Vorlesung "Modellierung nebenläufiger Systeme"
Sommersemester 2011
Universität Duisburg-Essen

Barbara König

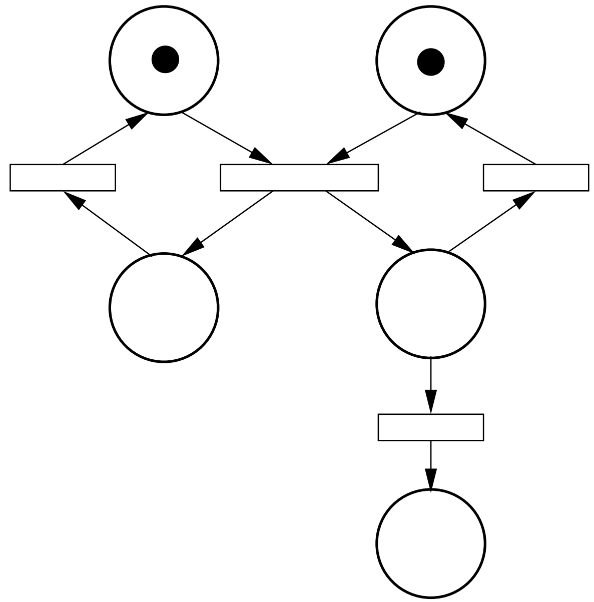
Motivation: Petrinetze

Petrinetze sind ein Formalismus zur Modellierung von nebenläufigen Systemen mit folgenden Eigenschaften:

- Vorstellung von Systemübergängen, bei denen gemeinsame Ressourcen konsumiert und neu erzeugt werden können.
- Natürliche Modellierung von räumlicher Verteilung der Ressourcen, Nebenläufigkeit und (Zugriffs-)Konflikten.
- Intuitive graphische Darstellung.
- Petrinetze werden in der Praxis vielfach benutzt. In UML sind sie abgewandelt als sogenannte Aktivitätsdiagramme (activity diagrams) eingegangen.

Motivation: Petrinetze

Beispiel für ein Petrinetz:

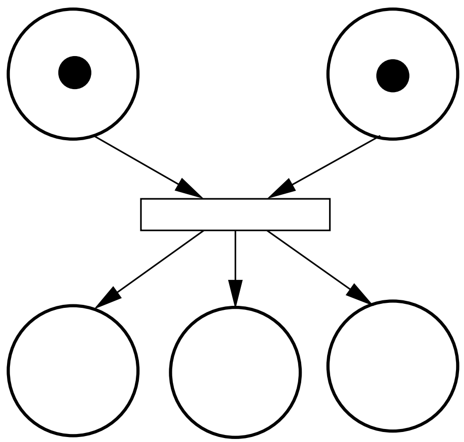


Notation:

- Stellen (dargestellt als Kreise): Mögliche Plätze für Ressourcen
- Marken (dargestellt als kleine ausgefüllte Kreise): Ressourcen
- Transitionen (dargestellt durch Rechtecke): Systemübergänge

Motivation: Petrinetze

Darstellung einer Transition:

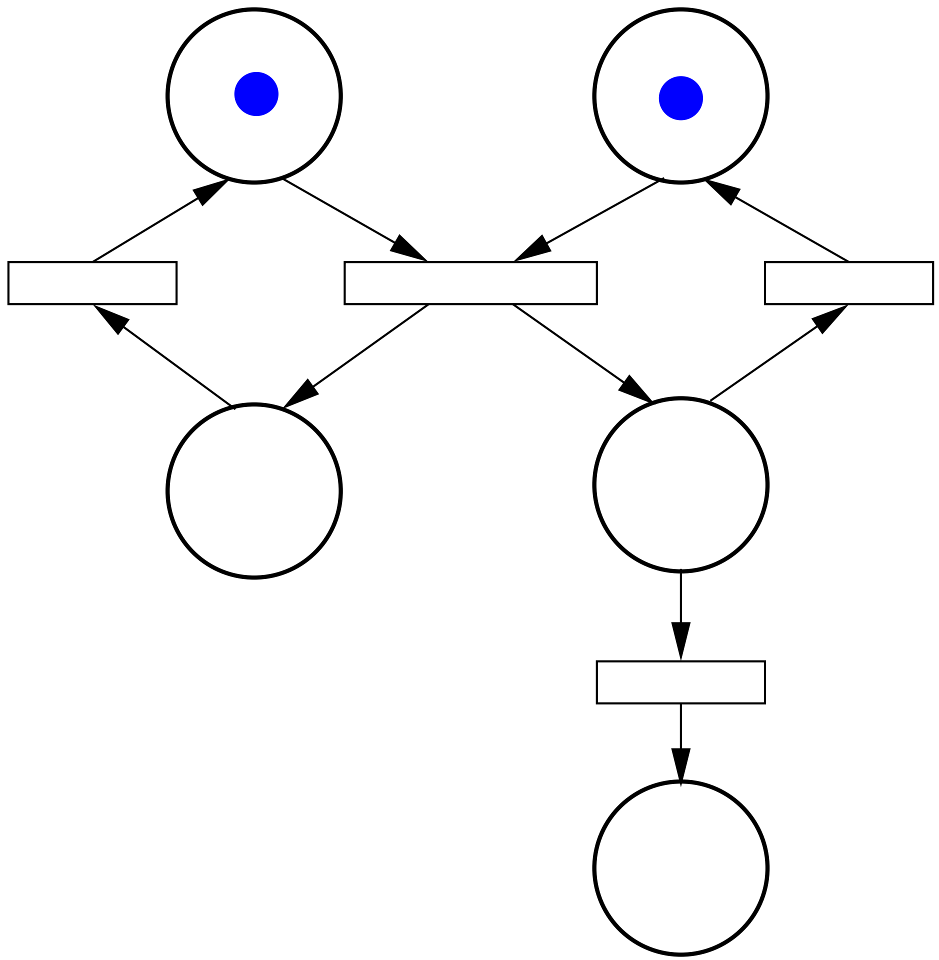


Vorbedingung (Marken, die konsumiert werden)

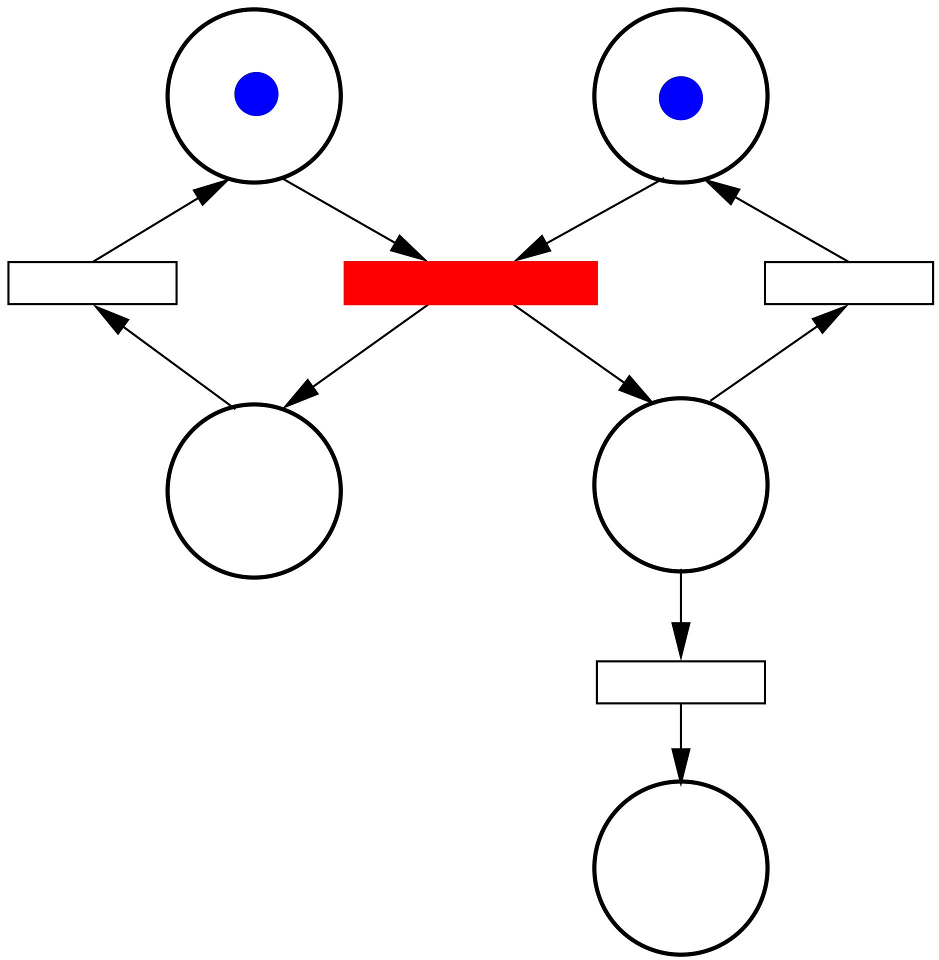
Nachbedingung (Marken, die erzeugt werden)

