Lösungsvorschlag von Tonico Strasser

126) Wir substituieren $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$. Damit transformiert sich der Bereich der Angabe (Kreisfläche) $B = \left\{(x,y)| -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}, -1 \leq y \leq 1\right\}$ in das Rechteck $B' = \{(r,\varphi)|0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$. Es gilt

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}(x+y)^2 dxdy = \int_0^1\int_0^{2\pi}(r\cos\varphi + r\sin\varphi)^2 \underbrace{\left|\det\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix}\right|}_{r} d\varphi dr.$$

Nun berechnen wir wie gewohnt zuerst das innere dann das äußere Integral.

$$\int_0^{2\pi} r(r\cos\varphi + r\sin\varphi)^2 d\varphi = 2r^3\int_0^{2\pi}\frac{1}{2} + \cos\varphi\sin\varphi \; d\varphi = 2r^3\pi$$
$$\int_0^1 2r^3\pi \; dr = \frac{\pi}{2}$$