Technische Universität Wien
Fakultät für Physik
Institut für Allgemeine Physik

Unterlagen zur Vorlesung

Modellbildung in der Physik

SS 2009

Prof. *Wolfgang Husinsky*

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Vorwort

Diese Vorlesungsunterlagen sind nur als Hilfe zur Vorlesung gedacht und können und sollen nur im engen Zusammenhang mit der Vorlesung ihren Sinn erfüllen. Die Texte sind zum Studium vor bzw. nach der Vorlesung gedacht, um in der Vorlesung die Probleme im Detail zu besprechen bzw. um dann zusammen mit den Folien und ergänzender Literatur den besprochenen Stoff zu verarbeiten und zu lernen.

Teil I
Kraft-Bewegung-Energie

1 Physikalische Grundgesetzte

Wir wollen unser Studium der physikalischen Erscheinungen mit der Untersuchung bewegter Körper beginnen. Die Untersuchung von Bewegungen wird Kinematik genannt. Die Messung solcher Bewegungen begründete in gewisser Weisevor mehr als 400 Jahren die *Physik,* wie wir sie heute als Wissenschaft kennen. Es wird jedoch unser Ziel sein, an Hand dieses extrem wichtigen Beispiels, allgemeine Vorgangsweisen in der Lösung von Problemen zu lernen.

1.1 Die Newton´schen Axiome

Eine der fundamentalen Gesetze der Physik sind die sogenannten Newton´schen Axiom. Auf ihnen beruht praktisch die gesamte Mechanik.

Die klassische Mechanik untersucht die Kräfte, die Körper aufeinander ausüben, und erklärt auch Bewegungsänderungen über die Kräfte, die auf einen Körper wirken. Sie beschreibt die Erscheinungen mit den drei Newton'schen Axiomen der Bewegung. Natürlich hat jeder eine intuitive Vorstellung von einer Kraft als Ziehen oder Drücken, etwa bei Muskeln, Gummibändern oder Federn. Erst die Newton'schen Axiome erlauben aber, unsere Vorstellung über Kräfte zu präzisieren.

Eigentlich könnten wir die meisten mechanischen Probleme ausgehend vom ersten Newton´schen Axiom bzw. seiner Formulierungs als Differentialgleichung lösen. In der Praxis wird es jedoch sinnvoll sein, weitere daraus folgende Gesetzmäßigkeiten zu verwenden, um ein spezielles Problem elegant zu lösen (z.B. Energieerhaltung, Impulserhaltung, lineare und Kreisbewegungen etc.)

Axiom 1 (Erstes Newton´sches Axiom) *Ein Körper bleibt in Ruhe oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit weiter, wenn keine resultierende äußere Kraft auf ihn wirkt.*

Axiom 2 (Zweites Newton´sches Axiom) *Ein Körper wird in Richtung der resultierenden äußeren Kraft beschleunigt, die auf ihn wirkt. Die Beschleunigung ist gemäß* $\overrightarrow{F}_{ges} = m\overrightarrow{a}$ *proportional zur resultierenden äußeren Kraft* $\overrightarrow{F}_{ges}$> *wobei m die Masse des Körpers ist. Die resultierende äußere Kraft auf einen Körper ist die Vektorsumme aller Kräfte, die auf ihn wirken,* $\overrightarrow{F}ges = \sum \overrightarrow{F}$. *Somit gilt*

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \tag{1}$$

.

Axiom 3 (Drittes Newton´sches Axiom) *Kräfte treten immer paarweise auf. Wenn der Körper A eine Kraft* $F_B^{(A)}$ *auf den Körper B ausübt, wirkt eine gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft* $F_A^{(B)}$ *vom Körper B auf den Körper A. Somit gilt* $F_A^{(B)} = -F_B^{(A)}$

1.2 Trägheitsgesetz

Stoßen Sie einen Eiswürfel auf der Theke an. Er wird zunächst ein Stück gleiten und bleibt schließlich liegen. Wenn die Theke nass ist, wird er weiter gleiten, bevor er liegen bleibt. Ein Stückchen Trockeneis (gefrorenes Kohlendioxid) , das quasi auf einem Kissen aus Kohlendioxiddampf schwebt, gleitet viel weiter, ohne dass sich seine Geschwindigkeit wesentlich ändert. Vor Galilei glaubte man, dass ständig eine Kraft, ein Zug oder Druck, vorhanden sein muss, damit sich ein Körper mit konstanter Geschwindigkeit weiterbewegen kann. Galilei und später Newton erkannten dagegen, dass das aus dem Alltag bekannte Abbremsen von Körpern auf die Reibungskraft zurückzuführen ist. Wird die Reibung verringert, nimmt gleichzeitig die Bremswirkung ab. Ein Wasserfilm oder ein Kissen aus Gas verringert die Reibung besonders wirksam und ermöglicht, dass Körper ohne große Geschwindigkeitsänderung über große Strecken gleiten können. Galilei folgerte daraus, dass sich die Geschwindigkeit eines Körpers nie ändern würde, wenn man ihn von allen äußeren Kräften einschließlich der Reibung befreien würde. Diese Eigenschaft der Materie beschrieb er als Trägheit. Deshalb wird diese Aussage, die Newton später als erstes Newton'sches Axiom umformulierte, auch das Trägheitsgesetz genannt..

1.3 Kraft, Masse und das zweite Newton'sche Axiom

Das erste und das zweite Newton'sche Axiom können als Definition der Kraft betrachtet werden. Eine Kraft ist ein äußerer Einfluss auf einen Körper, der veranlasst, dass der Körper relativ zu einem *Inertialsystem*

Definition 4 (Inertialsystem) *Ein Bezugssystem, das mit dem gleichförmig bewegten Flugzeug verbunden ist, nennt man ein Inertialsystem. Ein Bezugssystem, das relativ zu einem solchen Inertialsystem beschleunigt wird, ist selbst kein Inertialsystem. Das erste Newton 'sche Axiom gibt uns also ein Kriterium in die Hand, mit dem wir bestimmen können, ob ein Bezugssystem ein Inertialsystem ist. Ja, es ist durchaus sinnvoll, das erste Newton'sche Axiom als Definition von Inertialsystemen zu betrachten. Jedes Bezugssystem, in dem sich ein kräftefreier Körper geradlinig gleichförmig bewegt, ist ein Inertialsystem.*

beschleunigt wird. (Dabei haben wir angenommen, dass keine weiteren Kräfte wirken.) Die Kraft und die durch sie hervorgerufene Beschleunigung haben dieselbe Richtung. Der Betrag der Kraft ist das Produkt aus der Masse des beschleunigten Körpers und dem Betrag der Beschleunigung. Diese Definition beruht auf Gleichung 1.

