt der magnetische Dipol. In Abbildung 27.21 wurden die Magnetfeldlinien eines magnetischen Dipols den elektrischen Feldlinien eines elektrischen Dipols gegenübergestellt. Wie Sie sehen, sind die Feldlinienmuster in großer Entfernung von den Dipolen identisch, innerhalb der Dipole aber sind die Feldlinien von \mathbf{E} denen von \mathbf{B} entgegengesetzt gerichtet. Elektrische Feldlinien gehen von der positiven Ladung aus und treffen sich am Ort der negativen Ladung, während Magnetfeldlinien in sich geschlossene Schleifen bilden.

27.4 Das Ampère'sche Gesetz

In Kapitel 22 haben wir gesehen, dass sich das elektrische Feld für hochgradig symmetrische Ladungsverteilungen einfacher mit dem Gauß'schen Satz berechnen lässt als mit dem Coulomb'schen Gesetz. Ähnlich ist die Situation für Magnetfelder. Das Ampère'sche Gesetz verknüpft die tangential Komponente B_t des Magnetfelds, summiert (integriert) entlang einer geschlossenen Kurve C , mit dem durch eine beliebige, von C begrenzte Fläche tretenden Strom I_C . Mit seiner Hilfe kann man das Magnetfeld in Anordnungen mit einem hohen Grad an Symmetrie ermitteln. Mathematisch ausgedrückt lautet das Ampère'sche Gesetz

$$\oint_C B_t d\ell = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{\ell} = \mu_0 I_C \quad (27.15)$$

(C ist eine beliebige, geschlossene Kurve).

AMPÈRE'SCHES GESETZ

I_C ist der insgesamt durch eine von C umschlossene Fläche A tretende Strom. Wie Abbildung 27.22 zeigt, hängt die positive tangential Richtung des Umlaufintegrals gemäß einer Rechte-Hand-Regel von der Wahl der positiven Richtung des durch A tretenden Stroms I_C ab. Das Ampère'sche Gesetz gilt für jede beliebige Kurve C , stationäre und kontinuierliche Ströme vorausgesetzt (d. h., der Strom ist zeitlich konstant und die Ladung sammelt sich nirgendwo an). Es eignet sich insbesondere dann zur Bestimmung des Magnetfelds, wenn die Situation einen hohen Grad an Symmetrie aufweist; dann lässt sich das Linienintegral $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{\ell}$ einfach als Produkt $\mathbf{B} \cdot (\oint_C d\mathbf{\ell})$ aus \mathbf{B} und einer Länge schreiben. $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{\ell}$ nennt man **Umlaufintegral**; es handelt sich um das Integral von \mathbf{B} über eine geschlossene Kurve C . Sowohl der Gauß'sche Satz als auch das Ampère'sche Gesetz sind von theoretischer Bedeutung. Beide Gesetze gelten unabhängig von der Symmetrie, für praktische Berechnungen aber sind sie weitgehend nutzlos, wenn die betrachtete Anordnung wenig oder nicht symmetrisch ist.

Die Anwendung des Ampère'schen Gesetzes soll an einem der einfachsten Fälle demonstriert werden, der Berechnung des Magnetfelds eines unendlich langen, geraden, stromdurchflossenen Leiters. In Abbildung 27.23 sehen Sie einen Kreis, auf dessen Symmetrieachse ein langer Draht liegt. Gemäß dem Biot-Savart'schen Gesetz zeigt das von jedem Stromelement erzeugte Magnetfeld in Richtung einer Tangente an den Kreis. Unter der Annahme, dass das Magnetfeld \mathbf{B} tangential zum Kreis ist, seine

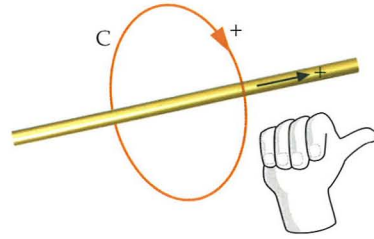
Richtung mit der von $d\ell$ übereinstimmt und $|\mathbf{B}|$ auf der Kreislinie konstant ist, ergibt das Ampère'sche Gesetz

$$B \oint_C d\ell = \mu_0 I_C$$

mit $B = B_t$. Dabei können wir den Faktor B vor das Integral ziehen, weil sein Wert in allen Punkten des Kreises gleich ist. Das Integral von $d\ell$ entlang des geschlossenen Kreises ist gleich dessen Umfang $2\pi r_\perp$, und I_C ist die Stromstärke I im Leiter. Wir erhalten $B 2\pi r_\perp = \mu_0 I$ und daraus

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_\perp},$$

was genau Gleichung 27.12 entspricht. Dieses Ergebnis wird in Beispiel 27.9 noch einmal im Zusammenhang mit dem Magnetfeld innerhalb und außerhalb eines stromdurchflossenen Drahts hergeleitet.



27.23 Geometrische Skizze zur Berechnung des Magnetfelds eines langen, geraden, stromdurchflossenen Leiters mit Hilfe des Ampère'schen Gesetzes. Auf einem Kreis um den Leiter ist das Magnetfeld konstant und verläuft tangential zum Kreis.

BEISPIEL 27.9: B innerhalb und außerhalb eines Drahts

Ein langer, gerader Draht mit dem Radius r_{LD} werde von einem Strom I durchflossen; die Stromdichte sei über den kreisförmigen Querschnitt des Drahts hinweg konstant. Bestimmen Sie das Magnetfeld innerhalb und außerhalb des Leiters.

Problembeschreibung: Wegen der Symmetrie der Anordnung können wir das Magnetfeld mit Hilfe des Ampère'schen Gesetzes berechnen. Wir wissen, dass \mathbf{B} auf einem Kreis mit dem Radius r_\perp (der Kurve C in Abbildung 27.24) um den Mittelpunkt des Leiters überall denselben Betrag hat und in Richtung der Tangente an den Kreis zeigt. Der Strom durch die von C umschlossene Fläche A hängt davon ab, ob r_\perp größer oder kleiner ist als der Radius des Drahts, r_{LD} .

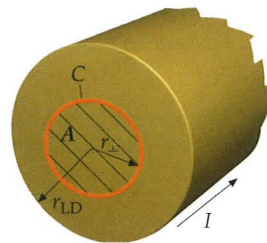
Lösung:

1. Mit Hilfe des Ampère'schen Gesetzes stellen Sie einen Zusammenhang zwischen dem Integral von \mathbf{B} entlang der geschlossenen Kurve C und dem Strom her, der durch die von C umschlossene Fläche A tritt:

2. Das Integral lösen Sie, wobei Sie für die Kurve C einen Kreis mit dem Radius r_\perp einsetzen, dessen Symmetrieachse auf der Achse des Drahts liegt:

3. Nun setzen Sie dies in das Ampère'sche Gesetz ein und lösen nach B auf:

4. Außerhalb des Drahts ist $r_\perp > r_{LD}$. Durch die von C umschlossene Fläche tritt dann der gesamte Strom:



27.24

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 I_C$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\ell = B \oint_C d\ell = B 2\pi r_\perp$$

$$B 2\pi r_\perp = \mu_0 I_C$$

also

$$B = \frac{\mu_0 I_C}{2\pi r_\perp}$$

$$I_C = I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_\perp} \quad (r_\perp \geq r_{LD})$$

5. Innerhalb des Drahts ist $r_{\perp} < r_{LD}$. Unter der Voraussetzung, dass die Stromdichte über den Querschnitt des Drahts hinweg konstant ist, können Sie I_C wie folgt zum Gesamtstrom in Beziehung setzen:

$$\frac{I_C}{\pi r_{\perp}^2} = \frac{I}{\pi r_{LD}^2}$$

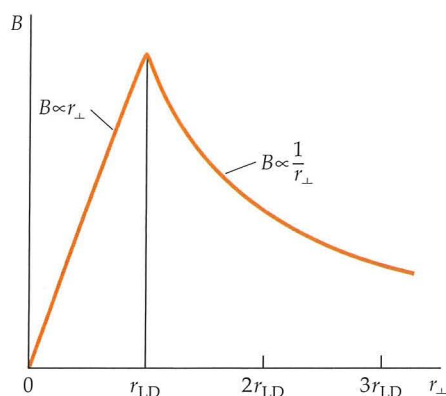
$$I_C = \frac{r_{\perp}^2}{r_{LD}^2} I$$

also

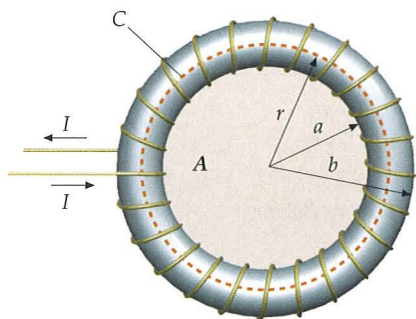
$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_C}{r_{\perp}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{(r_{\perp}^2/r_{LD}^2)I}{r_{\perp}}$$

$$= \boxed{\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r_{LD}^2} r_{\perp} \quad (r_{\perp} \leq r_{LD})}$$

Kommentar: Innerhalb des Drahts nimmt das Magnetfeld mit der Entfernung vom Mittelpunkt zu. Abbildung 27.25 zeigt den Verlauf von B als Funktion von r_{\perp} für dieses Beispiel.



