Das ist eine inhomogene lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten für die Schwingungsbewegung $x(t)$ des erzwungenen Oszillators. Wir wollen die allgemeine Lösung von Gleichung 57 zuerst qualitativ diskutieren. Sie besteht aus zwei Teilen, nämlich der Lösung der homogenen Differenzialgleichung und einer partikulären Lösung. Die Lösung der homogenen Differenzialgleichung ist mit der eines gedämpften Oszillators (Gleichung 55) identisch. Die Konstanten in diesem Teil der Lösung hängen von den Anfangsbedingungen ab. Nach entsprechend langer Zeit kann dieser Teil der Lösung wegen der exponentiellen Abnahme der Amplitude für starke und schwache Dämpfung vernachlässigt werden. Er wird deshalb als Einschwingvorgang des erzwungenen Oszillators bezeichnet. Der zweite Lösungsanteil von Gleichung 57, die partikuläre Lösung, ist der für den erzwungenen Oszillator interessante Schwingungsanteil, nämlich die stationäre Lösung. Sie kann als

$$x(t) = A(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi) \tag{58}$$

geschrieben werden. Darin ist ω die Kreisfrequenz der treibenden Kraft (!!). Die Amplitude $A(\omega)$ ist durch

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\gamma\omega}{m}\right)^2}} \tag{59}$$

gegeben und die Phasenkonstante ϕ durch

$$\tan\phi = \frac{\gamma\omega}{m\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)} \tag{60}$$

Beziehung 59 und 60 erhält man wieder durch Einsetzen des Ansatzes 58 in die Differentialgleichung. Die Berechnung ist jedoch etwas komplizierter als bei der freien Schwingung. Eine oft verwendeter Trick ist, dass man an Stelle von 58 die Funktion komplex ansetzt und dann die sogennnte elastische (Faktor vor Realteil) bzw. inelastische Amplitude (Faktor des Imaginärteiles, beschreibt Energieübertrag) berechnet. Das erleichert die Rechnung. Man nutzt bei dieser Vorgehensweise aus, dass bei linearen Gleichungen komplexer Größen sowohl Real- als auch Imaginärteil der komplexen Lösung beide für sich auch Lösungen der Gleichung sind. Man kann zeigen, dass nur der Imaginärteil dauernd Energie verbraucht, die von der treibenden Kraft geliefert wird. Der Realteil führt zu einer periodischen Energieaufnahme und Abgabe.

Betrachtet man die Gleichungen 59 und 60 zusammen mit $F(t) = F_0 \cos(\omega \cdot t)$, so kann man sehen, dass die Auslenkung des Oszillators und die treibende Kraft mit derselben Frequenz oszillieren, aber sich in der Phase durch ϕ unterscheiden. Wenn die treibende Frequenz ω viel kleiner als die Eigenfrequenz ω_0 ist, wird $\phi \approx 0$, wie man aus Gleichung 60 sieht. Im Resonanzfall ist $\omega = \omega_0$, und es wird $\phi = -\pi/2$, treibende Kraft und Oszillator sind um -90^0 phasenverschoben. Wird schließlich ω viel größer als ω_0, dann ist $\phi \approx -\pi$, die treibende Kraft eilt der Oszillatorschwingung um 180° voraus. Zu Beginn dieses Kapitels wurde die Auslenkung eines Teilchens, das eine harmonische Schwingung ausführt, in der Form $x(t) = A(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$ angegeben. Vergleicht man dies mit der Lösung der harmonischen Schwingung, so erkennt man, dass beide Lösungen bis auf das Vorzeichen der Phasenkonstanten übereinstimmen. Die

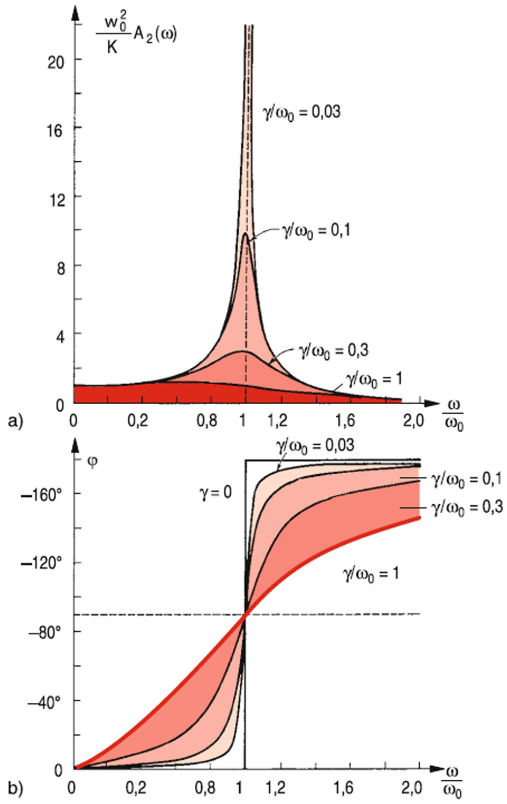

Abbildung 25: (a) Resonanzkurve der erzwungenen Schwingung für verschiedene Dämpfungen. Man beachte die Verschiebung des Maximums mit zunehmender Dämpfung. (b) Quantitativer Verlauf der Phasenverschiebung