Kräfte können über die Dehnung gleicher Gummibänder verglichen werden. Werden etwa zwei gleiche Gummibänder um die gleiche Länge gedehnt, haben die auf sie wirkenden Kräfte den gleichen Betrag. Körper besitzen einen inneren Widerstand gegen jegliche Art von Beschleunigung. Vergleichen Sie den Widerstand, wenn Sie mit dem Fuß einen Fußball oder eine Kegelkugel zu beschleunigen versuchen. Ihre blauen Fußspitzen werden Sie schnell lehren, dass die Kegelkugel wesentlich schwerer als der Fußball zu beschleunigen ist. Diese innere Eigenschaft des Körpers wird die Masse genannt. Sie ist ein Maß für die Trägheit des Körpers. Das Verhältnis zweier Massen lässt sich quantitativ dadurch definieren, dass man auf beide Körper die gleiche Kraft anwendet und ihre Beschleunigungen vergleicht. Erzeugt eine Kraft $\vec{F}$ bei Anwendung auf einen Körper der Masse m_1 eine Beschleunigung $\vec{a}_1$ während die gleiche Kraft bei Anwendung auf einen Körper der Masse m_2 die Beschleunigung a_2 liefert, ist das Verhältnis ihrer Massen durch

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} \tag{2}$$

definiert. Diese Definition stimmt mit unserer intuitiven Vorstellung von der Masse überein. Wenn auf zwei verschiedene Körper eine Kraft angewendet wird, wird der Körper mit der größeren Masse weniger beschleunigt. Das Experiment zeigt: Das Verhältnis der Beschleunigungen a/a2 , das die beiden gleich großen Kräfte hervorrufen, die auf die zwei Körper wirken, ist unabhängig von Betrag, Richtung und Art der Kraft. Die Masse ist eine innere Eigenschaft eines Körpers, die unabhängig von seinem Ort ist - sie ist immer gleich, unabhängig davon ob, sich der Körper auf der Erde oder auf dem Mond befindet oder gar frei im Weltraum schwebt.

1.3.1 Gewichtskraft

Lässt man einen Körper in der Nähe der Erdoberfläche fallen, wird er durch die *Gravitationsbeschleunigung* nach unten, zum Erdmittelpunkt hin beschleunigt. Vernachlässigt man dabei den Luftwiderstand, ist diese Beschleunigung $\vec{g}$ für alle Körper und an jedem Ort gleich. Ihr Betrag hat den durch die Erdbeschleunigungskonstante g gegebenen Wert. Die Kraft, die diese Gravitationsbeschleunigung erzeugt, ist die Gewichtskraft, umgangssprachlich auch Gewicht genannt. Allerdings ist die letztere Bezeichnung für die Gewichtskraft etwas unglücklich, verleitet sie doch zu der Annahme, dass das Gewicht wie die Masse eine Eigenschaft des Körpers sei und nicht eine Kraft, die auf ihn wirkt. Wenn der Begriff "Gewicht eines Körpersäuftaucht, sollte man ihn also immer in Gedanken in äuf den Körper wirkende Gewichtskraft"übersetzen.

Wenn diese Gewichtskraft $\vec{F}_G$ die einzige Kraft ist, die auf einen Körper wirkt, sagt man, dieser Körper sei im freien Fall. Nach dem zweiten Newton'schen Axiom $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ ist die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ durch

$$F_G = m\vec{a}_G \tag{3}$$

definiert, wobei m die Masse des Körpers und $\vec{a}_G$ die Gravitationsbeschleunigung ist. Da $\vec{a}\vec{G}$ für alle Körper gleich ist, ist die Gewichtskraft eines Körpers proportional zu seiner Masse. Der Vektor $\vec{a}\vec{G}$ ist deshalb gleich der Kraft, die die Erde pro Masseeinheit auf einen Körper ausübt und mithin gleich der Beschleunigung beim freien Fall.

Bemerkung 5 *In der Nähe der Erdoberfläche hat $\vec{a}_G$ den Wert$|\vec{a}_G| = g =$*

$9.81\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{kg}^{-1} = 9.81\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$

Genaue Messungen haben gezeigt, dass sich der Wert von $\vec{a}_G$ an verschiedenen Orten etwas unterscheidet. $\vec{a}_G$ nimmt mit wachsendem Abstand zur Erdoberfläche ab - und zwar umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands vom Erdmittelpunkt. Das heißt, ein und derselbe Körper wiegt in großer Höhe etwas weniger als in Höhe des Meeresspiegels. Da die Erde nicht genau eine Kugel, sondern zu den Polen hin abgeflacht ist, hängt $\vec{a}_G$ zudem etwas von der geografischen Breite ab. Somit ist das Gewicht bzw. die Gewichtskraft im Gegensatz zur Masse keine innere Eigenschaft eines Körpers.

Obwohl sich die Gewichtskraft eines Körpers also aufgrund der Änderung von $\vec{a}_G$ mit dem Ort ändern kann, ist diese Änderung so klein, dass sie bei den meisten praktischen Anwendungen auf der Erdoberfläche oder in deren Nähe nicht wahrgenommen wird. Ein Beispiel soll den Unterschied zwischen Masse und Gewichtskraft verdeutlichen. Stellen Sie sich vor, Sie nehmen eine schwere Kegelkugel mit auf den Mond. Die Gewichtskraft der Kugel erreicht auf dem Mond nur ein Sechstel ihrer Gewichtskraft auf der Erde - die Kugel lässt sich auf dem Mond viel einfacher hochheben. Um die Kugel allerdings mit einer bestimmten Geschwindigkeit in horizontaler Richtung zu werfen, ist auf dem Mond dieselbe Kraft erforderlich wie auf der Erde, da ja die Masse der Kugel konstant ist. Dementsprechend wäre natürlich auch im Weltraum, weitab von der Gravitation der Erde oder des Monds, für dieselbe horizontale Beschleunigung dieselbe Kraft erforderlich.

Obwohl die Gewichtskraft auf einen Körper ortsabhängig ist, ist sie für jeden einzelnen Ort proportional zur Masse des Körpers. Damit können wir die Massen verschiedener Körper vergleichen, indem wir ihre Gewichtskräfte vergleichen. Wenn wir unsere eigene Gewichtskraft wahrnehmen, beruht das meist auf Kräften, die mit der Gewichtskraft im Gleichgewicht sind. Wenn Sie auf einem Stuhl sitzen, spüren Sie die Kraft, die der Stuhl ausübt und die mit Ihrer Gewichtskraft im Gleichgewicht ist, so dass Sie nicht zu Boden fallen. Wenn Sie auf einer Personenwaage stehen, spüren Ihre Füsse die Kraft, die die Waage auf Sie ausübt. Die Waage ist so geeicht, dass sie die Gegenkraft anzeigt, die sie aufbringen muss, um Ihre Gewichtskraft zu kompensieren. Diese Kraft wird auch scheinbare Gewichtskraft genannt. Wenn wie etwa beim freien Fall keine Kraft vorhanden ist, die der Gewichtskraft entgegenwirkt, ist die scheinbare Gewichtskraft null. Diesen Zustand, die so genannte Schwerelosigkeit, erfahren Astronauten in ihren Raumschiffen. Stellen Sie sich ein Raumschiff vor, das sich auf einer kreisförmigen Erdumlaufbahn bewegt und somit ständig zur Erde beschleunigt wird. Die einzige Kraft, die auf das Raumschiff wirkt, ist die Erdanziehung (sein Gewicht), so dass es frei fällt. Auch die Astronauten in dem Raumschiff sind im freien Fall. Die einzige Kraft, die auf sie wirkt, ist ihre Gewichtskraft, die für die Beschleunigung $\vec{a}_G$ verantwortlich ist. Da es unter diesen Bedingungen keine Kraft gibt, die den freien Fall in der Umlaufbahn aufhält, ist die scheinbare Gewichtskraft der Astronauten null.