27.25 Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters mit dem Radius r_{LD} bei homogener Stromdichte als Funktion des Abstands r_{\perp} von der Leiterachse.



27.26 Eine Ringspule besteht aus Drahtschleifen, die um eine Ringröhre gewickelt sind. Das Magnetfeld in einem beliebigen Abstand r vom Mittelpunkt des Rings kann man durch Anwendung des Ampère'schen Gesetzes auf einen Kreis mit dem Radius r berechnen. Jede Windung des Drahts tritt einmal durch die Fläche A .

Beispiel 27.9 entnehmen wir, dass ein homogen über den Querschnitt eines Drahts mit dem Radius r_{LD} verteilter Strom das Magnetfeld

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_{LD}^2} r_{\perp} \quad (r_{\perp} \leq r_{LD})$$

bzw.

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r_{\perp}} \quad (r_{\perp} \geq r_{LD}) \quad (27.16)$$

hervorruft.

Unsere nächste Anwendung des Ampère'schen Gesetzes besteht darin, das Magnetfeld einer dicht gewickelten **Toroid-** oder **Ringspule** zu berechnen. Eine solche Spule besteht aus Drahtschleifen, die um eine zum Ring geschlossene Röhre gewickelt sind (Abbildung 27.26). In jeder der n Windungen fließt ein Strom I . Zur Berechnung von B ermitteln wir den Wert des Umlaufintegrals $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ entlang eines Kreises mit dem Radius r , dessen Mittelpunkt das Zentrum der Ringröhre ist. Aus Symmetriegründen ist der Betrag von B an allen Punkten der Kreislinie konstant, und B zeigt jeweils in Richtung der Tangente an den Kreis. Dann ist

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B 2\pi r = \mu_0 I_C.$$

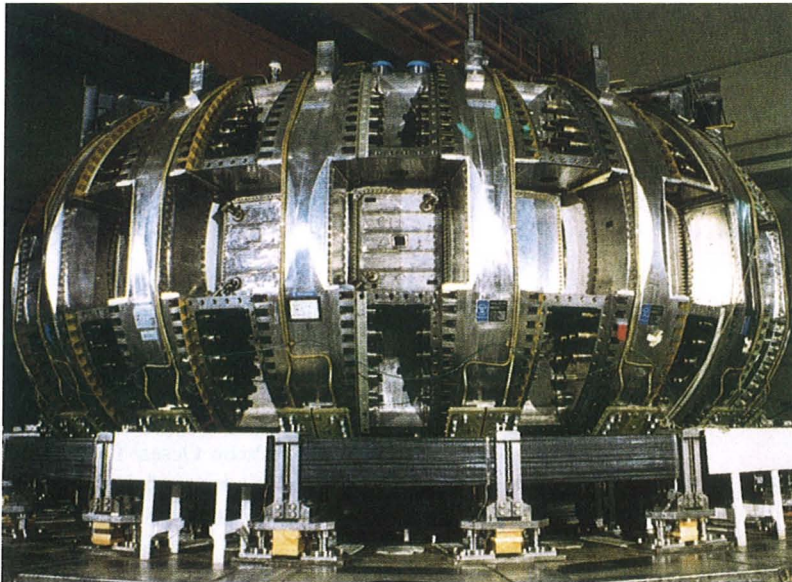
a und b sind der Innen- bzw. Außenradius der Ringröhre. Der Gesamtstrom durch die von einem Kreis mit dem Radius r umschlossene Fläche A mit $a < r < b$ beträgt nI . Mit dem Ampère'schen Gesetz erhalten wir

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_C \quad \text{oder} \quad B 2\pi r = \mu_0 nI$$

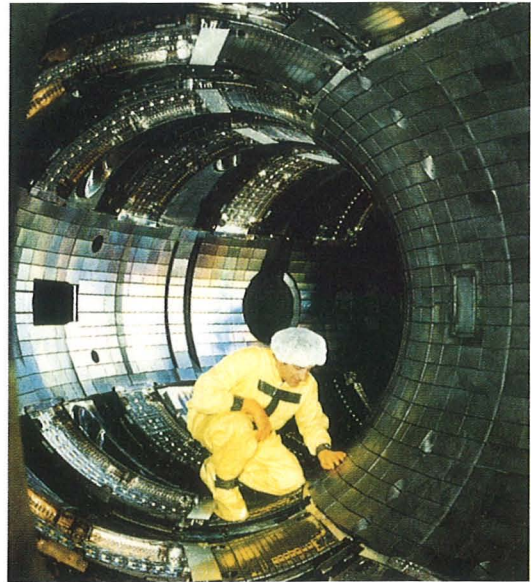
oder

$$B = \frac{\mu_0 nI}{2\pi r}, \quad a < r < b. \quad (27.17)$$

MAGNETFELD INNERHALB EINER DICHT GEWICKELTEN RINGSPULE



(a)



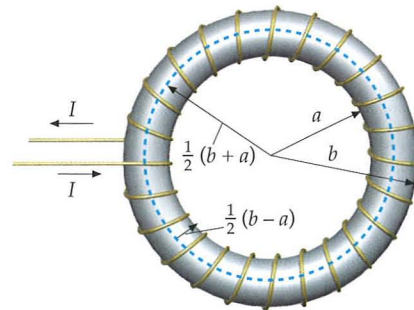
(b)

a) Dieser Tokamak-Reaktor, eine Versuchsanlage für die kontrollierte Kernfusion, hat die Form eines großen Toroids. Er erzeugt ein starkes Magnetfeld zur Speicherung geladener Teilchen. In Spulen, die mehr als 10 km wassergekühlten Kupferdraht enthalten, fließt ein gepulster Strom, dessen Spitzenwert bei 73 000 A liegt. Er erzeugt für etwas 3 s ein Magnetfeld von 5,2 T. b) Inspektion der Reaktorordnung von innen.

Ist r kleiner als a , fließt durch die Fläche A kein Strom. Ist r größer als b , ist der Gesamtstrom durch A ebenfalls gleich null: Jede Windung des Drahts tritt dann zweimal durch A , weshalb es zu jedem Strom I , der in die Papierebene hineingeht, einen gleich großen Strom gibt, der aus der Papierebene herauskommt (Abbildung 27.27). Das Magnetfeld ist also sowohl für $r < a$ als auch für $r > b$ gleich null:

$$B=0 \quad \text{für } r < a \quad \text{oder } r > b.$$

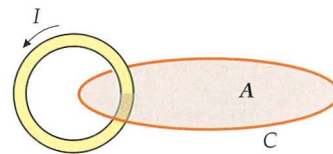
Die Magnetfeldstärke im Inneren der Ringspule ist nicht homogen, sondern nimmt mit steigendem r ab (siehe Gleichung 27.17). Ist jedoch der Radius der einzelnen Windungen, $\frac{1}{2}(b-a)$, viel kleiner als der mittlere Radius $\frac{1}{2}(b+a)$ der Spule selbst, so ist der Unterschied zwischen $r=a$ und $r=b$ relativ gering; B ist dann annähernd homogen wie in einer Zylinderspule.



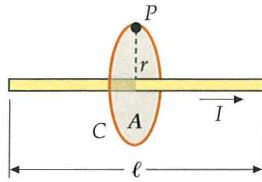
27.27 Der mittlere Radius der Ringspule ist $r = \frac{1}{2}(b+a)$ mit a als Innen- und b als Außenradius. Jede Drahtwindung entspricht einem Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}(b-a)$.