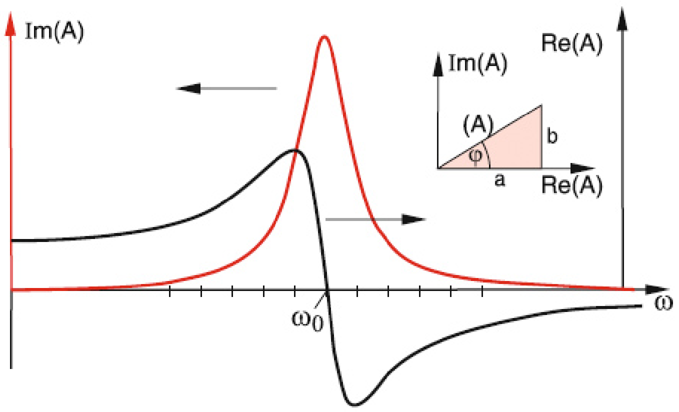

Abbildung 26: Elastische und Inelastische Amplitude.

Phasenkonstante ϕ der erzwungenen Schwingung liegt zwischen 0 und $-\pi$, wie wir eben gesehen haben. Somit bleibt die Phase des angetriebenen Oszillators immer hinter der Phase der treibenden Kraft zurück. Die Phasenkonstante wird bei dem gewählten Ansatz negativ.

Die bei der Resonanz aufgenommen Leistung ergibt sich zu (wobei $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\gamma\omega}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\right)$ zu verwenden ist

$$\begin{aligned} P &= \frac{dW}{dt} = F(t) \cdot \dot{x}(t) \\ &= F_0 \cos(\omega \cdot t) \cdot (-1) \cdot A(\omega) \cdot \omega \cdot \sin(\omega t - \phi) = \\ &= -\frac{F_0^2 \omega \cos(\omega t) \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{\gamma\omega}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\right) + \omega t\right)}{\sqrt{m^2\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}} \end{aligned}$$

Die über eine Periode gemittelte Leistung (ins System übertragene Energie) ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} P\, dt = \\ &= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\left(-\frac{F_0^2 \omega \cos(\omega t) \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{\gamma\omega}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\right) + \omega t\right)}{\sqrt{m^2\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}}\right) dt \qquad (61) \\ &= \frac{F_o^2\gamma\omega^2}{2\left(m^2\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\gamma^2\omega^2\right)} \qquad (62) \end{aligned}$$

$$\bar{P} = \frac{F_o^2\gamma\omega^2}{2\left(m^2\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\gamma^2\omega^2\right)} \qquad (63)$$

und die maximal übertragene Energie in der Resonanz ergibt sich zu:

$$\frac{1}{2}\frac{F_o^2}{\gamma}$$

Der durch 63 beschriebene Energieübertrag als Funktion der Frequenz ist die bekannte Lorentz-Resonanzkurve.

12 Schwingende Systeme mit mehreren Freiheitsgraden

Bisher haben wir ausschließlich sogenannte Systeme mit einem Freiheitsgrad besprochen. Diese zeichnen sich durch isolierte schwingende Systeme, z.B. einem Pendel, einer Masse an einer Feder, einem LC-Schwingkreis etc. aus. Wie

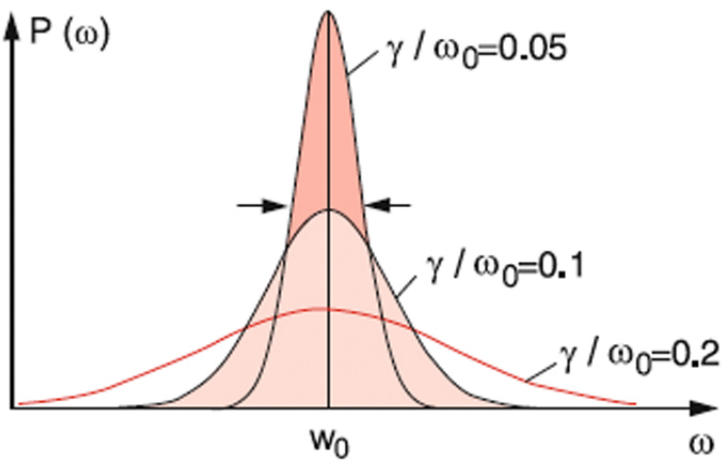

Abbildung 27: Leistungsaufnahme bei erzwungener Schwingung (Lorentzkurve).

wir gesehen haben, ist für solche System genau eine Eigenfrequenz aus, die bei äußerem Antrieb der Resonanzfrequenz Systems entspricht. Weiters wissen wir, wie sich die entsprechende schwingende Größe (Position, Winkel, Strom etc.) mit der Zeit verhält, nämlich gemäß $x(t) = A\cos[\omega_0 \cdot t + \phi]$, wobei ω_0 die Eigenfrequenz ist.

In der Natur finden wir aber sehr oft sogenannte mehrdimensionale schwingende Systeme. darunter versteht man eine Ansammlung mehrerer (artgleicher) schwingender Systeme (mit unterschiedlichen Eigenfrequenzen), die miteinander Energie austauschen können, d.h. aneinander gekoppet sind.