2 Die Naturkräfte

Die volle Reichweite des zweiten Newton'schen Axioms zeigt sich erst, wenn es zusammen mit den Gesetzen für die Kräfte betrachtet wird, die die Wechselwirkungen von Körpern beschreiben. Dazu gehört beispielsweise das in zu besprechende Newton'sche Gravitationsgesetz, das die Gravitationskraft, die ein Körper auf einen anderen ausübt, durch den Abstand beider Körper und durch ihre Massen ausdrückt. Zusammen mit dem zweiten Newton'schen Axiom gestattet dieses Gesetz, die Umlaufbahnen der Planeten um die Sonne, die Bewegung des Monds wie auch die Höhenabhängigkeit von $\vec{a}_G$, der Gravitationsbeschleunigung, zu berechnen.

Alle Kräfte, denen wir in der Natur begegnen, lassen sich auf vier fundamentale Wechselwirkungen zwischen Elementarteilchen zurückführen .

1. Die Gravitationskraft ist die Kraft der gegenseitigen Anziehung zwischen allen Körpern mit Masse.
2. Die elektromagnetische Kraft ist die Kraft zwischen allen Körpern mit elektrischer Ladung
3. Die starke Kernkraft ist die Kraft zwischen bestimmten subatomaren Teilchen, den Hadronen.
4. Die schwache Kraft ist die Kraft zwischen subatomaren Teilchen während spezieller radioaktiver Zerfallsprozesse.

Die Kräfte, die wir im Alltag bei makroskopischen Körpern beobachten können, werden entweder durch die Gravitationskraft oder durch die elektromagnetische Kraft hervorgerufen.

2.1 Fernwirkung

Die ersten beiden Grundkräfte, die Schwerkraft und die elektromagnetische Kraft, wirken zwischen Teilchen, die räumlich voneinander getrennt sind. Dies führt zu einem philosophischen Problem, nämlich dem der Fernwirkung oder Wirkung über eine Entfernung hinweg. Newton sah diese Fernwirkung als einen Mangel seiner Gravitationstheorie an, war aber außerstande, eine andere Hypothese über das Wesen der Kräfte zu formulieren.

Heute wird das Problem der Fernwirkung vermieden, indem das Konzept des Felds eingeführt wird, das als Überträger wirkt. Dabei wird beispielsweise die Anziehung der Erde durch die Sonne in zwei Schritten betrachtet. Zunächst erzeugt die Sonne im Raum ein Gravitationsfeld, in dem die Gravitationsbeschleunigung $\vec{a}_G$ durch die Sonnenanziehung mit wachsendem Abstand zur Sonne abnimmt Dieses Feld übt dann eine Kraft auf die Erde aus. Das Feld spielt also die Rolle des Vermittlers. Auf ähnliche Weise erzeugt die Erde ein Gravitationsfeld, das eine Kraft auf die Sonne ausübt. Auch unser Eigengewicht ist eine Kraft, die das Gravitationsfeld auf uns ausübt. Ganz analog ergeben sich (in der Elektrizität und Magnetismus) sowohl elektrische Felder, die durch alle elektrischen Ladungen entstehen, als auch magnetische Felder, die nur durch bewegte elektrische Ladungen hervorgerufen werden. Im Prinzip sind sie also auch Kräfte, und haben daher entsprechend analoge Konsequenzen für die Bewegung (Mechanik) geladener Teilchen.

2.2 Kontaktkräfte

Viele uns bekannte Kräfte werden von Objekten aufeinander ausgeübt, die in direktem Kontakt miteinander sind - sich also berühren. Sie sind eine Folge von Kräften zwischen den Oberflächenmolekülen der Körper, die im Kontakt sind.

Festkörper Drückt man gegen eine Oberfläche, so drückt diese zurück. Betrachten Sie z. B. eine angelehnte Leiter. An der Kontaktstelle drückt die Leiter mit einer horizontalen Kraft auf die Wand, wobei sich die Moleküle in der Oberfläche der Wand verschieben. Wie die Federn einer Matratze drücken dadurch die verschobenen Moleküle der Wand horizontal zurück auf die Leiter. Kräfte, die wie diese senkrecht zur Kontaktfläche wirken, werden als Normalkräfte bezeichnet (wobei Normal-ïn diesem Fall ßenkrecht dazu"bedeutet). Dass sich die Wand in Folge der Belastung etwas biegt, ist mit bloßem Auge kaum wahrnehmbar.

Normalkräfte treten in den verschiedensten Größenordnungen auf. So übt ein Tisch auf jeden darauf liegenden Gegenstand eine Normalkraft aus. Solange der Tisch dabei nicht zerbricht, ist diese Kraft mit der Gewichtskraft des darauf liegenden Körpers im Gleichgewicht. Drücken Sie zusätzlich noch auf den Körper, erhöht sich im Gegenzug die nach oben gerichtete Kraft und verhindert damit, dass der Körper nach unten beschleunigt wird.

Kontaktflächen können auch Kräfte aufeinander ausüben, die parallel zu den Kontaktflächen sind. Z.B ein großer Quader auf dem Boden. Wenn man versucht, ihn mit einer kleinen horizontalen Kraft zur Seite zu bewegen, gleitet er überhaupt nicht. Die Bodenoberfläche übt eine Kraft auf den Quader auf, die sich dessen Bestreben, in Druckrichtung zu gleiten, vollständig entgegenstellt. Dagegen wird der Quader zu gleiten beginnen, wenn er mit einer hinreichend starken Kraft zur Seite gedrückt wird. Damit er weitergleitet, muss weiter Druck auf ihn ausgeübt werden. Ist das nicht der Fall, bremst die Reibungskraft die Bewegung des Quaders ab, so dass er schließlich ganz zur Ruhe kommt. Eine Komponente einer Kontaktkraft, die dem Gleiten oder der Tendenz zu gleiten entgegenwirkt, wird Reibungskraft genannt. Eine Reibungskraft wirkt stets parallel zur Kontaktfläche. Auch wenn es in den Abbildungen scheinen könnte, als würden Normalkräfte und Reibungskräfte nur an einem Punkt angreifen, sind sie in der Realität über die ganze Kontaktfläche verteilt.