Grenzen der Gültigkeit des Ampère'schen Gesetzes

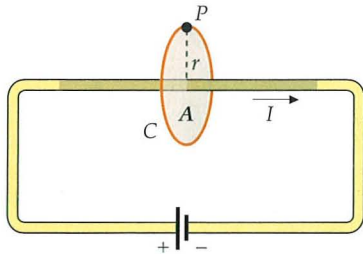
Ein Magnetfeld mit Hilfe des Ampère'schen Gesetzes zu berechnen, ist nur sinnvoll, wenn die Anordnung einen hohen Grad an Symmetrie aufweist und wenn der Strom im Raum stetig ist. Betrachten wir die Leiterschleife in Abbildung 27.28. Nach dem Ampère'schen Gesetz ist das Linienintegral $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C B_t d\mathbf{l}$ entlang einer Kurve C (etwa des in der Abbildung eingezeichneten Kreises) gleich dem Produkt aus μ_0 und der Stromstärke I in der Schleife. Für die gewählte Kurve ist das Ampère'sche Gesetz zwar gültig, aber die Tangentialkomponente B_t des Magnetfelds ist nicht entlang aller Kurven, die den Strom umschließen können, konstant. Die Anordnung ist also nicht symmetrisch genug, um das Integral $\oint_C B_t d\mathbf{l}$ auszuwerten und B_t berechnen zu können.



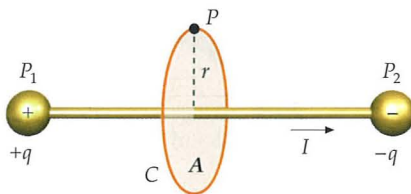
27.28 Zwar gilt für die eingezeichnete Kurve C , die den Strom in der Leiterschleife umschließt, das Ampère'sche Gesetz, aber dieses eignet sich hier nicht zur Berechnung von B_t , denn B_t lässt sich nicht als konstanter Faktor vor das Integral ziehen.



27.29 Die Anwendung des Ampère'schen Gesetzes zur Berechnung des Magnetfelds in der Mitte eines endlich langen Leiterabschnitts liefert ein falsches Ergebnis.



27.30 Ist der Leiterabschnitt aus Abbildung 27.29 Teil eines geschlossenen Stromkreises, so gilt zwar das Ampère'sche Gesetz für die Kurve C, zur Berechnung des Magnetfelds in P reicht die Symmetrie der Anordnung aber nicht aus.



27.31 Fließt durch den Leiterabschnitt aus Abbildung 27.29 kurzzeitig ein Strom (etwa infolge der Entladung kleiner, geladener Kugeln an den Enden), so reicht die Symmetrie zur Anwendung des Ampère'schen Gesetzes aus, um das Magnetfeld in P zu berechnen. Das Ampère'sche Gesetz gilt hier aber nicht, weil der Strom im Raum nicht stetig ist.

Abbildung 27.29 zeigt einen endlich langen Leiterabschnitt der Länge ℓ . Zu berechnen ist das Magnetfeld in einem Punkt P, der von den Enden des Leiterabschnitts gleich weit entfernt ist und dessen Abstand zur Mitte des Leiters gleich r ist. Die direkte Anwendung des Ampère'schen Gesetzes liefert

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}.$$

Das gleiche Ergebnis erhalten wir für einen unendlich langen Draht, denn die Symmetrie der Anordnungen ist gleich. Dies widerspricht allerdings dem Biot-Savart'schen Gesetz, das ein von der Länge des Drahts abhängiges Resultat liefert und mit dem experimentellen Befund im Einklang steht. Ist der Leiterabschnitt Teil eines geschlossenen Stromkreises wie in Abbildung 27.30, so gilt zwar das Ampère'sche Gesetz für die Kurve C, es kann aber aufgrund der niedrigen Symmetrie der Anordnung nicht zur Berechnung des Magnetfelds in P verwendet werden.

In Abbildung 27.31 sehen Sie einen Leiterabschnitt, an dessen Enden jeweils eine leitende Kugel sitzt. Zu Beginn des Experiments tragen die Kugeln die Ladung $-q$ (links) bzw. $+q$ (rechts); sobald die Verbindung zwischen den Kugeln geschlossen wird, fließt für kurze Zeit ein Strom $I = -dq/dt$ durch den Leiterabschnitt, bis die Kugeln entladen sind. In diesem Fall ist die Symmetrie der Anordnung hoch genug, um davon auszugehen, dass \mathbf{B} tangential zur Kurve C verläuft und der Betrag von \mathbf{B} in allen Punkten der Kurve gleich ist. Allerdings ist der Strom hier im Raum nicht stetig, denn er bildet keine geschlossene Schleife. Folglich ist das Ampère'sche Gesetz nicht gültig. Wie wir in Kapitel 30 sehen werden, gelang es James C. Maxwell, das Ampère'sche Gesetz so zu erweitern, dass es für Anordnungen aller Art gilt. Diese verallgemeinerte Form des Ampère'schen Gesetzes, angewendet auf Leiterabschnitte wie den in Abbildung 27.31 dargestellten, liefert dann die gleichen Resultate wie das Biot-Savart'sche Gesetz.

27.5 Magnetismus in Materie

Jedes Atom besitzt ein magnetisches Dipolmoment aufgrund der Bewegung seiner Elektronen. Zusätzlich sind auch mit den Spins der einzelnen Elektronen magnetische Momente verbunden. Im Gegensatz zu elektrischen Dipolen richten sich magnetische Dipole parallel zu einem äußeren Feld aus und verstärken dieses. Anschaulich wird dieser Unterschied in Abbildung 27.21, die elektrische Feldlinien eines elektrischen Dipols den Magnetfeldlinien eines magnetischen Dipols gegenüberstellt: In hinreichend großer Entfernung von den Dipolen sind die Linienmuster identisch. Im Bereich zwischen den Ladungen des elektrischen Dipols jedoch sind die elektrischen Feldlinien dem Dipolmoment entgegengesetzt gerichtet, während die Magnetfeldlinien innerhalb der Leiterschleife parallel zum magnetischen Dipolmoment verlaufen. In magnetisch polarisierten Materialien werden folglich Magnetfelder erzeugt, die zum Vektor des magnetischen Dipolmoments parallel sind.

Nach dem Verhalten ihrer magnetischen Momente in einem äußeren Magnetfeld lassen sich alle Materialien in eine von drei Kategorien einordnen: **paramagnetische**, **diamagnetische** und **ferromagnetische** Stoffe. Paramagnetisches Verhalten ist

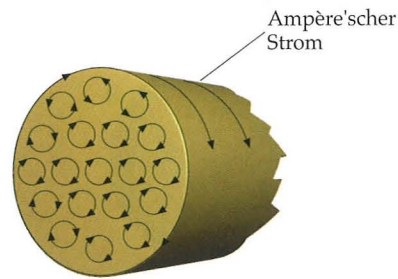
durch die teilweise Ausrichtung der Elektronenspins (in Metallen) oder der magnetischen Momente von Atomen oder Molekülen bei Anlegen eines äußeren Felds gekennzeichnet. Liegt kein äußeres Magnetfeld an, so sind in paramagnetischen Materialien die Wechselwirkungen der magnetischen Dipole untereinander nur schwach ausgeprägt, und die Dipolmomente sind zufällig orientiert. Durch Anlegen eines Magnetfelds werden die Dipole teilweise in Feldrichtung orientiert, wodurch sich das Feld verstärkt. Allerdings bewirken äußere Magnetfelder gewöhnlicher Stärke bei Zimmertemperatur die Ausrichtung nur eines kleinen Teils der Dipole, weil deren thermische Bewegung dem Effekt entgegenwirkt, und die Verstärkung des Magnetfelds ist äußerst gering. Bei ferromagnetischen Materialien sind die Verhältnisse weitaus komplizierter. Die starke Wechselwirkung benachbarter magnetischer Dipole führt zur Ausrichtung sehr vieler Dipole bereits beim Anlegen schwacher äußerer Felder. Oft sind die magnetischen Dipole auch in Abwesenheit eines äußeren Magnetfelds parallel ausgerichtet (wie bei Permanentmagneten). In Diamagneten werden beim Anlegen eines äußeren Magnetfelds aufgrund der Elektronenbewegung magnetische Dipole induziert. Sie sind antiparallel zum äußeren Feld gerichtet und schwächen dieses folglich ab. Diamagnetismus tritt bei allen Materialien auf; er wird aber, weil die induzierten verglichen mit den permanenten magnetischen Momenten sehr klein sind, häufig durch Para- oder Ferromagnetismus überdeckt und lässt sich deshalb nur bei Materialien beobachten, die keine permanenten magnetischen Dipolmomente aufweisen.

