2. Übungsblatt – Beispiel 2

Angabe

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 101 & 99 \\ 99 & 101 \end{pmatrix}$$

*a) Berechnen Sie die Konditionszahl$\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$.
b) Lösen Sie für die Vektoren$\vec{b} = (1,1)^T, \Delta\vec{b}_1 = (\delta, \delta)^T und \Delta\vec{b}_2 = (\delta, -\delta)^T$mit einer kleinen reellen Zahl δ > 0 die Gleichungssysteme$A\vec{x} = \vec{b}, A(\vec{x} + \Delta\vec{x_1}) = \vec{b} + \Delta\vec{b_1} und A(\vec{x} + \Delta\vec{x_2}) = \vec{b} + \Delta\vec{b_2}$.
Vergleichen Sie die jeweiligen relativen Fehler

$$\frac{\|\Delta\vec{x_1}\|_\infty}{\|\vec{x}\|_\infty} und \frac{\|\Delta\vec{x_2}\|_\infty}{\|\vec{x}\|_\infty}$$

mit der allgemeinen Fehlerschätzung

$$\frac{\|\Delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\Delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}$$

Lösung

*a) Die Konditionszahl wurde in Matlab mittels folgendes Codes berechnet:

```
A = [101 99; 99 101];
Ainv = inv(A);

Kappa = norm(A,Inf) * norm(Ainv,Inf);
fprintf('Konditionszahl: %.10f\n', Kappa);
```

Das Ergebnis der Funktion ist 100, was darauf hinweist, dass die Matrix sehr schlecht konditioniert ist.

b)

I: Zuerst wurde das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$aufgelöst:

101x + 99y = 1 -
99x + 101y = 1
2x – 2y = 0 => x = y
=>
101y + 99y = 1
200y = 1
y = $\frac{1}{200}$= x

Das Ergebnis: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}005 \\ 0{,}005 \end{pmatrix}$

II: Das Gleichungssystem $A(\vec{x} + \Delta\vec{x_1}) = \vec{b} + \Delta\vec{b_1}$wurde wie folgt gelöst:

$(\vec{x} + \Delta\vec{x_1}) = A^{-1}\vec{b} + \Delta\vec{b_1} \Rightarrow \vec{b_1} = \begin{pmatrix} 1+\delta \\ 1+\delta \end{pmatrix} \Rightarrow (\vec{x} + \Delta\vec{x_1}) = A^{-1} * \vec{b_1}$

Die inverse Matrix A⁻¹ ist dabei $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}2525 & -0{,}2475 \\ -0{,}2475 & 0{,}2525 \end{pmatrix}$.

Nun können wir in die obige Formel einsetzen um auf $\Delta\vec{x_1}$zu kommen:

$\begin{pmatrix} 0{,}2525 + 0{,}2525\delta - 0{,}2475 - 0{,}2475\delta \\ -0{,}2475 - 0{,}2475\delta + 0{,}2525 + 0{,}2525\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}005 + 0{,}005\delta \\ 0{,}005 + 0{,}005\delta \end{pmatrix} \Rightarrow\Rightarrow \begin{pmatrix} 0{,}005 + 0{,}005\delta \\ 0{,}005 + 0{,}005\delta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}005 \\ 0{,}005 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}005\delta \\ 0{,}005\delta \end{pmatrix} = \Delta\vec{x_1}$

III: Das letzte Gleichungssystem $A(\vec{x} + \Delta\vec{x_2}) = \vec{b} + \Delta\vec{b_2}$wurde nach dem gleichen Verfahren gelöst:

$(\vec{x} + \Delta\overrightarrow{x_2}) = A^{-1}\vec{b} + \Delta\overrightarrow{b_2} \Rightarrow \overrightarrow{b_2} = \begin{pmatrix} 1+\delta \\ 1-\delta \end{pmatrix} \Rightarrow (\vec{x} + \Delta\overrightarrow{x_2}) = A^{-1} * \overrightarrow{b_2}$

Nun können wir in die obige Formel einsetzen um auf $\Delta\overrightarrow{x_2}$zu kommen:
$\begin{pmatrix} 0{,}2525 + 0{,}2525\delta - 0{,}2475 + 0{,}2475\delta \\ 0{,}2475 - 0{,}2475\delta + 0{,}2525 - 0{,}2525\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}005 + 0{,}5\delta \\ 0{,}005 - 0{,}5\delta \end{pmatrix} \Rightarrow\Rightarrow \begin{pmatrix} 0{,}005 + 0{,}5\delta \\ 0{,}005 - 0{,}5\delta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}005 \\ 0{,}005 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5\delta \\ -0{,}5\delta \end{pmatrix} = \Delta\overrightarrow{x_2}$