Die Entfernung der Marken der Vorbedingung und Erzeugung der Marken der Nachbedingung nennt man Schalten bzw. Feuern der Transition.

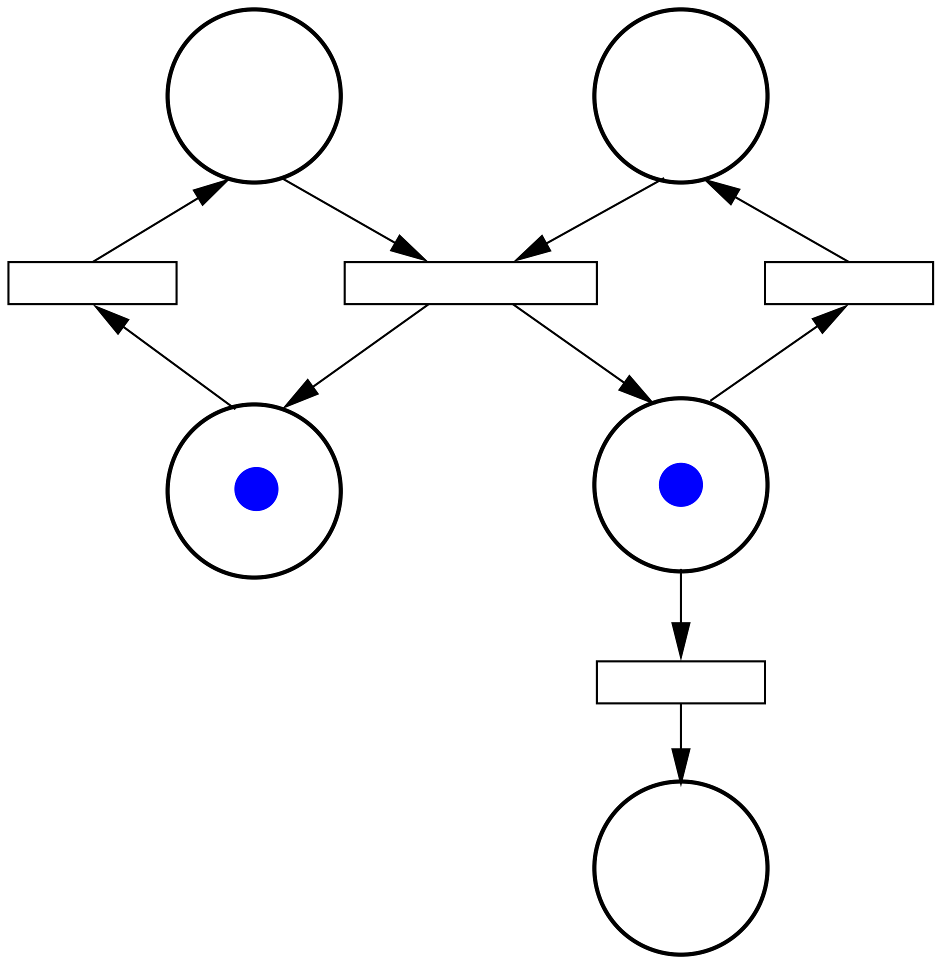
Motivation: Petrinetze



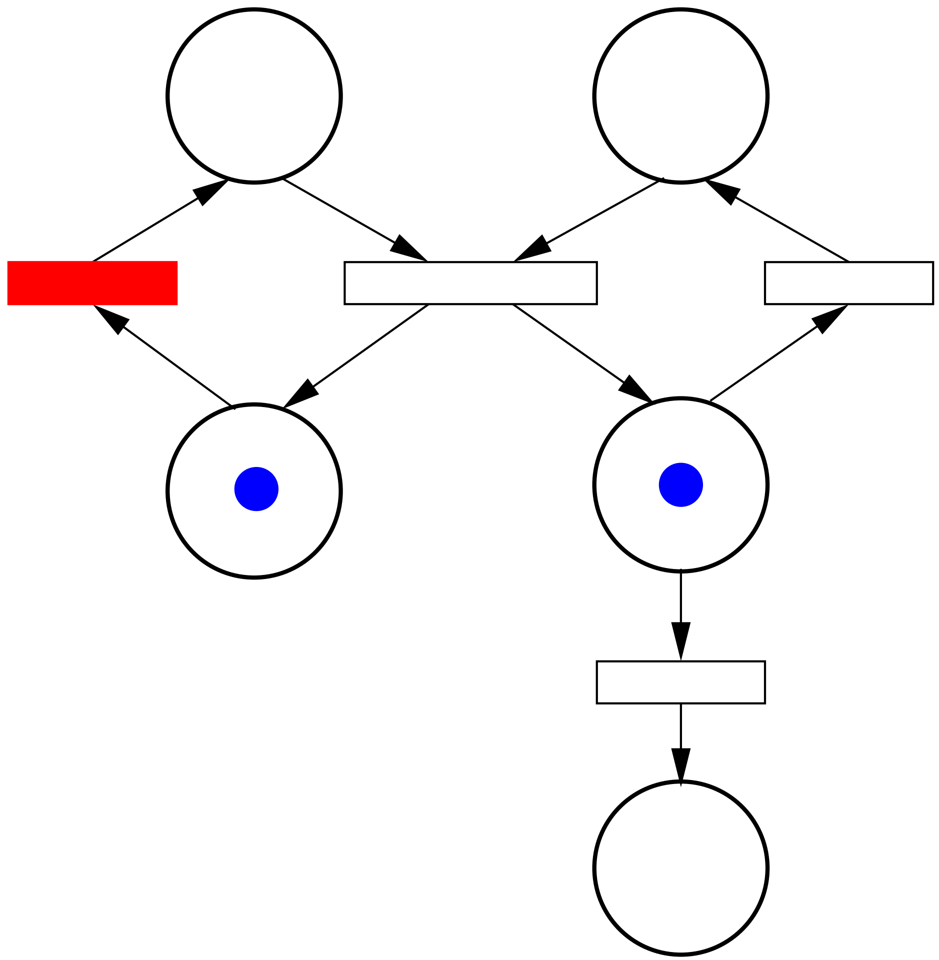
Motivation: Petrinetze