Magnetisierung und magnetische Suszeptibilität

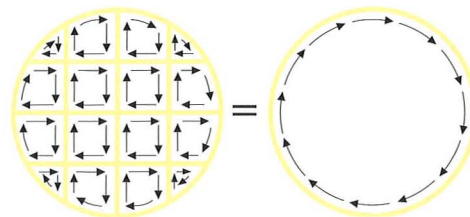
Bringt man einen Stoff in ein starkes Magnetfeld, etwa das einer stromdurchflossenen Spule, so werden die (induzierten oder permanenten) magnetischen Momente im Inneren des Materials ausgerichtet – das Material wird magnetisiert. Die charakteristische Messgröße hierfür ist die **Magnetisierung M** , definiert als das resultierende magnetische Moment pro Volumeneinheit:

$$M = \frac{d\mu}{dV} \quad (27.18)$$

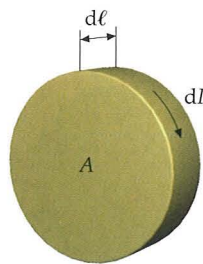
Lange bevor sich konkrete Vorstellungen über den Aufbau von Atomen oder Molekülen entwickelt hatten, führte Ampère die Magnetisierung bereits auf mikroskopische Kreisströme im Inneren des Stoffs zurück. Inzwischen wissen wir, dass diese Kreisströme als klassisches Modell für die Bahnbewegung und die Spins der Elektronen in den Atomen gelten können. Betrachten wir einen Zylinder, der aus einem magnetisierten Material besteht (Abbildung 27.32). Die magnetischen Momente der skizzierten atomaren Kreisströme sind parallel zur Achse des Zylinders ausgerichtet. Da benachbarte Kreisströme sich gegenseitig aufheben (eine homogene Magnetisierung des Materials vorausgesetzt), ist der Strom im Inneren des Körpers überall null; nur an der Oberfläche fließt ein Strom (Abbildung 27.33). Dieser Oberflächenstrom wird **Ampère'scher Strom** genannt und ähnelt dem Strom in den Windungen einer Zylinderspule.



27.32 Ein Modell atomarer Kreisströme; alle magnetischen Dipolmomente sind parallel zur Achse des Zylinders ausgerichtet. Da sich benachbarte Kreisströme gegenseitig aufheben, ist der resultierende Strom im Inneren des Zylinders null; lediglich an der Oberfläche fließt ein Strom, vergleichbar dem Strom in den Windungen einer Zylinderspule.



27.33 In jedem Punkt im Inneren eines homogen magnetisierten Materials heben benachbarte Kreisströme einander auf, und zwar unabhängig von der Form der Kurven, die die Ströme beschreiben. Übrig bleibt nur ein Oberflächenstrom.



27.34 Scheibenmodell zur Erklärung der Beziehung zwischen Magnetisierung M und Ampère'schem Strom pro Längeneinheit.

Tabelle 27.1 Magnetische Suszeptibilität verschiedener Materialien bei 20 °C

Material	χ_{mag}
Aluminium	$2,3 \cdot 10^{-5}$
Bismut	$-1,66 \cdot 10^{-5}$
Kupfer	$-0,98 \cdot 10^{-5}$
Diamant	$-2,2 \cdot 10^{-5}$
Gold	$-3,6 \cdot 10^{-5}$
Magnesium	$1,2 \cdot 10^{-5}$
Quecksilber	$-3,2 \cdot 10^{-5}$
Silber	$-2,6 \cdot 10^{-5}$
Natrium	$-0,24 \cdot 10^{-5}$
Titan	$7,06 \cdot 10^{-5}$
Wolfram	$6,8 \cdot 10^{-5}$
Wasserstoff (1 atm)	$-9,9 \cdot 10^{-9}$
Kohlendioxid (1 atm)	$-2,3 \cdot 10^{-9}$
Stickstoff (1 atm)	$-5,0 \cdot 10^{-9}$
Sauerstoff (1 atm)	$2090 \cdot 10^{-9}$

Abbildung 27.34 zeigt eine kleine Kreisscheibe mit der Querschnittsfläche A , der Dicke $d\ell$ und dem Volumen $dV = A d\ell$. Der Ampère'sche Strom an der Oberfläche der Scheibe sei dI . Das magnetische Dipolmoment der Scheibe ist gleich demjenigen einer vom Strom dI durchflossenen Leiterschleife mit der Fläche A :

$$d\mu = A dI.$$

Die Magnetisierung entspricht dem magnetischen Moment pro Volumeneinheit:

$$M = \frac{d\mu}{dV} = \frac{A dI}{A d\ell} \hat{n} = \frac{dI}{d\ell} \hat{n}. \quad (27.19)$$

(Bitte verwechseln Sie das Drehmoment M nicht mit der Magnetisierung M ; in diesem Kapitel treten diese beiden Größen an verschiedenen Stellen auf.) Die Magnetisierung ergibt sich nun als Verhältnis von Ampère'schem Strom an der Oberfläche des magnetisierten Körpers zur Längeneinheit. Das bedeutet, die Einheit von M ist Ampere pro Meter.

Betrachten wir jetzt einen Zylinder mit einer homogenen Magnetisierung M parallel zu seiner Achse. Die Magnetisierung wirkt so, als fließe an der Oberfläche des Zylinders ein Ampère'scher Strom pro Längeneinheit vom Betrag $|M|$. Dieser Strom wiederum ist mit dem Strom in den Windungen einer dicht gewickelten Zylinderspule vergleichbar. Für eine solche Spule ist der Strom pro Längeneinheit gleich $(n/\ell)I$ mit I als Strom in jeder einzelnen Windung und (n/ℓ) als Windungsdichte. Das Magnetfeld B_{mag} im Inneren des Zylinders, hinreichend weit von dessen Enden entfernt, ist dann durch Gleichung 27.9 gegeben, wobei wir $(n/\ell)I\hat{n}$ durch M ersetzen:

$$B_{\text{mag}} = \mu_0 M. \quad (27.20)$$

Stellen wir uns nun vor, wir bringen einen Zylinder aus einem magnetischen Material ins Innere einer langen Spule mit n Windungen pro Längeneinheit, in der ein Strom I fließt. Durch das Magnetfeld im Inneren der Spule B_{aus} wird das Material des Zylinders magnetisiert, seine Magnetisierung ist M . Innerhalb der Spule (weit von ihren Enden entfernt) setzt sich das Magnetfeld dann aus dem Feld der Spule selbst und dem Feld des magnetisierten Materials zusammen:

$$B = B_{\text{aus}} + \mu_0 M. \quad (27.21)$$

Für paramagnetische und ferromagnetische Materialien sind M und B_{aus} gleich gerichtet, für diamagnetische entgegengesetzt. Bei para- und diamagnetischen Stoffen ist die Magnetisierung proportional zum anliegenden, die Ausrichtung der Dipole bewirkenden Feld. Wir können also schreiben:

$$M = \chi_{\text{mag}} \frac{B_{\text{aus}}}{\mu_0} \quad (27.22)$$

mit χ_{mag} als dimensionslosem konstantem Faktor, der **magnetischen Suszeptibilität**. Gleichung 27.21 wird damit zu

$$B = B_{\text{aus}} + \mu_0 M = B_{\text{aus}} \left(1 + \chi_{\text{mag}} \right) = \mu_{\text{rel}} B_{\text{aus}} \quad (27.23)$$

mit

$$\mu_{\text{rel}} = 1 + \chi_{\text{mag}} \quad (27.24)$$

als **relativer Permeabilität** des Materials. Für paramagnetische Stoffe ist χ_{mag} eine kleine, positive Zahl, deren Wert von der Temperatur abhängt. Bei diamagnetischen Stoffen (mit Ausnahme von Supraleitern) ist χ_{mag} klein, negativ und unabhängig von der Temperatur. In Tabelle 27.1 wurden magnetische Suszeptibilitäten verschiedener para- und diamagnetischer Materialien zusammengestellt. Wie Sie sehen, liegen die Suszeptibilitäten der aufgeführten festen Stoffe in der Größenordnung von 10^{-5} und $\mu_{\text{rel}} \approx 1$.

Im Falle ferromagnetischer Materialien ist die Diskussion der Magnetisierung wesentlich komplizierter, wie Sie weiter unten sehen werden. Die relative Permeabilität μ_{rel} , definiert als das Verhältnis B/B_{aus} , ist dann nicht konstant; ihr Wert kann zwischen 5000 und 100 000 liegen. Für Permanentmagneten ist μ_{rel} überhaupt nicht definiert, weil diese Stoffe auch in Abwesenheit äußerer Magnetfelder magnetisch sind.