Man kann die allgemeinen Eigenschaften sehr schön an einem sehr einfachen zweidimensionalen system studieren, z.B. von zwei mit einer Feder gekoppelter schwingender Masse-Feder-Schwingern:

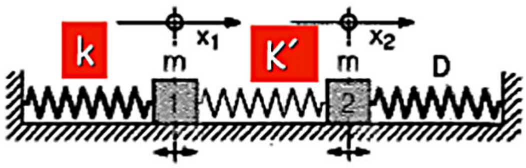

Abbildung 28: Einfaches zweidimensionales schwingendes System

Die Bewegungsgleichungen für die beiden relevanten Größen $x_1(t)$ bzw. $x_2(t)$, des in Abbildung 28 gezeigten Systems, lauten:

$$\begin{array}{l} m \cdot \frac{d^2x_1(t)}{dt^2} + k \cdot x_1(t) \; + \; k' \cdot [x_1(t) - x_2(t)] = 0 \\ m \cdot \frac{d^2x_2(t)}{dt^2} + k \cdot x_2(t) \; + \; k' \cdot [x_2(t) - x_1(t)] = 0 \end{array} \tag{64}$$

Diese gekoppelten Differentialgleichungen kann man sehr elegant dadurch lösen, dass man die beiden Gleichungen in 64 addiert bzw. subtrahiert, was zu folgenden Gleichungen führt:

$$\begin{aligned} m \cdot \frac{d^2[x_1(t)+x_2(t)]}{dt^2} + k \cdot [x_1(t) + x_2(t)] &= 0 \\ m \cdot \frac{d^2[x_1(t)-x_2(t)]}{dt^2} + (k + 2k') \cdot [x_1(t) - x_2(t)] &= 0 \end{aligned} \tag{65}$$

Durch diesen Trick hat man die Gleichungen entkoppelt, und zwar für die neuen Variablen $x_1(t) + x_2(t)$ und $x_1(t) - x_2(t)$. Die beiden entkoppelten Gleichungen in 65 haben exakt die Form der bekannten Schwingungsgleichung 52. Damit können wir auch sofort die Lösungen für diese neuen Variablen angeben:

$$\begin{aligned} x_1(t) + x_2(t) &= A \cos[\omega_0 \cdot t] \\ x_1(t) - x_2(t) &= A' \cos[\omega_1 \cdot t] \end{aligned} \tag{66}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m}\left[1 + 2\frac{k'}{k}\right]} = \omega_0 \sqrt{\left[1 + 2\frac{k'}{k}\right]}$$

Die Größe $x_1(t) + x_2(t)$ schwingt dabei mit der Eigenfrequenz ω_0 und die Größe $x_1(t) - x_2(t)$ mit der höheren Frequenz ω_1 (aus 66) Wenn man durch geeignete Wahl der Anfangsbedingungen erreicht, dass das System genau in einer der Normalschwingungen (Eigenmoden) ω_0 oder ω_1 schwingt, dann weist das System nur eine Frequenz auf. Im allgemeinen Fall wird aber die Lösung durch eine Linearkombination der beiden Eigenmoden beschrieben. dann treten die zwei charakteristische Frequenzen im System auf. das sieht man sehr leicht, wenn man sich $x_1(t)$ und $x_2(t)$ berechnet:

$$\begin{aligned} & x_1(t) = A \cos[\omega_0 \cdot t] - x_2(t) \\ & A \cos[\omega_0 \cdot t] - x_2(t) - x_2(t) = A' \cos[\omega_1 \cdot t] \\ & \rightarrow \\ & x_2(t) = \tfrac{1}{2}\left(A \cos[\omega_0 \cdot t] - A' \cos[\omega_1 \cdot t]\right) \\ & x_1(t) = \tfrac{1}{2}\left(A \cos[\omega_0 \cdot t] + A' \cos[\omega_1 \cdot t]\right) \end{aligned} \tag{67}$$

Wir haben hier nur explizit ein zweidimensional schwingendes System exakt berechnet. Man kann aber leicht zeigen, dass allgemein gilt:

Lemma 26 *Ein n-dimensionales schwingendes System besitzt n Eigenmoden. Ein beliebiger Zustand des Systems kann durch die Überlagerung der n Eigenschwingungen beschrieben werden. Eine Frequenzanalyse eines solchen Systems würde also n Frequenzen ergeben. Bei einem kontinuierlichen System (unendlich viele Schwinger) reicht das Frequenzspektrum von 0 bis unendlich.*

Ein sehr wichtiges kontinuierlich, unendlich dimensionales System ist z.B. eine eingespannte Saite (Abbildung 29. Die einelnen Massepunkte stellen die einzelnen eindimensionalen Schwinger dar, die jeweils Kräfte auf ihre Nachbarmassepunkte ausüben (Siehe auch Abbildung 31). Die unterste Eigenfrequenz (ω_0) sowie dier ersten höheren harmonischen ($2\omega_0, 3\omega_0$.....) sind gezeigt. Es ist zu bemerken, dass in diesm fall die Eigenfrequenzen Vielfache der Grundfrequenz sind, was z.B. im Fall des Federschwingers und 66 nicht der Fall ist!

Wir werden auch gleich sehen, dass auch einen anderen Zugang nehemen kann, und zwar ein mehrdimensionales schwingendes System mittels fortschreitender Wellen beschreiben.