Federn Die Kraft, die eine um eine kleine Länge Δx zusammengedrückte oder gedehnte Feder ausübt, ergibt sich experimentell zu

$$F_x = -k_F \cdot \Delta x \tag{4}$$

(Hook´sches gesetz) Dabei ist k_F die so genannte Federkonstante, ein Maß für die Steifheit einer Feder. Das negative Vorzeichen in der Gleichung zeigt, dass diese Kraft in entgegengesetzter Richtung zu der wirkt, in der die Feder gedehnt bzw. zusammengedrückt wird. Diese Beziehung, die als das Hooke'sche Gesetz bekannt ist, ist recht bedeutsam: Von einem Körper, der unter dem Einfluss von Kräften, die sich ausgleichen, im Ruhezustand ist, sagt man, er sei in einem statischen Gleichgewicht. Wenn eine kleine Verschiebung dieses Körpers eine Gesamtkraft zur Folge hat, die wieder in Richtung des Gleichgewichtspunkts weist (*eine so genannte Rückstellkraft*) , spricht man von einem stabilen Gleichgewicht.

2.3 Lösen der Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung ist eine Differentialgleichung

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{5}$$

Ihre Lösung ergibt den Ort zu einem gewissen Zeitpunkt. Die Geschwindigkeit ergibz sich direkt aus der zeitlichen Ableitung des Ortes. Die zweite Ableitung ist dann identisch mit der Beschleunigung und multipliziert mit der Masse die Kraft, die zur Zeit t am Ort $\vec{r} = (x, y, z)$ herrscht.

Die Lösung der Differentialgleichung kann trivial, einfach, kompliziert oder sogar analytisch unlösbar sein. Praktisch immer ist aber eine numerische Lösung möglich.

2.3.1 Lösung durch Integration

Wir wissen, wie man die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ und die Beschleunigungsfunktion $a(t)$ durch Ableiten der Ortsfunktion $x(t)$ nach der Zeit gewinnen kann. Das umgekehrte Problem besteht darin, die Funktion $x(t)$ zu ermitteln, wenn die Geschwindigkeit $v(t)$ oder die Beschleunigung $a(t)$ gegeben ist. Dazu muss man das Verfahren der Integration anwenden, das wir an dieser Stelle deshalb kurz erläutern wollen. Wenn wir die Beschleunigung $a(t)$ als Funktion der Zeit kennen, gilt es, eine Funktion $v(t)$zu finden, deren Ableitung die Beschleunigung ist. Die Funktion $v(t)$ wird dann eine Stammfunktion von $a(t)$ genannt.

Wenn beispielsweise die Beschleunigung konstant ist, also $dv(t) = a, a = konstant$ gilt, ist die Geschwindigkeit eine Funktion der Zeit, deren Ableitung gerade diese Konstante ist. Eine solche Funktion lautet $v(t) = at$. Allerdings kann zu der Funktion $v(t) = at$ noch eine beliebige Konstante - nennen wir sie V_o - addiert werden, ohne das Ergebnis

der Differenziation zu ändern. Also gilt folgende allgemeinere Form als die Lösung:

$$v(t) = at + V_o \tag{6}$$

Für$t = 0$gilt $v = V_a$. Somit ist V_o die Anfangsgeschwindigkeit. Mit der gleichen Begründung ist auch die Ortsfunktion $x(t)$ jene Funktion, deren Ableitung die Geschwindigkeit ist:

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = at + V_o$$

$\rightarrow$

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + V_o t + x_0$$

Wir haben hier ein wichtiges Merkmal der Vorgehensweise bei der Integration kennen gelernt: Um die allgemeine Lösung anzugeben, muss zu der Stammfunktion eine beliebige Konstante, die Integrationskonstante, hinzugefügt werden. Da wir zweimal integrieren mussten, um aus der Funktion$a(t)$ die Funktion $x(t)$ zu erhalten, treten nun zwei Konstanten, X_0 und V_0, auf. Diese Konstanten sind durch die Geschwindigkeit und den Ort des Teilchens zu einem bestimmten Anfangszeitpunkt gegeben, der gewöhnlich als $t = 0$ gewählt wird. Sie werden deshalb die Anfangsbedingungen genannt. Das Problem ermitteln Sie bei gegebener

Funktion $a(t)$ und den Anfangswerten X_0 und V_0 die Funktion $x(t)$ heißt das Anfangswertproblem. Da die Beschleunigung eines Teilchens durch die Kräfte bestimmt ist, die auf das Teilchen einwirken, ist dieses Problem in der Physik von fundamentaler Bedeutung. Somit können wir den Ort eines Teilchens im Prinzip für alle Zeiten berechnen, wenn wir die auf das Teilchen einwirkenden Kräfte sowie seinen Ort und seine Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt kennen (man spricht dann auch von der Lösung der Bewegungsgleichung) .

Das Bestimmen der Stammfunktion einer Funktion ist eng mit der Aufgabe verbunden, die Fläche unter einer Kurve zu berechnen. Wir betrachten dazu den Fall der Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit V_0. Die Ortsänderung oder Verschiebung Δx im Zeitraum Δt ist dann $\Delta x = V_0 \Delta t$

Dies die Fläche unter der Geschwindigkeits-Zeit-Kurve. Wenn V_0 negativ ist, sind auch die Verschiebung und die Fläche unter der Kurve negativ. Im Unterschied zu unserer herkömmlichen Vorstellung, eine Fläche sei immer positiv, erhält die Fläche unter der Kurve"(die Fläche zwischen der Kurve und der Zeitachse) in diesem Fall also einen negativen Wert.

Diese graphische Interpretation der Verschiebung als Fläche unter der $v-t-$Kurve ist auch dann gültig, wenn die Geschwindigkeit nicht konstant ist. Um dies zu zeigen,

teilen wir die Fläche unter der Kurve zunächst in viele kleinere Intervalle Δt_1, Δt_2 ... usw. auf, denen jeweils ein Rechteck zugeordnet ist. Der Flächeninhalt dieser dikreten Rechteck ist $V_i \Delta . t_i$, was näherungsweise gleich der Verschiebung tui des Teilchens im Zeitintervall Δt_i ist. Somit ist die Summe der Flächeninhalte der Rechtecke näherungsweise gleich der Summe der Verschiebungen in den einzelnen Zeitintervallen und damit gleich der Gesamtverschiebung vom Zeitpunkt t_1 bis zum Zeitpunkt $t_2 \bullet$

Mathematisch schreibt man dafür$\Delta x \sim \sum_i V_i \Delta t_i$.