Nun werden die relative Fehler ausgerechnet:

$$\frac{\|\Delta\overrightarrow{x_1}\|_\infty}{\|\vec{x}\|_\infty} und \frac{\|\Delta\overrightarrow{x_2}\|_\infty}{\|\vec{x}\|_\infty}$$

Für δ wurde dabei die Zahl 0,002 gewählt. Einsetzen ergibt:
$\frac{\|\Delta\overrightarrow{x_1}\|_\infty}{\|\vec{x}\|_\infty} = \frac{max(|0{,}00001|,|0{,}00001|)}{max(|0{,}005|,|0{,}005|)} = \frac{0{,}00001}{0{,}005} = 0{,}002$und

$$\frac{\|\Delta\overrightarrow{x_2}\|_\infty}{\|\vec{x}\|_\infty} = \frac{max(|0{,}001|, |-0{,}001|)}{max(|0{,}005|, |0{,}005|)} = \frac{0{,}001}{0{,}005} = 0{,}2$$

Die allgemeine Fehlerabschätzung lautet dann:

$$\frac{\|\Delta\overrightarrow{x_1}\|_\infty}{\|\vec{x}\|_\infty} \leq \kappa(A)\frac{\|\Delta\overrightarrow{b_1}\|_\infty}{\|\vec{b}\|_\infty} = 0{,}002 \leq 100\frac{max(|0{,}002|, |0{,}002|)}{max(|1|, |1|)} = 0{,}002 \leq 100 ** 0{,}002 = 0{,}002 \leq 0{,}2$$

$$\frac{\|\Delta\overrightarrow{x_2}\|}{\|\vec{x}\|} \leq \kappa(A)\frac{\|\Delta\overrightarrow{b_2}\|}{\|\vec{b}\|} = 0{,}002 \leq 100\frac{max(|0{,}002|, |-0{,}002|)}{max(|1|, |1|)} = 0{,}2 \leq 100 ** 0{,}002 = 0{,}2 \leq 0{,}2$$

Man kann also sehen, dass das Gleichungssystem$A(\vec{x} + \Delta\overrightarrow{x_1}) = \vec{b} + \Delta\overrightarrow{b_1}$mit $\Delta\vec{b}_1 = (\delta, \delta)^T$ wesentlich weniger fehleranfällig ist als das Gleichungssystem $A(\vec{x} + \Delta\overrightarrow{x_2}) = \vec{b} + \Delta\overrightarrow{b_2}$mit $\Delta\vec{b}_2 = (\delta, -\delta)^T$

Theorie

Die Konditionszahl einer Matrix gibt an, wie fehleranfällig diese ist bei einer möglichen Störung der Daten. Es gilt dabei: Ist die Konditionszahl wesentlich größer als 1, ist das Problem schlecht konditioniert, sonst ist das Problem gut konditioniert.

Ein ungestörtes Problem wäre $A\vec{x} = \vec{b}$, ein gestörtes Problem wäre $A\tilde{\vec{x}} = \tilde{\vec{b}} \Rightarrow\Rightarrow A(\vec{x} + \Delta\vec{x}) = \vec{b} + \Delta\vec{b}$.

Bei unserem Beispiel war die Konditionszahl der Matrix selbst gleich 100, das heißt sie ist schlecht konditioniert und sehr anfällig gegenüber Störung.

Wir unterscheiden auch zwischen relativer und absoluter Konditionsabschätzung. Für dieses Beispiel wurde $\vec{b}$gestört. Aus dem gestörten Problem lässt sich die Formel für die **absolute Konditionsabschätzung** herleiten:

$$\|\Delta\vec{x}\| = \|\Delta\tilde{\vec{x}} - \vec{x}\| \leq \|A^{-1}\| * \|\Delta\vec{b}\|$$

Die Formel für die **relative Konditionsabschätzung** ergibt sich dadurch, dass alle absoluten Fehlergrößen durch relative Fehlergrößen ersetzt:

$$\frac{\|\Delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \leq \frac{\|A\| * \|A^{-1}\| * \|\Delta\vec{b}\|}{\|A\| * \|\vec{x}\|} \leq \|A\| * \|A^{-1}\| * \frac{\|\Delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}$$

Dabei ist $\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$die Konditionszahl.