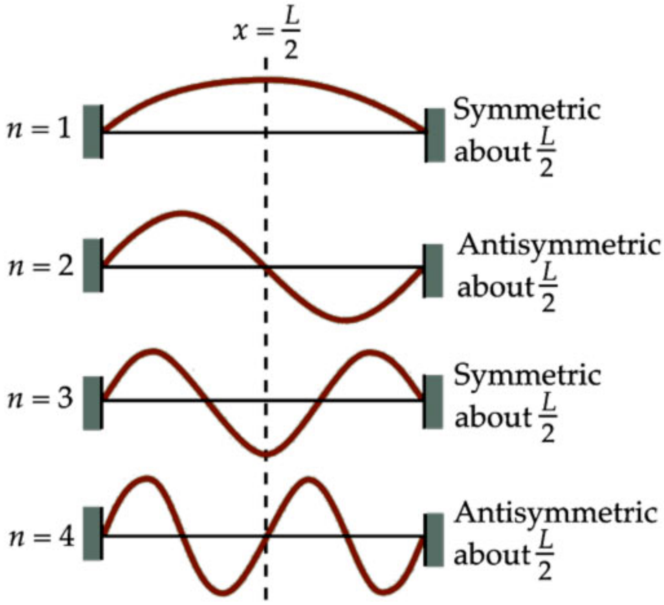

Abbildung 29: Einige harmonische Eigenschwingungen der eingespannten Saite

12.1 Betrachtungsweisen: Mehrdimensionales System-Welle

Generell kann man sagen, dass wir zwei Betrachtungsweisen wählen können:

1. Wir können mehrere (im Raum angeordnete) eindimensionale gekoppelte Schwinger betrachten (z.B. das System in Abbildung 28) und die Eigenmoden als ausgezeichnete „Relativbewegungen" der einzelnen Schwinger zueinander betrachten, wobei diese alle mit der gleichen Frequenz schwingen. Z.B. die erste Eigenfrequenz für das System in Abbildung 28 entspicht einer synchronen Bewegung der beiden Massen, die zweite einer synchronen Gegenbewegung. Ein beliebeiger Zustand (Überlagerung der Eigenmoden) entspicht einem komplizierteren Bewegungszustand, wobei einmal die eine, dannn die andere Masse „mehr„ in Bewegung ist.

2. Die andere Sicht besteht darin, dass man einen Schwinger in Schwingung versetzt und dieser dann durch die Kopplung im raum an benachbarte Schwinger phasenverzögert weitergibt, wodurch sich die Schwingung im raum ausbreitet (**d.h. eine Welle entsteht**). Man muss aber auch berücksichtigen, dass diese Welle reflektiert (oder auch gebrochen) werden kann und es daurch zu einer Überlagerung dieser Wellen kommen wird. Diese ergibt dann das beobachtete Verhalten. Wenn die reflektierte Welle eine („richtige") Phase besitzt, kann die Überlagerung z.B. stehende Wellen (wie in Abbildung 29) ergeben, die dann den Eigenmoden aus Betrachtungsweise 1 oben äquivalent sind.

13 Wellen

Wellen transportieren (als Folge des oben beschriebenen) Energie und Impuls durch den Raum ohne Transport von Materie. Wenn sich z. B. eine Wasserwelle über einen Teich ausbreitet, schwingen die Wassermoleküle auf und ab, überqueren aber nicht mit der Welle den Teich. Energie und Impuls werden durch die Welle transportiert, aber keine Materie. Ein Ruderboot wird sich auf den Wellen auf und nieder bewegen, aber nicht durch die Wellenbewegung den Teich überqueren. Wasserwellen, Wellen auf einer gespannten Gitarrensaite und Schallwellen sind alle mit Schwingungen verbunden.

13.1 Einige Begriffe

Eine mechanische Welle wird durch eine Störung in einem Medium erzeugt. Wenn z. B. eine gespannte Saite angezupft wird, pflanzt sich die erzeugte Auslenkung längs der Saite als Welle fort. Die Störung ist in diesem Fall die Verformung der Saite bezüglich ihrer Gleichgewichtsform. Ihre Ausbreitung entsteht durch die Wechselwirkung jedes Saitensegments mit den angrenzenden Segmenten. Eine Welle, bei der die Störung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung erfolgt, heißt **transversale Welle**. Z.B eine Auslenkung in einer gespannten Feder. Diese Verformung pflanzt sich als "Wellenbergmit konstanter Geschwindigkeit längs der Feder fort. Kommt diese Auslenkung an einer Stelle x der Feder an, werden Federsegmente senkrecht zur Längsrichtung der Feder verschoben und führen Schwingungen aus, bis sie schließlich wieder in die Gleichgewichtslage zurückkehren und die Schwingungsenergie an Nachbarelemente abgegeben haben. Die Geschwindigkeit, mit der dieser Wellenberg längs der Feder wandert, wird Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle genannt. Sie hängt u. a. von der Federspannung und den Materialeigenschaften der Feder ab. Eine Welle heißt **longitudinale Welle,** wenn die Störung des Mediums in Ausbreitungsrichtung der Welle stattfindet. Hier treten an die Stelle der Wellenberge und Wellentäler Komprimierung (Verdichtung) und Ausdehnung (Verdünnung) z.B einer Federspirale auf. Weitere Beispiele für longitudinale Wellen sind Schallwellen in Gasen und Flüssigkeiten. Schallwellen in festen Körpern (Kristallen) sind longitudinale und transversale Wellen. Oberflächenwellen auf dem Wasser, die durch die Schwerkraft bedingt sind, genannt Schwerewellen, sind weder reine transversale noch longitudinale Wellen. Die Wassermoleküle bewegen sich in der Wellenbewegung kreisförmig und haben somit stets einen longitudinalen und einen transversalen Anteil bezüglich der Ausbreitungsrichtung.

