60. Man löse das Interpolationsproblem aus Aufgabe 59 unter Anwendung des Newtonschen Interpolationsverfahrens. Wie lauten die Funktionswerte des Interpolationspolynoms an den Stellen $x = 1, 3, 5$?

Ansatz:

$p(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + b_n(x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdot\ldots\cdot(x - x_{n-1})$

Berechnung der Koeffizienten b_i aus der Interpolationsbedingung $p(x_i) = y_i$, $i = 0,\ldots,n$ $\Rightarrow$ es entsteht ein lineares Gleichungssystem für $b_0, b_1, \ldots, b_n$ in Dreiecksgestalt.

Ferner gilt: $p_{n+1}(x) = p_n(x) + b_{n+1}(x - x_0)\cdot\ldots\cdot(x - x_{n-1})(x - x_n)$

Allgemein: $p_k(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots + b_k(x - x_0)\cdot\ldots\cdot(x - x_{k-1})$ ist ein Polynom durch $x_0,\ldots,x_k$; $k = 0,1,\ldots,n$. b_k ist der Koeffizient von x^k in $p_k(x)$, der eindeutig durch (x_i, y_i) ; $i = 0,\ldots,n$ bestimmt ist (unabhängig von der Reihenfolge dieser Punkte!)

Wir bezeichnen $b_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ als $\begin{cases} k - \text{ter Differenzenquotient} \\ k - \text{te dividierte Differenz} \end{cases}$ der Funktion f zu den Stellen $x_0,\ldots,x_k$.

unsere 4 Interpolationsstellen lauten: (0, 180), (2, 240), (4, 320) und (6, 360)

zum Ausrechnen konstruieren wir das Dreiecksschema wie im Skriptum beschrieben:

$$\begin{array}{l|l}
x_0 = 0 & f[x_0] = 180 \\
 & \quad \rangle\, f[x_0,x_1] = 30 \\
x_1 = 2 & f[x_1] = 240 \qquad\qquad\qquad \rangle\, f[x_0,x_1,x_2] = 2{,}5 \\
 & \quad \rangle\, f[x_1,x_2] = 40 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \rangle\, f[x_0,x_1,x_2,x_3] = -1{,}25 \\
x_2 = 4 & f[x_2] = 320 \qquad\qquad\qquad \rangle\, f[x_1,x_2,x_3] = -5 \\
 & \quad \rangle\, f[x_2,x_3] = 20 \\
x_3 = 6 & f[x_3] = 360
\end{array}$$

und jetzt die einzelnen Teile berechnen:

$p(x_i) = b_i + 0 \Rightarrow f[x_0] = b_0 = p(x_0) = y_0$

$$f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{240 - 180}{2 - 0} = \frac{60}{2} = 30$$

$$f[x_1,x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{320 - 240}{4 - 2} = \frac{80}{2} = 40$$

$$f[x_2,x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2} = \frac{360 - 320}{6 - 4} = \frac{40}{2} = 20$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]}{(x_2 - x_0)} = \frac{40 - 30}{4 - 0} = \frac{10}{4} = 2{,}5$$

$$f[x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{(x_3-x_1)}=\frac{20-40}{6-2}=-\frac{20}{4}=-5$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_0,x_1,x_2]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_3-x_0}=\frac{-5-2{,}5}{6-0}=\frac{-7{,}5}{6}=-\frac{\cancel{15}\cdot 5}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{6}\cdot 2}=-\frac{5}{4}=-1{,}25$$

also wäre unser Interpolationspolynom:

$$p(x)=b_0+b_1\cdot(x-x_0)+b_2\cdot(x-x_0)(x-x_1)+b_3\cdot(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)=$$
$$=f[x_0]+f[x_0,x_1]\cdot(x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2]\cdot(x-x_0)(x-x_1)+f[x_0,x_1,x_2,x_3]\cdot(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

einsetzen:

$$p(x)=180+30\cdot(x-0)+\frac{5}{2}\cdot(x-0)(x-2)-\frac{5}{4}\cdot(x-0)(x-2)(x-4)=$$
$$=180+30x+\frac{5}{2}\cdot\left(x^2-2x\right)-\frac{5}{4}\cdot\left(x^2-2x\right)(x-4)=$$
$$=180+30x+\frac{5}{2}x^2-5x-\frac{5}{4}\cdot\left(x^3-2x^2-4x^2+8x\right)=$$
$$=180+30x+\frac{5}{2}x^2-5x-\frac{5}{4}\cdot\left(x^3-6x^2+8x\right)=$$
$$=180+30x+\frac{5}{2}x^2-5x-\frac{5}{4}x^3+\frac{30}{4}x^2-\frac{40}{4}x=$$
$$=-\frac{5}{4}x^3+\frac{5}{2}x^2+\frac{30}{4}x^2+30x-5x-\frac{40}{4}x+180=$$
$$=-\frac{5}{4}x^3+\frac{5}{2}x^2+\frac{15}{2}x^2+30x-5x-10x+180=$$
$$=-\frac{5}{4}x^3+\frac{20}{2}x^2+15x+180$$
$$=-\frac{5}{4}x^3+10x^2+15x+180$$

Also lautet unser Interpolationspolynom:

$$p(x)=-\frac{5}{4}x^3+10x^2+15x+180$$

Nun sollen wir noch die Werte $x=1$, $x=3$, $x=5$ in das Interpolationspolynom einsetzen:

$$p(1)=-\frac{5}{4}1^3+10\cdot 1^2+15\cdot 1+180=-\frac{5}{4}+10+15+180=205-1{,}25=203{,}75$$
$$p(3)=-\frac{5}{4}\cdot 3^3+10\cdot 3^2+15\cdot 3+180=\text{...[Taschenrechnter]...}=281{,}25$$
$$p(5)=-\frac{5}{4}\cdot 5^3+10\cdot 5^2+15\cdot 5+180=\text{...[Taschenrechnter]...}=348{,}75$$