Die Näherung kann beliebig gut gemacht werden, wenn nur eine ausreichende Anzahl von Rechtecken unter die Kurve gelegt wird, von denen jedes Rechteck einen ausreichend kleinen Wert von Δt besitzt. Im Grenzwert immer kleinerer Zeitintervalle (in dem die Anzahl der Rechtecke immer größer wird) geht die Summe gegen den Flächeninhalt unter der Kurve, der seinerseits gleich der Verschiebung ist. Der Grenzwert für immer kleiner werdende Zeitintervalle Δt ist gleich der Fläche unter der Kurve v(t); er heißt Integral der Funktion $v(t)$ und wird geschrieben als

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\sum_i V_i \Delta t_i \right) = \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt \tag{7}$$

2.3.2 Numerisches Lösen

Das Euler-Verfahren Wenn sich ein Teilchen unter dem Einfluss einer konstanten Kraft bewegt, ist seine Beschleunigung konstant. Damit kann man die Bewegungsgleichung, wie oben gezeigt, analytosch lösen (aufintegrieren). Doch was ist, wenn sich das Teilchendurch den Raum bewegt, während die auf das

Teilchen wirkenden Kräfte z.B. von dessen Ort und Geschwindigkeit abhängen? In diesem Fall bestimmen der Ort, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Teilchens zu einem Zeitpunkt den Ort und die Geschwindigkeit des Teilchens im nächsten Augenblick, woraus sich wiederum die Beschleunigung zu diesem Zeitpunkt ergibt. Sowohl der Ort und die Geschwindigkeit als auch die Beschleunigung des Teilchens ändern sich ständig mit der Zeit. Ein Näherungsverfahren für diese Aufgabenstellung besteht darin, die sich kontinuierlich ändernde Zeit in viele kleine Zeitintervalle Δt zu zerlegen. Bei der einfachsten Näherung wird dann einfach angenommen, dass die Beschleunigung während jedes Zeitschritts konstant ist. Diese Näherung wird das Euler-Verfahren oder Polygonzugverfahren genannt. Tatsächlich ist die Änderung der Beschleunigung während des Intervalls vernachlässigbar gering, wenn das Zeitintervall nur hinreichend klein ist.

Es seien x_o, V_0 und a_0 die bekannten Variablen Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Teilchens zu einem Anfangszeitpunkt t_o. Wenn man während Δt eine konstante Beschleunigung annimmt, beträgt die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t_1 = t_o + \Delta t$

$$v_1 = v_o + a_0 \Delta t \tag{8}$$

Entsprechend ergibt sich unter Vernachlässigung der Geschwindigkeitsänderung in dem Zeitintervall der neue Ort in dem Zeitintervall der neue Ort

$$x_1 = x_o + v_0 \Delta t$$

Aus diesen Werten v_1 und x_1 ergibt sich über das zweite Newton'sche Axiom die neue Beschleunigung a_1 . Im folgenden Schritt kann man dementsprechend aus v_1, x_1 und a_1 die Werte v_2 und x_2 , bzw. im weiteren v_i und x_i ,berechnen:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + a_n \Delta t \\ x_{n+1} &= x_n + v_n \Delta t \end{aligned} \tag{9}$$

Um also die Geschwindigkeit und den Ort zu einem Zeitpunkt $t$zu ermitteln, unterteilt man das Zeitintervall $t - t_o$ in eine große Anzahl kleinerer Intervalle Δt und wendet auf sie, beginnend bei t_o, iterativ die Gleichungen 9 an. Das bedeutet eine große Anzahl einfacher, sich stets wiederholender Rechenschritte, die man am besten einem Computer überlässt. Das beschriebene Verfahren, das Zeitintervall in kleine Schritte zu zerlegen und die Beschleunigung, die Geschwindigkeit und den Ort injedem Schritt aus den Ergebnissen des vorangegangenen Schritts zu berechnen, wird numerische Integration bzw. numerisches Lösen der Differentialgleichung genannt.

Verbesserte Verfahren Der Euler Algoithmus 9 ist nur die einfachste Form eines numerischen Integrationsverfahren und oft nicht sehr stabil. Die naheliegenste Verbesserung, die meist zu erstaunlichen Verbesserungen führt, besteht darin, wie in 10 gezeigt, die Formeln zu modifizieren, d.h. bei der Berechnung vom neuen x-Wert den eben berechneten $v_{n+1}-$Wert zu verwenden (Euler Backward Algorithmus)

$$v_{n+1} = v_n + a_n \Delta t \tag{10}$$
$$x_{n+1} = x_n + v_{n+1}\Delta t$$

Fas alle heutige Mathematikprogramme (Mathematica, Mathlab etc.) haben sehr komfortable und genaue Integratoren integriert, die es ermöglichen sehr einfach numerische Lösungen von Differentialgleichungen zu erhalten.

3 Die Gravitationskraft

Isaac Newton gelang um 1666 der gewaltige Schritt, die Planetenbewegung auf eine bestimmte, durch die Sonne ausgeübte Kraft zurückzuführen. Newton konnte mathematisch zeigen, dass eine Kraft, die umgekehrt proportional mit dem Abstand zwischen dem Planeten und der Sonne abnimmt, zu einer elliptischen Umlaufbahn führt, wie Kepler sie nachgewiesen hatte (*Die Kepler'schen Gesetze waren ein wichtiger Schritt auf dem Weg zum Verständnis der Planeten bewegung waren. Sie waren sie doch nur einfache empirische Regeln, die Kepler aus Brahes astronomischen Beobachtungen abgeleitet hatte.*). Darauf behauptete Newton kühn, eine solche Kraft würde zwischen zwei beliebigen Körpern im Universum wirken (z. B. auch zwischen dem fallenden Apfel und der Erde). Vor Newton war es nicht allgemein akzeptiert, dass die Gesetze der Physik, wie man sie auf der Erde beobachten konnte, auch für die Himmelskörper gälten. Das Newton'sche Gravitationsgesetz besagt, dass es eine anziehende Kraft zwischen je zwei punktförmigen Körpern gibt, die proportional zum Produkt ihrer Massen und umgekehrt proportional zum Quadrat ihres Abstands ist.

Bezeichnen wir die Massen der beiden punktförmigen Teilchen mit m_1 und m_2 und ihre Orte mit $\vec{r}_1$und $\vec{r}_2$ so ist $\vec{r}_{12}$ der Vektor, der von Teilchen 1 zu Teilchen 2 geht. Dann übt das Teilchen 1 auf das Teilchen 2 eine Kraft $\vec{F}_2^{(1)}$ aus, für die gilt:

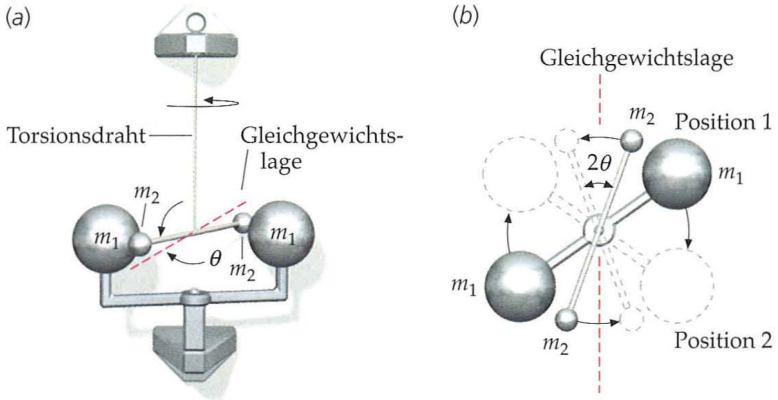
$$\vec{F}_2^{(1)} = -\Gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \widehat{r}_{12} = -\Gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \tag{11}$$

Γ ist die Gravitationskonstante mit dem Wert $\Gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2$.