Abbildung 30 a zeigt einen Wellenberg auf einem Seil zur Zeit $t = 0$ (Momentaufnahme der transversalen Seilwelle mit einer Störung). Die Gestalt des Wellenbergs (und damit die Auslenkung des Seils) sei durch eine Funktion $y = f(x)$ beschrieben. Der Wellenberg wandert längs der Ausbreitungsrichtung x mit der Geschwindigkeit v. Zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$ befindet er sich an einem anderen $x-$Bereich. Auch wenn wir voraussetzen, dass der Wellenberg seine Gestalt nicht ändert, muss er in dem Koordinatensystem der Abbildung 30 a durch eine neue Funktion von x und t beschrieben werden. Einfacher ist die Darstellung in einem mitbewegten Bezugssystem $(x\prime, y\prime)$ mit dem Koordinatenursprung $0\prime$, wie es Abbildung 30 b zeigt. Die Verformung des Seils ist dann unabhängig von der Zeit stets $y\prime = f(x\prime)$. Zwischen bei den Koordinatensystemen besteht der Zusammenhang $y\prime = y$ und $x\prime = x - vt$, woraus

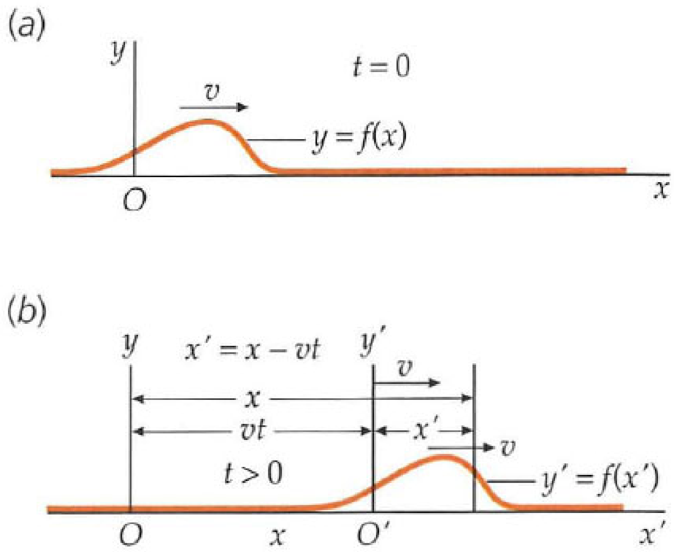

Abbildung 30: Ausbreitung eines Wellenbergs längs eines Seils.

$f(x\prime) = f(x-vt)$ folgt. Somit erhält man im ursprünglichen Koordinatensystem (x, y) für die Funktionsgleichung des Wellenbergs

$$y = f(x - vt) \tag{68}$$

Wellenbewegung in positiver $x-$Richtung, und

$$y = f(x + vt)$$

Wellenbewegung in negativer $x-$Richtung. In bei den Ausdrücken ist v die Geschwindigkeit der Wellenausbreitung, und die Funktion $f(x \pm vt)$ heißt **Wellenfunktion**. Für Wellen auf einer Saite (oder einem gespannten Seil) stellt die Wellenfunktion die transversale Auslenkung der Saite (des Seils) dar. Für Schallwellen in Luft kann die Wellenfunktion die longitudinale Auslenkung der Luftmoleküle oder der Luftdruck sein. Diese Wellenfunktionen sind Lösungen einer Differenzialgleichung, der so genannten Wellengleichung, die aus den Newton'schen Gesetzen hergeleitet werden kann.

13.1.1 Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen

Es ist eine allgemeine Eigenschaft von Wellen, dass ihre Geschwindigkeit relativ zum Medium von den Eigenschaften dieses Mediums abhängt, aber sie ist unabhängig von der Bewegung der Wellenquelle. Zum Beispiel hängt die Geschwindigkeit des Schalls aus einer Autohupe nur von den Eigenschaften der Luft und nicht von der Bewegung des Autos ab. Für Wellenberge auf einem Seil lässt sich leicht zeigen, dass man die Wellengeschwindigkeit erhöhen kann, indem die Spannung (gleich SpannkraftiQuerschnittsfläche) des Seils vergrößert wird. Außerdem breiten sich Wellen unter derselben Spannung auf einem leichten Seil schneller aus als auf einem schweren. Wenn $\vec{F}_s$ die Spannkraft bezeichnet und μ die lineare Massendichte ist, gilt z.B. für die Wellengeschwindigkeit eines gespannten Seils oder einer Saite

$$v_{\text{Saite}} = \sqrt{\frac{\left|\vec{F}_s\right|}{\mu}}$$

13.2 Wellengleichung

Als Wellengleichung wird die Differenzialgleichung bezeichnet, deren Lösung eine Wellenfunktion $y(x,t)$ ist. Die Wellengleichung kann aus dem zweiten Newton'schen Gesetz hergeleitet werden, wie an dem eindimensionalen Beispiel einer gespannten Saite nachfolgend gezeigt wird. Allgemein leitet man die Wellengleichung für elektromagnetische Wellen aus den Maxwell'schen Gleichungen und für mechanische Wellen oder Gravitationswellen im Rahmen der Langrange-Hamilton'schen Theorie her.