Magnetische Momente von Atomen

Die Magnetisierung eines para- oder ferromagnetischen Stoffes lässt sich auf die permanenten magnetischen Momente der einzelnen Atome oder Elektronen des Materials zurückführen. Das magnetische (Bahn-)Moment eines Elektrons in einem Atom ist ein quantenmechanisches Phänomen, es kann aber halbklassisch hergeleitet werden. Dazu betrachten wir ein Teilchen mit der Masse m und der Ladung q , das sich mit der Geschwindigkeit v auf einer Kreisbahn mit dem Radius r bewegt (Abbildung 27.35). Der Bahndrehimpuls des Teilchens ist

$$L = mvr. \quad (27.25)$$

Das magnetische Moment ergibt sich als Produkt aus dem Strom und der Fläche des Kreises:

$$\mu = IA = I\pi r^2.$$

T sei die Zeit, in der sich die Ladung einmal vollständig um die Kreisbahn bewegt. Der Strom – die einen bestimmten Punkt pro Zeiteinheit durchlaufende Ladung – ist dann q/T . Da die Periode T des Umlaufs gleich dem Quotienten aus dem Kreisumfang $2\pi r$ und der Geschwindigkeit v ist, erhalten wir für den Strom

$$I = \frac{q}{T} = \frac{qv}{2\pi r}.$$

Das magnetische Moment ist damit

$$\mu = IA = \frac{qv}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{1}{2} qvr. \quad (27.26)$$

Wir setzen $vr = L/m$ aus Gleichung 27.25 ein:

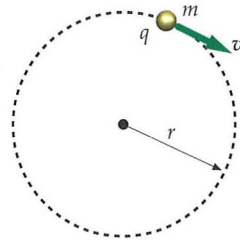
$$\mu = \frac{q}{2m} L.$$

Ist die Ladung q positiv, zeigen der Drehimpuls und das magnetische Moment in die gleiche Richtung, und wir können schreiben:

$$\mu = \frac{q}{2m} L. \quad (27.27)$$

KLASSISCHE BEZIEHUNG ZWISCHEN MAGNETISCHEM MOMENT UND BAHNDREHIMPULS

Gleichung 27.27 drückt die allgemeine klassische Beziehung zwischen dem magnetischen Moment und dem Bahndrehimpuls aus. Auch in der Quantentheorie des Atoms gilt sie für den Bahndrehimpuls, nicht aber für den Spin des Elektrons. Das mit dem Elektronenspin verknüpfte magnetische Moment ist doppelt so groß wie das gemäß Gleichung 27.27 vorhergesagte. Der Faktor 2 folgt aus der Quantentheorie und kann auf klassische Weise nicht erklärt werden. – Dieses Resultat (und die Existenz des Elektronenspins selbst) wurde 1927 von Paul Dirac vorhergesagt. Durch Kombination der speziellen Relativitätstheorie und der Quantenmechanik leitete Dirac eine relativistische Wellengleichung her, die Dirac'sche Gleichung. Hochpräzise Messungen ergaben, dass das magnetische Moment des Elektrons infolge seines Spins genau 2,00232-mal so groß ist wie der gemäß Gleichung 27.27 zu erwartende



27.35 Ein Teilchen mit der Ladung q und der Masse m bewegt sich mit der Geschwindigkeit v auf einer Kreisbahn mit dem Radius r . Der Drehimpulsvektor zeigt in die Papierebene hinein, es gilt $L = mvr$; wenn q positiv ist, zeigt der Vektor des magnetischen Moments ebenfalls in die Papierebene hinein, es gilt $\mu = \frac{1}{2} qvr$.

Wert. Diese Tatsache führt uns vor Augen, dass das einfache Modell des Elektrons, eine rotierende Kugel, nicht der physikalischen Wirklichkeit entspricht.

Der Quantentheorie zufolge ist der Bahndrehimpuls gequantelt (er kann nur bestimmte Werte annehmen). Gleiches gilt dann für das magnetische Moment eines Atoms. Der Bahndrehimpuls entspricht stets ganzzahligen Vielfachen von $\hbar = h/2\pi$ (h ist die Planck'sche Konstante). Wir können das magnetische Moment deshalb mit Hilfe von L/\hbar aufschreiben:

$$\mu = \frac{q\hbar}{2m} \frac{L}{\hbar}.$$

Für ein Elektron gilt $m = m_e$ und $q = -e$. Das magnetische Bahnmoment eines Elektrons ist folglich

$$\mu_L = -\frac{e\hbar}{2m_e} \frac{L}{\hbar} = -\mu_{\text{Bohr}} \frac{L}{\hbar}. \quad (27.28)$$

MAGNETISCHES BAHNMOMENT EINES ELEKTRONS

μ_{Bohr} im letzten Term ist das Quant des magnetischen Moments, das **Bohr'sche Magneton**:

$$\begin{aligned} \mu_{\text{Bohr}} &= \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2 = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ J/T} \\ &= 5,79 \cdot 10^{-5} \text{ eV/T}. \end{aligned} \quad (27.29)$$

BOHR'SCHES MAGNETON

Das vom Spindrehimpuls S eines Elektrons hervorgerufene magnetische Moment ist gegeben durch

$$\mu_S = -2 \frac{e\hbar}{2m_e} \frac{S}{\hbar} = -2\mu_{\text{Bohr}} \frac{S}{\hbar}. \quad (27.30)$$

MAGNETISCHES SPINMOMENT EINES ELEKTRONS

BEISPIEL 27.10: Die Sättigungsmagnetisierung von Eisen

Berechnen Sie die Sättigungsmagnetisierung und das von ihr bewirkte Magnetfeld von Eisen. Nehmen Sie dazu an, das magnetische Moment jedes Eisenatoms ist gleich einem Bohr'schen Magneton.

Problembeschreibung: Die Zahl der Eisenatome pro Volumeneinheit berechnen wir aus der Dichte von Eisen, $\rho = 7,9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, und seiner molaren Masse $m_{\text{mol}} = 55,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$.

Lösung:

1. Die Sättigungsmagnetisierung ist gleich dem Produkt aus der Anzahlichte der Atome und dem magnetischen Moment jedes Atoms:

$$M_s = \frac{n}{V} \mu$$

2. In die Berechnung der Anzahlichte der Eisenatome fließen die Avogadro-Konstante sowie die molare Masse und die Dichte von Eisen ein:

$$\begin{aligned} \frac{n}{V} &= \frac{n_A}{m_{\text{Mol}}} \rho = \frac{6,02 \cdot 10^{23} \text{ Atome/mol}}{55,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}} (7,9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3) \\ &= 8,52 \cdot 10^{28} \text{ Atome/m}^3 \end{aligned}$$

3. Dieses Ergebnis und $\mu = 1\mu_B$ setzen Sie nun in die Gleichung für die Sättigungsmagnetisierung ein:

$$\begin{aligned} M_s &= \frac{n}{V} \mu = (8,52 \cdot 10^{28} \text{ Atome/m}^3) \cdot (9,27 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2) \\ &= \boxed{7,90 \cdot 10^5 \text{ A/m}} \end{aligned}$$

4. Von dieser maximalen Magnetisierung wird auf der Achse eines langen Eisenzylinders das Magnetfeld $B = \mu_0 M_s$ bewirkt:

$$\begin{aligned} B &= \mu_0 M_s \\ &= (4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{A}) \cdot (7,90 \cdot 10^5 \text{ A/m}) \\ &= \boxed{0,993 \text{ T} \approx 1 \text{ T}} \end{aligned}$$

Kommentar: Für das gesättigte Magnetfeld von gehärtetem Eisen misst man einen Wert von 2,16 T. Folglich ist das magnetische Moment eines einzelnen Eisenatoms etwas größer als zwei Bohr'sche Magnetons. Dieses magnetische Moment ist im Wesentlichen auf die Spins der beiden ungepaarten Elektronen im Eisenatom zurückzuführen.

Die quantentheoretische Berechnung der magnetischen Momente von Atomen ist kompliziert. Das Ergebnis lautet in Übereinstimmung mit Theorie und Experiment, dass die magnetischen Momente aller Atome in der Größenordnung weniger Bohr'scher Magnetons liegen. Ist der resultierende Bahndrehimpuls in einem Atom null, so ist auch das resultierende magnetische Moment null. Der resultierende Bahndrehimpuls hängt von der Schalenstruktur der Atome ab, der wir uns in Kapitel 36 zuwenden werden.