Die Kraft $\vec{F}_1^{(2)}$, die von Teilchen 2 auf Teilchen 1 ausgeübt wird, ist gemäß dem dritten Newton'schen Axiom das Negative von $\vec{F}_2^{(1)}$. Die Gravitationskraft, die eine Punktmasse m_1 auf eine im Abstand r befindliche andere Punktmasse m_2 ausübt, besitzt daher den Wert

$$F = -\Gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \tag{12}$$

Bemerkung 6 *a) Schema der Drehwaage, die Cavendish zur Messung der Gravitationskonstanten Γ benutzte. Sie besteht aus zwei an einem leichten Stab befestigten kleinen Kugeln, jeweils mit der Masse m_2 die an einem dünnen Torsionsdraht hängen. Durch sorgfältige Messung kann man das Drehmoment bestimmen, mit dem sich der Draht um einen bestimmten Winkel verdrillen lässt.*



Dann werden zwei große Kugeln, jeweils mit der Masse m_1 in die Nähe der kleinen Kugeln gebracht. Wegen der Gravitationsanziehung der kleinen durch die großen Kugeln dreht sich der Draht um einen sehr kleinen Winkel ϑ aus der Gleichgewichtslage (der Winkel ist hier stark überzeichnet). b) Dieselbe Drehwaage von oben betrachtet. Nachdem die Anordnung ihre Gleichgewichtslage eingenommen hat (das kann wegen der extrem geringen Kräfte unter Umständen mehrere Stunden dauern), werden im zweiten Teil des Experiments die beiden großen Kugeln so gedreht, dass ihr Abstand von der Gleichgewichtslage der Waage der gleiche ist wie auf der anderen Seite (gestrichelte Linien). Wenn dann die Waage wieder ihre Gleichgewichtslage eingenommen hat, hat sich der Draht um den Winkel 2ϑ verdrillt, entsprechend der Umkehrung des Drehmoments. Ist die Torsionskonstante des Drahts bekannt, kann man die Kraft zwischen den Massen m_1, und m_2 aus der Messung des Torsionswinkels bestimmen. Mit den Werten der Massen und der Abstände zwischen ihnen lässt sich daraus die Gravitationskonstante Γ berechnen. Cavendish erhielt einen Wert für Γ, der nur um etwa 1 % vom heute akzeptierten, $\Gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2$ Wert abwich.

Bemerkung 7 • *1665 -1666 Isaac Newton*

Bemerkung 8 • *Die Kraft, die den Apfel vom Baum fallen lässt, ist die gleiche, die den Mond um die Erde und die Erde um die Sonne zwingt, d. h.: Beide Fälle sind Spezialfälle eines allgemeinen Kraftgesetzes, nach dem alle Massen einander anziehen.*

Bemerkung 9 • *Folgende Beobachtungen legen die Form des Gesetzes näher fest:*

Bemerkung 10 • *Auf der Erdoberfläche fallen alle Körper gleich schnell, abgesehen von denen, die so leicht sind, dass der Luftwiderstand eine wesentliche Rolle spielt. Die Fallbeschleunigung ist also unabhängig von der Masse m2 des fallenden Körpers.*

4 Die Coulomb (elektrische-) Kraft

Angenommen, wir reiben einen Plastikstab an einem Fell und hängen ihn dann an einer Schnur so auf, dass er frei rotieren kann. Dann bringen wir einen zweiten geriebenen Plastikstab in seine Nähe. Die Stäbe stoßen sich gegenseitig ab (. Wir erhalten dasselbe Ergebnis, wenn wir zwei Glasstäbe benutzen, die an Seide gerieben wurden. Bringen wir aber einen an Fell geriebenen Plastikstab in die Nähe eines an Seide geriebenen Glasstabs, dann ziehen sie sich gegenseitig an.

Beim Reiben wird der Stab elektrisch aufgeladen. Wird das Experiment mit verschiedenen Materialien wiederholt, so stellt man fest, dass sich alle geladenen Objekte in genau zwei Gruppen einteilen lassen - in eine, ähnlich dem an Fell geriebenen Plastikstab, und in eine andere, ähnlich dem an Seide geriebenen Glasstab. Objekte derselben Gruppe stoßen einander ab, Objekte aus verschiedenen Gruppen ziehen sich gegenseitig an. Benjamin Franklin schlug als Erklärung vor, dass jedes Objekt einen bestimmten Betrag an Elektrizität besitzt. Diese Elektrizitätsmenge - die Ladung - oder ein Teil davon kann von einem Objekt auf ein anderes übertragen werden, wenn zwei Objekte in engem Kontakt sind - genau wie beim Aneinanderreiben. Nach seiner Vorstellung hat dann ein Objekt einen Überschuss und das andere einen Mangel an Ladung, und zwar in derselben Größe wie der Überschuss. Franklin bezeichnete die Überschussladung mit einem Pluszeichen (+) und die Mangelladung mit einem Minuszeichen (-). Er wählte die Vorzeichen so, dass die Ladung auf dem an Seide geriebenen Glasstab positiv ist. Das Stück Seide erhält dann während des Vorgangs eine negative Ladung von gleicher Größe. Ein an Fell geriebener Plastikstab hat eine negative Ladung und das Fell eine positive. Auch wenn die Vorstellung von einem Ladungsüberschuss und einem Ladungsmangel nicht richtig ist, wurde Franklins Konvention der Klassifizierung elektrischer Ladungen als positive oder negative Ladungen übernommen. Zwei Objekte, die Ladungen mit gleichem Vorzeichen tragen, stoßen sich gegenseitig ab, und zwei Objekte, die Ladungen mit ungleichem Vorzeichen besitzen, ziehen sich gegenseitig an.

Heute wissen wir, dass beim Reiben Elektronen von Glas auf Seide übertragen werden. Da die Seide negativ geladen ist (gemäß der Franklin'schen Konvention, welche wir weiterhin benutzen), tragen Elektronen eine negative Ladung. Je weiter unten ein Material in der Reihe steht, desto größer ist seine Affinität für Elektronen. Wenn zwei Materialien in Kontakt gebracht werden, treten Elektronen von dem Material, das in der Tabelle höher steht, in das weiter unten in der Tabelle stehende Material über. Wenn z.B. Teflon mit Nylon gerieben wird, werden Elektronen von Nylon auf Teflon übertragen.