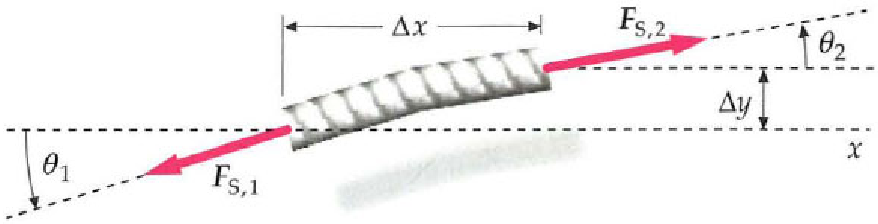

Abbildung 31: Ein Segment einer gespannten Saite, das zur Herleitung der Wellengleichung benutzt wird. Die Vertikalkomponente der resultierenden Kraft auf das Segment ist $\left|\vec{F}_{S.2}\right| \sin\vartheta_2 - \left|\vec{F}_{S.1}\right| \sin\vartheta_1$ wo $|F_s|$ der Betrag der Spannkraft in der Saite ist. Die Wellengleichung wird mit dem zweiten Newton'schen Gesetz hergeleitet, das auf das Saitensegment angewandt wird.

Abbildung 31 zeigt ein Segment der gespannten Saite von der Länge Δx. Für die Anwendung des zweiten Newton'schen Gesetzes sind Aussagen über Kräfte, Masse und Beschleunigung dieses Saitenelements bei der Wellenbewegung notwendig. Die vertikale Beschleunigung der Auslenkung der Saite am Ort x ergibt sich aus der zweiten Zeitableitung von $y(x,t)$ nach der Zeit zu $\partial^2 y/\partial t^2$. Wir setzen voraus, dass die Auslenkungen der Saite klein sind und damit auch die Winkel ϑ_1 und ϑ_2 (in Abbildung 31 definiert) des Segments gegen die horizontale $x-$Richtung. Ist μ die eindimensionale Massendichte der Saite, dann ist die Masse des Saitensegments $m = \mu \cdot \Delta x$. Damit haben wir von dem zweiten Newton'schen Gesetz die rechte Seite festgelegt. Wir gehen nun zu den Kräften auf das Saitensegment über. Dazu bezeichnen wir mit $\left|\vec{F}_s\right|$ den Betrag der Spannkraft der Saite.

An dem Saitensegment greifen die Kräfte $\vec{F}_{S.1}$ und $\vec{F}_{S.2}$ an, deren Richtungen gegen die $x-$Achse durch die Winkel ϑ_1 und ϑ_2 gegeben und die Beträge gleich dem Betrag der Spannkraft sind: $\left|\vec{F}_{S.1}\right| = \left|\vec{F}_{S.2}\right| = \left|\vec{F}_s\right|$ an· Die horizontale Komponente der an dem Segment angreifenden Gesamtkraft ist

$$\sum F_x = \left|\vec{F}_{S.2}\right| \cos\vartheta_2 - \left|\vec{F}_{S.1}\right| \cos\vartheta_1 = \left|\vec{F}_s(\cos\vartheta_2 - \cos\vartheta_1) \approx 0\right|$$

denn für kleine Winkel ϑ ist $\cos\vartheta\tilde{\ }1$. Für die Kraftkomponenten in vertikaler Richtung erhalten wir

$$\sum F_y = \left|\vec{F}_{S.2}\right| \sin\vartheta_2 - \left|\vec{F}_{S.1}\right| \sin\vartheta_1 = \left|\vec{F}_s(\sin\vartheta_2 - \sin\vartheta_1) \approx \left|\vec{F}_s\right| (\tan\vartheta_2 - \tan\vartheta_1)\right|$$

· Der Tangens des Winkels ϑ, den die ausgelenkte Saite mit der $x-$Achse bildet, ist die Steigung der Saitenkurve, die wir mit S bezeichnen wollen. Die Steigung S einer Kurve ist in der Differenzialrechnung durch die erste Ableitung der Kurvenfunktion nach einer unabhängigen Variablen gegeben. Bei einer Funktion von mehreren unabhängigen Variablen ist die partielle Ableitung nach der betreffenden Variablen zu bilden, um die Steigung zu berechnen. In unserem Falle folgt für die Auslenkungsfunktion $y(x,t)$ der Saite

$$S = \tan\vartheta = \frac{\partial y}{\partial x}$$

Somit ergibt sich als resultierende Kraft auf das Segment

$$\sum F_y = \left|\vec{F}_s\right| (\tan\vartheta_2 - \tan\vartheta_1) = \left|\vec{F}_s\right| \Delta S$$

Setzen wir nun in das zweite Newton'sche Gesetz die ermittelten Größen ein, so folgt

$$\left|\vec{F}_s\right| \Delta S = \mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$
$$\frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{\mu}{\left|\vec{F}_s\right|} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Die Größe ΔS ist die Änderung der Kurvensteigung auf der Strecke Δx. Da für die Saitenauslenkung weder die Kurve noch ihre erste Ableitung SprungsteIlen oder andere Singularitäten haben, können wir den Grenzprozess $\Delta x \to 0$ durchführen und erhalten die Wellengleichung für die gespannte Saite