Sind in einem Material die magnetischen Momente aller Atome oder Moleküle ausgerichtet, so ist das magnetische Moment pro Volumeneinheit gleich dem Produkt aus der Anzahl (n/V) der Moleküle pro Volumeneinheit und dem magnetischen Moment μ jedes einzelnen Moleküls. Für diesen extremen Fall ist die **Sättigungsmagnetisierung** M_s gegeben durch

$$M_s = \frac{n}{V} \mu.$$

Die Anzahl der Moleküle pro Volumeneinheit (die Anzahlichte) lässt sich, wie Beispiel 27.10 zeigt, aus der Molmasse m_{Mol} , der Dichte ρ des Stoffs und der Avogadro-Konstante n_A berechnen:

$$\frac{n}{V} = \frac{n_A (\text{Atome/mol})}{m_{\text{Mol}} (\text{kg/mol})} \rho (\text{kg/m}^3). \quad (27.32)$$

Paramagnetismus*

Paramagnetische Stoffe besitzen eine sehr kleine, positive magnetische Suszeptibilität χ_{mag} , denn die permanenten magnetischen Momente ihrer Atome wechselwirken nur schwach miteinander. Liegt kein äußeres Magnetfeld an, so zeigen diese magnetischen Momente in zufällige Raumrichtungen. Bei Anwesenheit eines äußeren Felds richten sich die magnetischen Momente bis zu einem gewissen Grad in Feldrichtung aus, dieser Tendenz entgegen wirkt jedoch die thermische Bewegung. Wie viele magnetische Momente sich tatsächlich ausrichten, hängt deshalb nicht nur von der Stärke des äußeren Felds, sondern auch von der Temperatur ab. Generell bleibt das Ausmaß der Ausrichtung gering: Die Energie eines magnetischen Moments in einem Magnetfeld ist typischerweise viel kleiner als die thermische Energie eines Atoms des Stoffs, die in der Größenordnung von $k_B T$ liegt (k_B ist die Boltzmann-Konstante, T die absolute Temperatur).

Die potenzielle Energie eines magnetischen Dipols mit dem Dipolmoment μ in einem äußeren Feld \mathbf{B} ist durch Gleichung 26.16 gegeben:

$$E_{\text{pot}} = -\mu \cdot \mathbf{B} = -|\mu| |\mathbf{B}| \cos \theta.$$

Die potenzielle Energie des Dipols ist bei paralleler Einstellung zum Feld ($\theta=0$) um den Betrag $2|\mu| |\mathbf{B}|$ kleiner als bei antiparalleler Einstellung ($\theta=180^\circ$). Die Differenz beträgt für ein typisches atomares magnetisches Moment von einem Bohrschen Magneton und eine typische Magnetfeldstärke von 1 T

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{pot}} &= 2\mu_{\text{Bohr}} |\mathbf{B}| = 2 \cdot (5,79 \cdot 10^{-5} \text{ eV/T}) \cdot (1 \text{ T}) \\ &= 1,16 \cdot 10^{-4} \text{ eV}. \end{aligned}$$

Bei Zimmertemperatur ($T=300 \text{ K}$) ist die thermische Energie $k_B T$

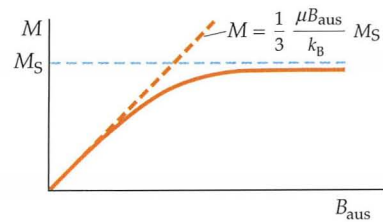
$$k_B T = (8,62 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K}) \cdot (300 \text{ K}) = 2,59 \cdot 10^{-2} \text{ eV},$$

also über 200-mal so groß wie $2\mu_{\text{Bohr}} |\mathbf{B}|$. Selbst in einem starken Magnetfeld von 1 T sorgt die thermische Bewegung also dafür, dass die magnetischen Momente überwiegend in zufällige Richtungen zeigen (wenn die Temperatur nicht sehr niedrig ist).

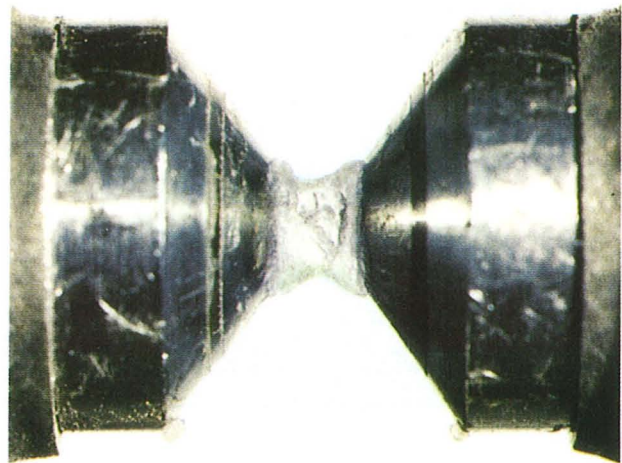
In Abbildung 27.36 ist die Magnetisierung M in Abhängigkeit von einem äußeren Magnetfeld B_{aus} für eine bestimmte Temperatur aufgetragen. Ist das Feld sehr stark, so richten sich fast alle magnetischen Momente in Feldrichtung aus, und es ist $M \approx M_S$. (Bei im Labor erreichbaren Magnetfeldstärken tritt dieser Fall nur bei sehr tiefen Temperaturen ein.) Für $B=0$ ist $M=0$, das bedeutet, die Momente sind vollkommen zufällig orientiert. Bei schwachen Feldern ist die Magnetisierung der Feldstärke annähernd proportional, was in der Abbildung durch die gestrichelte orangefarbene Linie angedeutet wird. In diesem Bereich gilt für die Magnetisierung

$$M = \frac{1}{3} \frac{\mu B_{\text{aus}}}{k_B T} M_S. \quad (27.33)$$

CURIE'SCHES GESETZ



27.36 Die Magnetisierung M als Funktion des angelegten Magnetfelds B_{aus} . In sehr starken Feldern nähert sich die Magnetisierung dem Sättigungswert M_S . Praktisch lässt sich dies nur bei sehr niedrigen Temperaturen erreichen. In schwachen Feldern ist die Magnetisierung näherungsweise proportional zu B_{aus} . Dieser Zusammenhang wird als Curie'sches Gesetz bezeichnet.



Flüssiger Sauerstoff ist paramagnetisch und wird vom Magnetfeld eines Permanentmagneten angezogen. Auf die magnetischen Dipole wirkt eine resultierende Kraft, weil das Magnetfeld nicht homogen ist.

Beachten Sie dabei, dass $\mu B_{\text{aus}}/(k_B T)$ das Verhältnis der maximalen Energie des Dipols im Magnetfeld zur thermischen Energie angibt. Die Magnetisierung ist der absoluten Temperatur umgekehrt proportional. Dieser Zusammenhang wurde von Pierre Curie experimentell entdeckt und wird als **Curie'sches Gesetz** bezeichnet. Eine Anwendung illustriert Beispiel 27.11.

BEISPIEL 27.11: Anwendung des Curie'schen Gesetzes

Für ein Material ist $\mu = \mu_{\text{Bohr}}$. Es werde ein äußeres Magnetfeld von 1 T erzeugt. Bei welcher Temperatur erreicht die Magnetisierung 1% des Sättigungswerts?

Lösung:

1. Das Curie'sche Gesetz gibt den Zusammenhang zwischen M , T , M_S und B_{aus} an:

$$M = \frac{1}{3} \frac{\mu B_{\text{aus}}}{k_B T} M_S$$

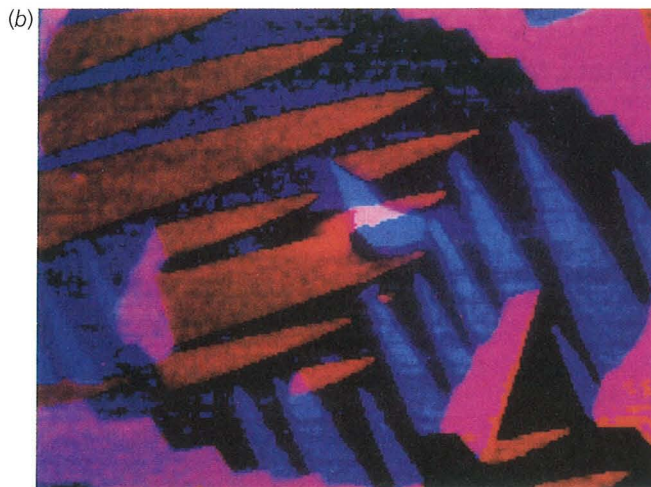
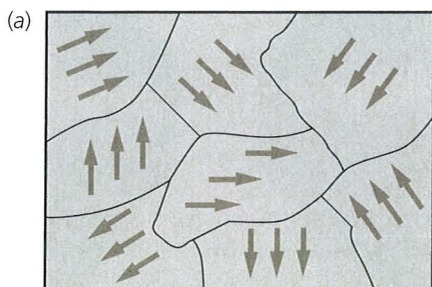
2. Setzen Sie in diese Gleichung $\mu = \mu_{\text{Bohr}}$ und $M/M_S = 0,1$ ein und berechnen Sie T :

$$T = \frac{\mu_{\text{Bohr}} B_{\text{aus}}}{3 k_B} \frac{M_S}{M} = \frac{(5,79 \cdot 10^{-5} \text{ eV/T}) \cdot (1 \text{ T})}{3 \cdot (8,62 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K})} 100$$

$$= \boxed{22,4 \text{ K}}$$

Kommentar: Wie Sie sehen, ist selbst in einem starken äußeren Magnetfeld von 1 T die Magnetisierung kleiner als 1% des Sättigungswerts, wenn die Temperatur 22,4 K überschreitet.

