4. Eine Funktion $f(x_1,\ldots,x_n)$ heißt homogen vom Grad r, falls für jedes feste $\lambda > 0$ und alle $(x_1,\ldots,x_n)$ aus dem Definitionsbereich von f gilt $f(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n) = \lambda^r f(x_1,\ldots,x_n)$. Man beweise, dass die beiden Produktionsfunktionen $f(x,y) = cx^{\alpha}y^{1-\alpha}$ und $g(x,y) = \left(cx^{\alpha} + dy^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ (x Arbeit, y Kapital, c,d,α konstant) homogene Funktionen vom Homogenitätsgrad $r = 1$ sind.

Eine Funktion $f(x_1,\ldots,x_n)$ heißt homogen vom Grad r, falls für jedes feste $\lambda > 0$ und alle $(x_1,\ldots,x_n)$ aus dem Definitionsbereich von f gilt $f(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n) = \lambda^r \cdot f(x_1,\ldots,x_n)$.

Produktionsfunktion 1: $f(x,y) = cx^{\alpha}y^{1-\alpha}$

$$c \cdot (\lambda x)^{\alpha} \cdot (\lambda y)^{1-\alpha} = c \cdot \lambda^{\alpha} x^{\alpha} \cdot \lambda^{1-\alpha} y^{1-\alpha} = \lambda^{\alpha}\lambda^{1-\alpha}\left(cx^{\alpha}y^{1-\alpha}\right) = \lambda^{1-\alpha+\alpha}\left(cx^{\alpha}y^{1-\alpha}\right) = \lambda^{1}\left(cx^{\alpha}y^{1-\alpha}\right)$$

$$\lambda^{(\alpha+1-\alpha)} \cdot (cx^{\alpha}y^{1-\alpha}) = \lambda^{1} \cdot (cx^{\alpha}y^{1-\alpha}) \rightarrow \text{homogen!}$$

Produktionsfunktion 2: $g(x,y) = (cx^{\alpha} + dy^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}$

$$\left(c \cdot \lambda x^{\alpha} + d \cdot \lambda y^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \lambda \cdot \left(cx^{\alpha} + dy^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\lambda^{\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}} \cdot \left(c \cdot x^{\alpha} + d \cdot y^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \lambda^{1} \cdot \left(cx^{\alpha} + dy^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \rightarrow \text{homogen!}$$