4.1 Ladungsquantisierung

Jedes Material besteht aus Atomen. Ein Atom besitzt einen winzigen, aber massiven Kern, der Protonen und Neutronen enthält. Protonen sind positiv geladen, Neutronen sind ungeladen. Die Anzahl der Protonen im Kern entspricht der Ordnungszahl oder Kernladungszahl Z des Elements. Den Atomkern umgibt eine gleiche Anzahl von negativ geladenen Elektronen, wodurch das Atom die Gesamtladung null erhält. Das Elektron ist ungefähr $2000 - mal$ leichter als das Proton, aber die Ladungen bei der Teilchen haben exakt den gleichen Betrag. Die Ladung des Protons ist $+e$ und die des Elektrons $-e$, wobei e als Elementarladung bezeichnet wird.

Die Ladung eines Elektrons oder Protons ist eine innere Eigenschaft des Teilchens, so wie Masse und Spin innere Eigenschaften dieser Teilchen sind. Alle beobachtbaren Ladungen treten in ganzzahligen Vielfachen der Elementarladung e auf, d. h., die Ladung ist quantisiert (in kleinste Portionen gequantelt). Irgendeine Ladung q, die in der makroskopischen Welt, in Molekülen, Atomen und Elementarteilchen vorkommt, kann als $q = \pm ne$ geschrieben werden, wobei n eine natürliche Zahl ist. Im Standardmodell der Elementarteilchen, wie Protonen, Neutronen und anderen, sind ein Teil der Elementarteilchen, die Hadronen, aus noch weiteren fundamentalen Teilchen, den so genannten Quarks, zusammengesetzt. Die Quarks tragen Ladungen von $\pm\frac{1}{3}e$ oder $\pm\frac{2}{3}e$. Quarks können selbst nicht als freie Teilchen isoliert werden, sie treten stets in gebundenen Zuständen auf, so dass die "*Drittelladungen*nicht beobachtbar sind.

Elementarteilchen sind aus zwei oder drei Quarks zusammengesetzt. Es sind nur solche Kombinationen der Quarks bekannt, die zu einer Summenladung von $\pm ne$oder 0 (n natürliche Zahl) führen.

Für gewöhnliche Objekte ist jedoch n im Allgemeinen sehr groß, und die Ladung scheint kontinuierlich verteilt zu sein, geradeso wie Luft kontinuierlich erscheint, obgleich Luft aus vielen diskreten Molekülen besteht. Um ein Alltagsbeispiel von n zu geben: Das Aufladen eines Kunststoffstabs durch Reiben mit einem Stück Fell überträgt etwa 10^{10} oder mehr Elektronen auf den Stab.

4.2 Ladungserhaltung

Wenn Objekte aneinander gerieben werden, kommt es zum Austausch von Elektronen und zwar zu einem Überschuss an Elektronen an einem Objekt, das sich negativ auflädt, bzw. zu einem Verlust an Elektronen an dem anderen Objekt, das positiv geladen zurückbleibt. Bei diesem Vorgang wird weder Ladung erzeugt noch vernichtet, sondern mit den Elektronen wird Ladung transportiert. Die Gesamtladung von beiden Objekten bleibt bei diesem Prozess konstant, sie bleibt erhalten. Das Gesetz von der Erhaltung der Ladung ist ein fundamentales Naturgesetz, ein Erfahrungssatz. Wir wissen, dass alle Stoffe aus Molekülen bzw. Atomen aufgebaut sind, die sich wiederum aus Elementarteilchen zusammensetzen. Elementarteilchen können bei Wechselwirkungen erzeugt oder vernichtet werden. Dabei gibt es Prozesse, in denen Elektronen erzeugt oder vernichtet werden, die Elektronenzahl vor und nach der Wechselwirkung nicht konstant bleibt. Auch solche Prozesse verletzen nicht den Ladungserhaltungssatz, denn wird bei einem Prozess ein negativ geladenes Teilchen vernichtet, wird gleichzeitig ein positiv geladenes Teilchen gleichen Ladungsbetrags auch vernichtet. (Ein Beispiel ist der Paarvernichtungsprozess: Ein Elektron mit der Ladung $-e$ wird gleichzeitig mit einem Positron der Ladung $+e$ vernichtet, und mindstens zwei Lichtquanten, die elektrisch neutral sind, werden erzeugt.) Bei allen Prozessen ist also die Gesamtladung der Teilchen vor der Wechselwirkung gleich der Gesamtladung der Teilchen nach der Wechselwirkung. Somit ist die elektrische Ladung des Universums konstant.

Die SI-Einheit der Ladung ist das Coulomb, das über die Grundeinheit des elektrischen Stroms, das Ampere (A), definiert ist. Das Coulomb (C) ist die Ladungsmenge, die in einer Sekunde durch die Querschnittsfläche eines Drahts fließt, wenn die Stromstärke im Draht ein Ampere beträgt.

Die Elementarladung e hat in der SI-Einheit Coulomb den Wert

$$e = 1,602177 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \tag{13}$$

Beispiel 11

Wie viel Elektronenladung steckt in einem Kupferpfennig?

Ein alter Kupferpfennig ($Z=29$) hatte eine Masse von 3 g. Wie groß ist die Gesamtladung von allen Elektronen in dem Kupferpfennig aus reinem Kupfer?

Problembeschreibung: Die Elektronen haben eine Gesamtladung, die durch die Zahl der Elektronen im Kupferpfennig, n_e, multipliziert mit der Ladung eines Elektrons, $-e$, gegeben ist. Die Zahl der Elektronen n_e ist das Produkt aus der Elektronenzahl eines Atoms (Ordnungszahl für Kupfer ist $Z=29$) multipliziert mit der Zahl der Kupferatome n_{Cu}. Ein Mol Kupfer hat eine Masse von 63,5 g und enthält $n_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ (Avogadro-Zahl) Kupferatome. Wir finden die Zahl der Atome in einem Gramm Kupfer, indem wir n_A (Atome/Mol) durch m_{Mol} (Gramm/Mol) dividieren.

Lösung:

1. Die Gesamtladung ist das Produkt aus der Zahl der Elektronen multipliziert mit der Elektronenladung: $q = n_e\,(-e)$

2. Die Zahl der Elektronen ist Z mal der Zahl der Kupferatome n_{Cu}: $n_e = Z\,n_{Cu}$

3. Berechnen Sie die Zahl der Kupferatome in 3 g Kupfer:
$$n_{Cu} = (3\ \mathrm{g}) \cdot \frac{6{,}02 \cdot 10^{23}\ \text{Atome/Mol}}{63{,}5\ \text{g/Mol}} = 2{,}84 \cdot 10^{22}\ \text{Atome}$$

4. Berechnen Sie die Zahl der Elektronen n_e:
$$n_e = Z\,n_{Cu} = (29\ \text{Elektronen/Atom}) \cdot (2{,}84 \cdot 10^{22}\ \text{Atome}) = 8{,}24 \cdot 10^{23}\ \text{Elektronen}$$

5. Berechnen Sie die Gesamtladung mit dem Wert von n_e:
$$q = n_e\,(-e) = (8{,}24 \cdot 10^{23}\ \text{Elektronen}) \cdot (-1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C/Elektron}) = \boxed{-1,32 \cdot 10^{5}\ \mathrm{C}}$$

ÜBUNG: Wenn jedem Mann, jeder Frau und jedem Kind in den Vereinigten Staaten (ungefähr 285 Millionen Menschen) eine Million Elektronen zugeordnet werden, wie viel Prozent der gesamten Elektronenzahl in einem Kupferpfennig würde das entsprechen? (*Lösung:* Ungefähr $35 \cdot 10^{-9}\,\%$.)