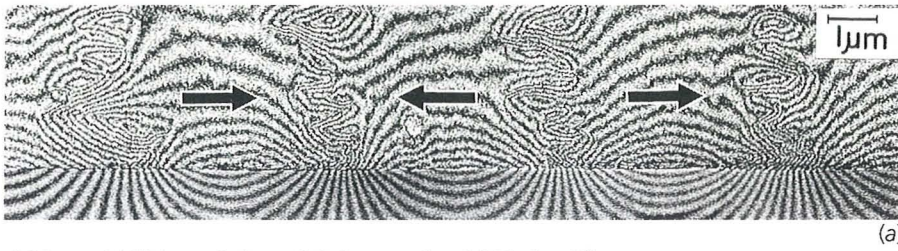
ÜBUNG: Wie groß ist M im Verhältnis zur Sättigungsmagnetisierung bei 300 K und einem äußeren Magnetfeld von 1,5 T, wenn $\mu = \mu_{\text{Bohr}}$ ist? (Lösung: $M/M_S = 1,12 \cdot 10^{-3}$.)



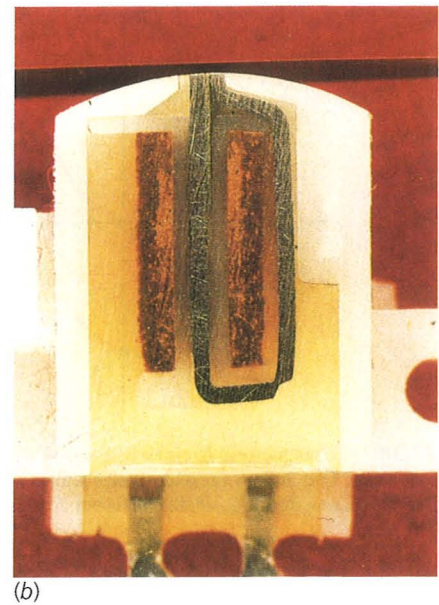
27.37 a) Schematische Darstellung Weiß'scher Bezirke. Innerhalb jedes einzelnen Bezirks sind die magnetischen Momente ausgerichtet, aber die Richtung ist von Bezirk zu Bezirk verschieden. Das resultierende magnetische Moment ist folglich null. Bereits ein schwaches äußeres Magnetfeld kann eine Vergrößerung der Bezirke bewirken, in denen die Momente parallel zum Feld ausgerichtet sind, oder zur Drehung der Orientierungsrichtung einzelner Bezirke führen. In beiden Fällen ist das resultierende magnetische Moment dann von null verschieden und parallel zum Feld gerichtet. b) Magnetische Bezirke an der Oberfläche eines 3% Si enthaltenden Eisenkristalls, aufgenommen mit einem Rasterelektronenmikroskop mit Polarisationsanalyse. Die vier Farben zeigen vier mögliche Orientierungen der magnetischen Momente an.



Kanadische Münzen enthalten in der Regel größere Anteile des ferromagnetischen Nickels. Diese Münze wird deshalb von einem Magneten angezogen.



a) Magnetfeldlinien auf einem Cobaltmagnetband („Tonband“). Die Pfeile zeigen die verschlüsselten magnetischen Bits an. b) Im Schreib- und Lesekopf des Tonbandgeräts befindet sich ein magnetischer Kern mit einer Wicklung, durch die bei der Aufnahme ein Strom fließt, der an der Spitze des Tonkopfs ein Magnetfeld erzeugt, das das Band im Takt der elektrischen Eingangssignale magnetisiert. Beim Abspielen werden (bei fehlendem Eingangssignal) entsprechend der Bandmagnetisierung im Ausgangssignal Schwankungen erzeugt, die verstärkt über Lautsprecher wiedergegeben werden.



Ferromagnetismus*

Zu den ferromagnetischen Stoffen gehören reines Eisen, Cobalt, Nickel und Legierungen dieser Metalle untereinander, außerdem Gadolinium, Dysprosium und einige wenige ihrer Verbindungen. Die Ursache für ferromagnetisches Verhalten sind starke Wechselwirkungen zwischen den Elektronen in einem teilweise gefüllten Band eines Metalls oder zwischen lokalisierten Elektronen an benachbarten Atomen oder Molekülen, die magnetische Momente besitzen. Diese so genannte **Austauschwechselwirkung** setzt die Energie von Elektronenpaaren mit parallelen Spins im Vergleich zu Elektronenpaaren mit antiparallelen Spins herab.

Bei ferromagnetischen Materialien nimmt die magnetische Suszeptibilität χ_{mag} sehr große positive Werte an (gemessen unter denen im Folgenden spezifizierten Bedingungen). Schon schwache Magnetfelder führen bei diesen Materialien zu einer weit gehenden Ausrichtung der atomaren magnetischen Dipolmomente. In manchen Fällen bleibt diese Orientierung selbst nach Abschalten des äußeren Felds erhalten: Da die Wechselwirkung benachbarter magnetischer Dipole sehr stark ist, richten sich die magnetischen Momente in mikroskopisch kleinen Raumbereichen auch ohne äußeres Feld aneinander aus. Diese Raumbereiche nennt man **magnetische Domänen** oder **Weiß'sche Bezirke**.

Innerhalb eines Weiß'schen Bezirks sind alle magnetischen Momente ausgerichtet. Die Richtung der Orientierung ist allerdings von Bezirk zu Bezirk verschieden, weshalb das resultierende magnetische Moment einer makroskopischen Probe des ferromagnetischen Materials normalerweise gleich null ist. Abbildung 27.37 veranschaulicht diese Situation. Die für die Orientierung verantwortlichen Wechselwirkungskräfte werden von der Quantentheorie vorhergesagt, sind aber im Rahmen der klassischen Physik nicht zu erklären. Übersteigt die Temperatur einen kritischen Wert, die **Curie-Temperatur**, so ist die thermische Bewegung intensiv genug, um die Orientierung der magnetischen Momente aufzuheben, und das Material wird paramagnetisch.

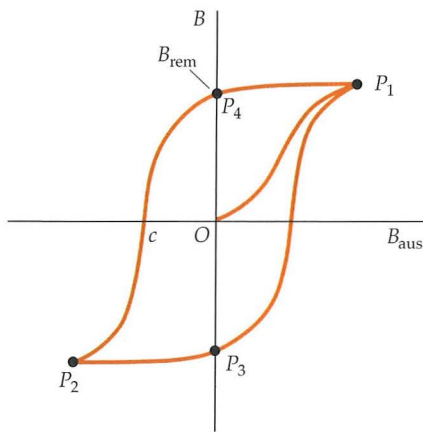
Bei Anlegen eines äußeren Magnetfelds können sich die Grenzen der Weiß'schen Bezirke verschieben, oder die Orientierungsrichtung in einzelnen Bezirken kann sich ändern

(„umklappen“). In beiden Fällen ist das resultierende magnetische Moment der makroskopischen Probe dann verschieden von null und parallel zum Feld gerichtet. Da bereits schwache Felder zur hochgradigen Ausrichtung führen, ist das von den Dipolen des Materials erzeugte Magnetfeld häufig wesentlich stärker als das anliegende Feld.

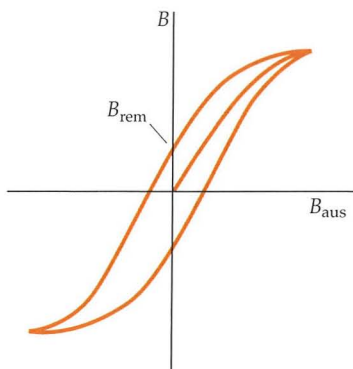
Überlegen wir nun, was passiert, wenn ein langer Eisenstab in eine Zylinderspule geschoben und bei allmählich zunehmendem Strom magnetisiert wird. Stab und Spule seien lang genug, dass wir die Randeffekte vernachlässigen können. Die induzierten magnetischen Momente zeigen in Richtung des äußeren Felds; B_{aus} und M sind folglich gleich gerichtet. Es ist dann

$$B = B_{\text{aus}} + \mu_0 M = \mu_0 (n/\ell) I + \mu_0 M. \quad (27.34)$$

In ferromagnetischen Materialien ist das induzierte Magnetfeld $\mu_0 M$ oft deutlich (um einen Faktor von mehreren Tausend) stärker als das äußere Feld.