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{\left|\vec{F}_s\right|} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{69}$$

Diese eindimensionale Wellengleichung der gespannten Saite ist eine lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten und enthält die zweiten Ableitungen der Saitenauslenkung nach der Ausbreitungsrichtung der Welle und nach der Zeit. Bei der Herleitung wurde vorausgesetzt, dass die Auslenkung $y(x,t)$ klein gegen die Saitenlänge ist. Lösungen dieser Wellengleichung werden auch (lineare) Wellenfunktionen genannt. Wir können zeigen, dass eine zweimal stetig differenzierbare Funktion von $y(x - vt)$ die Wellengleichung 69 erfüllt und $v = \sqrt{\left|\vec{F}_s\right| / \mu}$ die Wellengeschwindigkeit ist.

Mit der Substitution $\xi = x - v\,t$ erhalten wir aus der Identität

$$y(x - v\,t) = y(\xi)$$

durch Differenziation nach x

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = y'\,\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

und nach t

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = y'\,\frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

Da

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial (x - v\,t)}{\partial x} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial (x - v\,t)}{\partial x} = -v,$$

erhalten wir

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y' \quad \text{und} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = -v\,y'.$$

Die zweiten Ableitungen ergeben

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y'' \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -v\,\frac{\partial y'}{\partial t} = +v^2\,y''.$$

Abbildung 32:

Somit ergibt sich die (eindimensionale) Wellengleichung in der allgemeinen Form, wie sie für praktisch alle Wellen gilt:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{70}$$

Im folgenden soll noch kurz gezeigt werden, dass die harmonische Funktion $y(x,t) = A\sin(k \cdot x - \omega \cdot t)$ von der Form $y = f(x - \upsilon t)$ ist und eine Lösung der Wellengleichung ist, vorausgesetzt es gilt die wichtige Beziehung

$$\upsilon = \frac{\omega}{k} \tag{71}$$

ω ist dabei, wie leicht einzusehen ist die Frequenz der schwingung, die sich als Welle ausbreiten wird. υ ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle, bzw. eigentlich die sogenannte **Phasengeschwindigkeit** der Welle.

13.3 Periodische Wellen

Wenn man das Ende einer gespannten Saite periodisch auf und ab bewegt, dann erzeugt man auf der Saite eine periodische Welle. Jeder Punkt des Mediums, in dem sich eine periodische Welle ausbreitet, führt periodische Schwingungen mit der gleichen Frequenz aus.

13.3.1 Harmonische Wellen

Harmonische Wellen sind der häufigste Typ periodischer Wellen. Alle Wellen, ob sie periodisch sind oder nicht, können durch Superposition aus harmonischen Wellen erzeugt werden. Somit ist das Studium der harmonischen Wellenbewegung für das Verständnis aller Wellenbewegungen von Bedeutung. Wenn sich eine harmonische Welle durch das Medium ausbreitet, führt jeder Punkt der Wellenbewegung harmonische Schwingungen aus. Wenn man das Ende einer Saite mit einer schwingenden Stimmgabel berührt, dann wird das Saitenende periodisch bewegt, und die Aufeinanderfolge periodischer Bewegungen wird auf die Saite übertragen und breitet sich längs der Saite als periodische Welle aus. Die von der Stimmgabel auf der Saite erzeugte harmonische Welle kann durch eine Sinus- oder Kosinusfunktion beschrieben werden Abbildung 34 zeigt eine Momentaufnahme der schwingenden Saite in der Form einer Sinusfunktion. Der kleinste Abstand zwischen zwei Wellenkämmen ist die Wellenlänge λ. Während sich die Welle auf der Saite ausbreitet, bewegt sich jeder Punkt der Saite auf und ab. Die Bewegung erfolgt senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle als harmonische Schwingung mit der Frequenz ν der schwingenden Stimmgabel. Während einer Schwingungsdauer $T = 1/v$ hat sich die Welle um eine Wellenlänge λ fortbewegt. Daraus ergibt sich die Wellengeschwindigkeit zu

$$\upsilon = \frac{\lambda}{T} = \nu \cdot \lambda \tag{72}$$

Weil sich diese Relation allein aus den Definitionen der Wellenlänge und Frequenz ergibt, trifft sie auf alle harmonischen Wellen zu.

Lösung:

1. Berechnen Sie die zweite Ableitung von y nach x:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(A\sin(kx-\omega t)\right)$$
$$= A\cos(kx-\omega t)\,\frac{\partial(kx-\omega t)}{\partial x}$$
$$= kA\cos(kx-\omega t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(kA\cos(kx-\omega t)\right)$$
$$= -kA\sin(kx-\omega t)\,\frac{\partial(kx-\omega t)}{\partial x}$$
$$= -k^2 A\sin(kx-\omega t)$$

2. Berechnen Sie analog die zweiten partiellen Ableitungen von y nach t:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(A\sin(kx-\omega t)\right)$$
$$= A\cos(kx-\omega t)\,\frac{\partial(kx-\omega t)}{\partial t}$$
$$= -\omega A\cos(kx-\omega t)$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\omega A\cos(kx-\omega t)\right)$$
$$= +\omega A\sin(kx-\omega t)\,\frac{\partial(kx-\omega t)}{\partial t}$$
$$= -\omega^2 A\sin(kx-\omega t)$$