4.3 Das Coulomb'sehe Gesetz

Charles Coulomb (1736 -1806) untersuchte die Kraft, die durch eine Ladung auf eine andere ausgeübt wurde. Er benutzte dazu eine Torsionswaage, die er selbst erfunden hatte. Sie funktionierte im Wesentlichen wie die Torsionswaage für das Cavendish- Experiment, wobei die Massen durch kleine geladene Kugeln ersetzt wurden. Die Gravitationsanziehung der Kugeln ist vernachlässigbar klein, verglichen mit ihrer elektrischen Anziehung oder Abstoßung. In dem Coulomb'schen Experiment waren die Kugeln viel kleiner als der Abstand zwischen ihnen, so dass sie als Punktladungen betrachtet werden konnten. Coulomb benutzte die Influenz, um gleich geladene Kugeln zu erzeugen und um die Größe der Ladung auf den Kugeln zu variieren. Zum Beispiel konnte er mit einer Anfangsladung q_o auf jeder Kugel die Ladung auf $\frac{1}{2}q_0$ reduzieren. Das erfolgte durch zeitweiliges Erden einer Kugel, um diese zu entladen und sie danach mit der anderen Kugel wieder in Kontakt zu bringen. Die Ergebnisse der Experimente von Coulomb und anderen sind in dem Coulomb'schen Gesetz zusammengefasst:

Lemma 12 (Coulomb Gesetz) *Die Kraft, die von einer Punktladung auf eine andere ausgeübt wird, wirkt längs der Verbindungslinie zwischen den Ladungen. Sie ändert sich umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands der*

Ladungen und proportional zum Ladungsprodukt. Die Kraft ist abstoßend, wenn die beiden Ladungen gleiches Vorzeichen haben, und anziehend für Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens.

Erstaunlicherweise können wir fast alles, was wir für die Gravitationskraft festgestellt haben, hier übernehmen.

Bezeichnen wir die Ladungen der beiden punktförmigen Teilchen mit q_1 und q_2 und ihre Orte mit $\vec{r}_1$und $\vec{r}_2$ so ist $\vec{r}_{12}$ der Vektor, der von Teilchen 1 zu Teilchen 2 geht. Dann übt das Teilchen 1 auf das Teilchen 2 eine Kraft $\vec{F}_2^{(1)}$ aus, für die gilt:

$$\vec{F}_2^{(1)} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\widehat{r}_{12} = -\Gamma\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12} \tag{14}$$

ε_0 ist die Dielektrizitätslonstante im Vakuum mit dem Wert $\varepsilon_0 = 6.67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2$.

Die Kraft $\vec{F}_1^{(2)}$, die von Teilchen 2 auf Teilchen 1 ausgeübt wird, ist gemäß dem dritten Newton'schen Axiom das Negative von $\vec{F}_2^{(1)}$. Die Culombkraft, die eine Punktladung q_1 auf eine im Abstand r befindliche andere PunktLadung q_2 ausübt, besitzt daher den Wert

$$F = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \tag{15}$$

4.4 Der Feldbegriff: das elektrische- bzw. das Gravitationfeld

Im folgenden kann überall entweder die Coulombkraftft oder die Gravitationskraft (bzw. die jeweils entsprechenden Größen) eingesetzt werden.

Die Kraft, die von einer Ladung auf eine andere wirkt, ist eine Fernwirkungskraft, ähnlich der Gravitationskraft, die von einer Masse auf eine andere wirkt. Die Idee der Fernwirkung stellt ein schwieriges begriffliches Problem dar. Was ist das für ein Mechanismus, durch den ein Teilchen quer durch den leeren Raum eine Kraft auf ein anderes ausüben kann? Angenommen, ein geladenes Teilchen an irgendeinem Punkt wird plötzlich bewegt. Ändert sich die Kraft, die auf das zweite Teilchen im Abstand r ausgeübt wird, momentan? Um das Problem der Fernwirkung zu vermeiden, wird das Konzept des elektrischen Felds eingeführt. Eine Ladung erzeugt überall im Raum ein elektrisches Feld $\vec{E}$, und durch dieses Feld erfährt eine zweite Ladung eine Kraft. So ist es das Feld $\vec{E}$ am Ort der zweiten Ladung, das unmittelbar die Kraft auf sie vermittelt, und nicht die sich in einiger Entfernung befindliche erste Ladung selbst. Änderungen im Feld breiten sich durch den Raum mit Lichtgeschwindigkeit c aus. Wenn dann eine Ladung plötzlich bewegt wird, ändert sich die auf eine zweite Ladung im Abstand r wirkende Kraft erst zu einem späteren Zeitpunkt r/c. Z.b. drei Ladungen, im Raum verteilt, würden jede für sich überall im Raum ein elektrisches Feld $\vec{E}$ erzeugen. Wenn man eine kleine positive Probeladung q_0 an einen Punkt in der Nähe der drei Ladungen bringt, gibt es eine Kraft auf qo, die durch die anderen Ladungen hervorgerufen wird. (Eine Probeladung zeichnet sich dadurch aus, dass ihre

Wirkung auf die ursprüngliche Ladungsverteilung vernachlässigbar ist.) Die resultierende Kraft, die auf q_0 wirkt, ist die Vektorsumme der einzelnen Kräfte, die von allen anderen Ladungen des Systems auf qo ausgeübt werden. Da jede dieser Kräfte zu qo proportion al ist, wird die resultierende Kraft ebenfalls proportional zu q_0 sein. Das elektrische Feld $\vec{E}$ ist der Quotient der resultierenden Kraft $\vec{F}$ auf q_0 dividiert durch q_0:

Definition 13 (Feld)

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \tag{16}$$

Definition 14 *Das Feld wird allgemein als die Kraft auf eine Probeladung (Einheit 1) definiert.*

Diese Definition entspricht der des Gravitationsfelds der Erde. Die SI-Einheit des elektrischen Felds ist Newton dividiert durch Coulomb (N / C).

Das elektrische Feld beschreibt den Zustand des Raums, der durch ein System von Punktladungen hervorgerufen wird. Durch Bewegen einer Probeladung q_0 von Punkt zu Punkt kann man $\vec{E}$ in allen Raumpunkten finden (*außer an Punkten mit felderzeugenden Ladungen* q_0). Daher ist das elektrische Feld $\vec{E}$ eine Vektorfunktion des Orts. Die Kraft auf eine beliebige Ladung q an irgendeinem Punkt ist mit dem elektrischen Feld durch folgende Beziehung verbunden.

$$\vec{F} = q\vec{E}$$