27.38 Das Magnetfeld B eines Eisenstabs als Funktion des äußeren Felds B_{aus} . Die äußere (geschlossene) Kurve ist die Hysteresekurve. Das Remanenzfeld B_{rem} bleibt auch bei Abschalten des äußeren Felds erhalten.



27.39 Hysteresekurve eines magnetisch weichen Materials. Das Remanenzfeld ist sehr klein verglichen mit demjenigen eines magnetisch harten Materials (vgl. Abbildung 27.38).

In Abbildung 27.38 wurde B als Funktion des äußeren Magnetfelds B_{aus} aufgetragen. Während der Strom von null ausgehend allmählich ansteigt, nimmt B entlang der von O nach P_1 führenden Kurve zu. Die Abflachung der Kurve in der Nähe von P_1 zeigt, dass M sich dem Sättigungswert M_s (mit Ausrichtung sämtlicher magnetischer Momente) nähert. Oberhalb der Sättigung nimmt B nur noch zu, weil auch das äußere Feld $B_{\text{aus}} = \mu_0(n/\ell)I$ weiter zunimmt. Fällt B_{aus} ausgehend von P_1 langsam wieder ab, geht die Magnetisierung nicht in entsprechendem Maß zurück: Die Ausrichtung der Weiß'schen Bezirke bleibt teilweise erhalten, und selbst bei $B_{\text{aus}} = 0$ verschwindet die Magnetisierung nicht völlig, wie Sie dem Diagramm entnehmen können. Diesen Effekt nennt man **Hysterese** (vom griechischen *hysteros* für „später“, „hinterher“), die Kurve in Abbildung 27.38 ist die **Hysteresekurve**, und das verbleibende Magnetfeld im Punkt P_4 ($B_{\text{aus}} = 0$) heißt **Remanenzfeld** B_{rem} . An diesem Punkt ist der Eisenstab zum Permanentmagneten geworden. Polt man den Strom in der Spule jetzt um, so dass B_{aus} in entgegengesetzte Richtung zeigt, nimmt das Magnetfeld B allmählich ab und erreicht in Punkt c wieder den Wert null. Um die Hysteresekurve zu schließen, lässt man den Strom darüber hinaus weiter steigen, bis die Sättigung erneut erreicht ist (P_2), schaltet dann das äußere Feld ab (P_3), polt den Strom wieder um und lässt ihn in der ursprünglichen Richtung ansteigen.

Die Magnetisierung M hängt von der Vorgeschichte des Materials ab und kann auch ohne Anliegen eines äußeren Felds sehr große Werte annehmen; sie hängt nicht in einfacher Weise mit B_{aus} zusammen. Beschränken wir uns jedoch auf den Kurvenabschnitt zwischen dem Ursprung und P_1 in Abbildung 27.38 (die so genannte **Neukurve**), so sind B_{aus} und M parallel, und M ist in Abwesenheit des äußeren Felds null. Wir können die magnetische Suszeptibilität dann gemäß Gleichung 27.22 aufschreiben,

$$M = \chi_{\text{mag}} \frac{B_{\text{aus}}}{\mu_0},$$

und es ist

$$B = B_{\text{aus}} + \mu_0 M = B_{\text{aus}} (1 + \chi_{\text{mag}}) = \mu_{\text{rel}} \mu_0 n I = \mu n I \quad (27.35)$$

mit

$$\mu = (1 + \chi_{\text{mag}}) \mu_0 = \mu_{\text{rel}} \mu_0 \quad (27.36)$$

als **Permeabilität** des Materials. (Für para- und diamagnetische Stoffe ist χ_{mag} viel kleiner als eins. Die Permeabilität μ und die magnetische Feldkonstante μ_0 sind dann nahezu gleich. – Achten Sie darauf, das magnetische Dipolmoment μ nicht mit der Permeabilität μ zu verwechseln.)

Wie Abbildung 27.38 zeigt, ist der Zusammenhang zwischen B und B_{aus} nicht linear. Aus diesem Grund ist die relative Permeabilität keine Konstante. Sie erreicht ihre Maximalwerte bei Magnetisierungen, die deutlich unterhalb der Sättigungsmagnetisierung liegen. In Tabelle 27.2 wurden Sättigungsfelder $\mu_0 M_s$ und Maximalwerte von μ_{rel} für einige ferromagnetische Materialien zusammengestellt. Beachten Sie, dass μ_{rel} viel größer als eins werden kann. Beispiel 27.12 verdeutlicht die Anwendung der Gleichungen 27.34 bis 27.36.

BEISPIEL 27.12: Eine Spule mit Eisenkern

Eine lange Spule mit 12 Windungen pro Zentimeter hat einen Kern aus gehärtetem Eisen. Ein Spulenstrom von 0,50 A erzeugt im Inneren des Kerns ein Magnetfeld von 1,36 T. Berechnen Sie a) das äußere Magnetfeld B_{aus} , b) die relative Permeabilität μ_{rel} und c) die Magnetisierung M .

Problembeschreibung: Das äußere Magnetfeld ist das Magnetfeld der Spule, $B_{\text{aus}} = \mu_0 (n/\ell) I$. Das Gesamtfeld ist gegeben; die relative Permeabilität können wir deshalb mit Hilfe ihrer Definitionsgleichung berechnen, $\mu_{\text{rel}} = B/B_{\text{aus}}$. M ergibt sich schließlich aus der Beziehung $B = B_{\text{aus}} + \mu_0 M$.

Lösung:

1. Das äußere Feld ist durch Gleichung 27.9 gegeben (Wd. steht für Windungen):

$$\begin{aligned} B_{\text{aus}} &= \mu_0 (n/\ell) I \\ &= (4\pi) \cdot (10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}) \cdot (1200 \text{ Wd./m}) \cdot (0,5 \text{ A}) \\ &= 7,54 \cdot 10^{-4} \text{ T} \end{aligned}$$

2. Die relative Permeabilität ist gleich dem Quotienten aus B und B_{aus} :

$$\mu_{\text{rel}} = \frac{B}{B_{\text{aus}}} = \frac{1,36 \text{ T}}{7,54 \cdot 10^{-4} \text{ T}} = 1,80 \cdot 10^3$$

3. Die Magnetisierung M ergibt sich aus Gleichung 27.34:

$$\begin{aligned} \mu_0 M &= B - B_{\text{aus}} \\ &= 1,36 \text{ T} - 7,54 \cdot 10^{-4} \text{ T} \approx B = 1,36 \text{ T} \\ M &= \frac{B}{\mu_0} = \frac{1,36 \text{ T}}{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}} \\ &= \boxed{1,08 \cdot 10^6 \text{ A/m}} \end{aligned}$$

Kommentar: Die Stärke des äußeren Felds, $7,54 \cdot 10^{-4} \text{ T}$, ist gegenüber dem Gesamtfeld von 1,36 T vernachlässigbar klein. Beachten Sie, dass der Wert von μ_{rel} (1800) hier deutlich geringer ist als der in Tabelle 27.2 angegebene Maximalwert (5500). – Im Rahmen der Genauigkeit, mit der wir μ_{rel} berechnet haben (drei Stellen), gilt $\chi_{\text{mag}} = \mu_{\text{rel}} - 1 \approx \mu_{\text{rel}}$.

Tabelle 27.2 Maximale Werte von $\mu_0 M$ und μ_{rel} für einige ferromagnetische Materialien

Material	$\mu_0 M$ (T)	μ_{rel}
Eisen (gehärtet)	2,16	5500
Eisen-Silicium (96 % Fe, 4 % Si)	1,95	7000
Permalloy (55 % Fe, 45 % Ni)	1,60	25 000
Mu-Metall (77 % Ni, 16 % Fe, 5 % Cu, 2 % Cr)	0,65	100 000

Die von der Hysteresekurve umschlossene Fläche ist proportional der Energie, die während des irreversiblen Prozesses der Magnetisierung und Entmagnetisierung als Wärme verloren geht. Ist diese Fläche klein, so ist der Energieverlust gering, und man bezeichnet das Material, z.B. Weicheisen, als **magnetisch weich**. Eine entsprechende Hysteresekurve sehen Sie in Abbildung 27.39. Das Remanenzfeld B_{rem} ist nahezu null, pro Zyklus geht nur wenig Energie verloren. Magnetisch weiche Materialien werden oft als Kerne von Transformatorspulen verwendet, weil man hier die Wärmeverluste bei Änderungen des Magnetfelds möglichst klein halten will. Permanentmagneten hingegen, bei denen große Remanenzfelder erwünscht sind, stellt man aus **magnetisch harten** Materialien wie unlegiertem Stahl (Kohlenstoffstahl) oder der Legierung Alnico 5 her.