3. Substituieren Sie diese Ergebnisse in Gleichung 15.9 b:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - k^2 A\sin(kx-\omega t)$$
$$= \frac{1}{v^2}\left(-\omega^2 A\sin(kx-\omega t)\right)$$
$$= \frac{\omega^2}{v^2} A\sin(kx-\omega t)$$

4. Die Substitution von $\omega/k = v$ liefert:

$$A\sin(kx-\omega t) = \frac{\omega^2/k^2}{v^2} A\sin(kx-\omega t)$$
$$= \frac{v^2}{v^2} A\sin(kx-\omega t)$$
$$= \boxed{A\sin(kx-\omega t)}$$

Kommentar: Es wurde gezeigt, dass die Funktion $y(x,t) = A\sin(kx-\omega t)$ eine Lösung der Wellengleichung ist, vorausgesetzt, es ist $v = \omega/k$.

Abbildung 33:

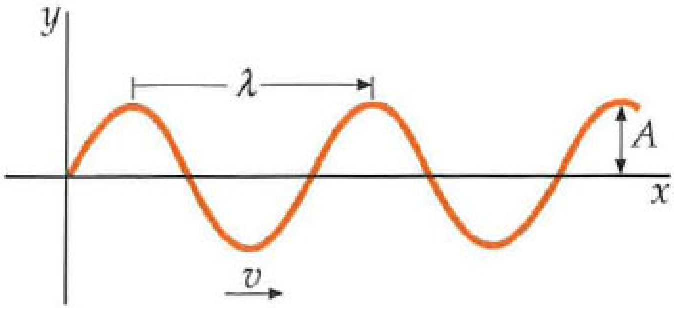

Abbildung 34: Harmonische Welle, betrachtet zu einem festen Zeitpunkt. A ist die Amplitude und λ die Wellenlänge. Eine solche Figur erhält man durch eine Momentaufnahme einer schwingenden Saite.

Die Momentaufnahme der Abbildung 34 kann durch eine Sinusfunktion beschrieben werden, $y(x) = A \ \sin(2\pi\frac{x}{\lambda} + \delta)$, wo A die Amplitude, λ die Wellenlänge und δ die Phasenkonstante ist. Die Phasenkonstante hängt von der Wahl des Ursprungspunkts $x = 0$ ab. Für eine einzelne Welle darf man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\delta = 0$ setzen, so dass sich die Funktion der Abbildung 34 vereinfach zu $y(x) = A \ \sin(2\pi\frac{x}{\lambda})$. Der im Argument der Sinusfunktion auftretende Faktor 2π sichert ab, dass sich der Funktionswert $y(x)$ nicht ändert, wenn man x um eine Wellenlänge (oder ein Vielfaches davon) ändert. Weil die Ortskoordinate bei der harmonischen Welle stets mit der Größe $2\pi/\lambda$ verknüpft ist, führt man dafür ein eigene Größe k, die **Wellenzahl**, ein und vereinfacht die obigen Gleichungen zu

$$y(x) = A \sin kx \tag{73}$$

wo

$$k = 2\pi/\lambda \tag{74}$$

Die Wellenzahl k wird im SI-System in der Maßeinheit m^{-1} angegeben. Für eine sich in positiver $x-$Richtung mit der Geschwindigkeit v ausbreitende harmonische Welle haben wir in Gleichung 73 x durch $x - vt$ zu ersetzen (siehe 68). Wählen wir die Phasenkonstante $\delta = 0$ so folgt für die harmonische Welle

$$y(x,t) = A \sin k(x - vt) = A \sin(kx - kvt)$$

oder, wenn man $k \cdot v = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda\nu}{1} = 2\pi\nu = 2\pi\omega$ einsetzt

$$y(x,t) = A \sin(kx - \omega t) \tag{75}$$

wodurch wieder ω durch Gleichung 71 bewiesen ist.

Wie wir bisher gesehen haben, ist die Wellengeschwindigkeit v eine physikalische Größe, die von den dynamischen Bedingungen (Kräften, Spannungen) und von den Materialeigenschaften des Mediums abhängt, in dem die Welle sich ausbreitet. Die Frequenz ν (bzw. die Kreisfrequenz ω) ist eine kinematische Größe, die durch die äußeren Anregungsbedingungen der Welle festgelegt wird. Aus der Beziehung zwischen Geschwindigkeit, Frequenz und Wellenlänge ergibt sich, dass für eine harmonische Welle, die sich in einem bestimmten Medium (Luft, Wasser, Stahlsaite, usw.) ausbreitet, die Wellenlänge umgekehrt proportional zur Frequenz ist. Hochfrequente Wellen haben eine kürzere Wellenlänge als niederfrequente Wellen (in dem gleichen Material). Das trifft zu, solange die Wellengeschwindigkeit in einem Material nicht von der Anregungsfrequenz der Welle abhängt. Im Allgemeinen ist in jedem Stoff eine mehr oder weniger starke Abhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit von der Wellenfrequenz vorhanden. Man bezeichnet diese Eigenschaft als **Wellendispersion**, und Wellenpakete, die durch Überlagerung von harmonischen Wellen unterschiedlicher Frequenz zusammengesetzt sind, fließen als Folge dieser Dispersionserscheinung auseinander. Ein Wellenberg ändert, während er sich ausbreitet, seine Gestalt.