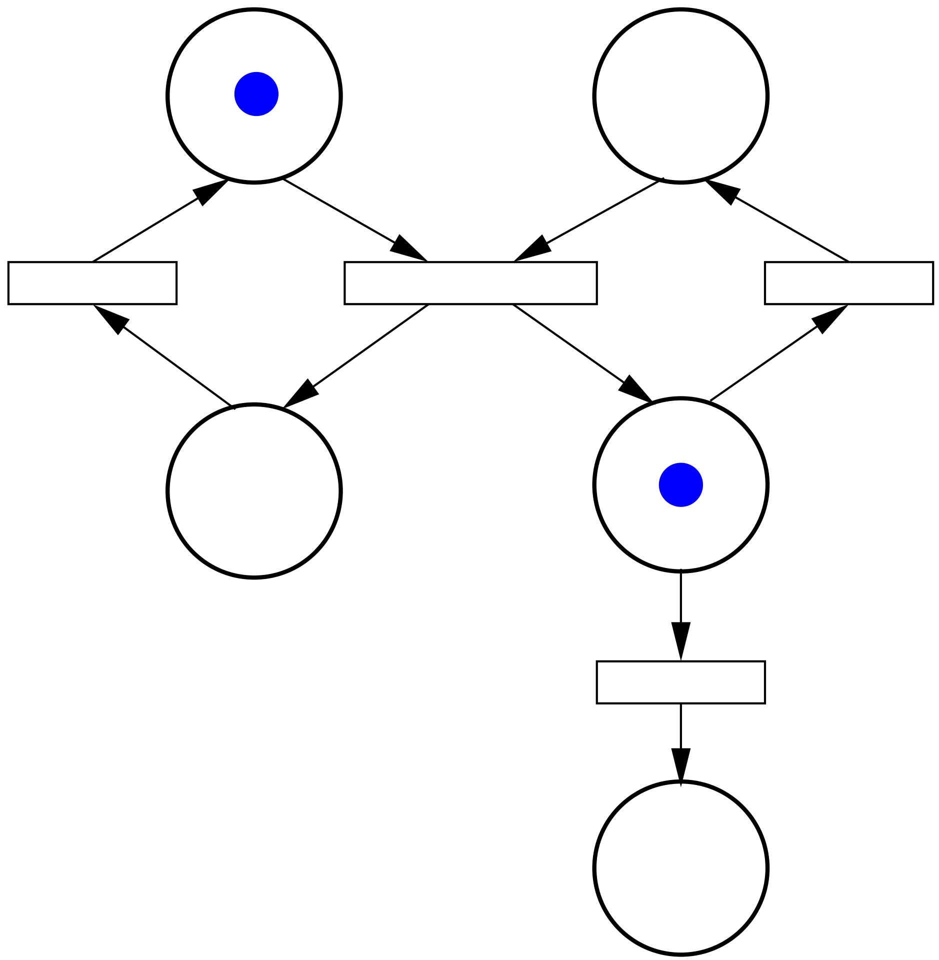
Motivation: Petrinetze



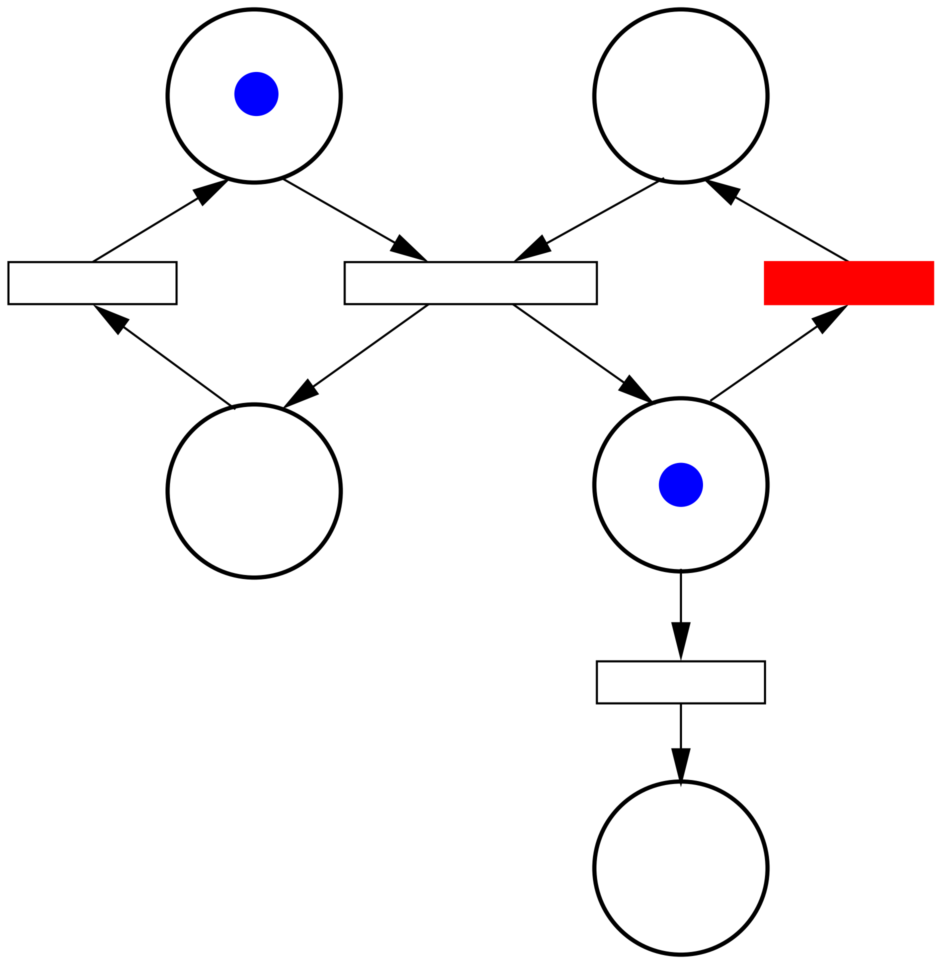
Motivation: Petrinetze



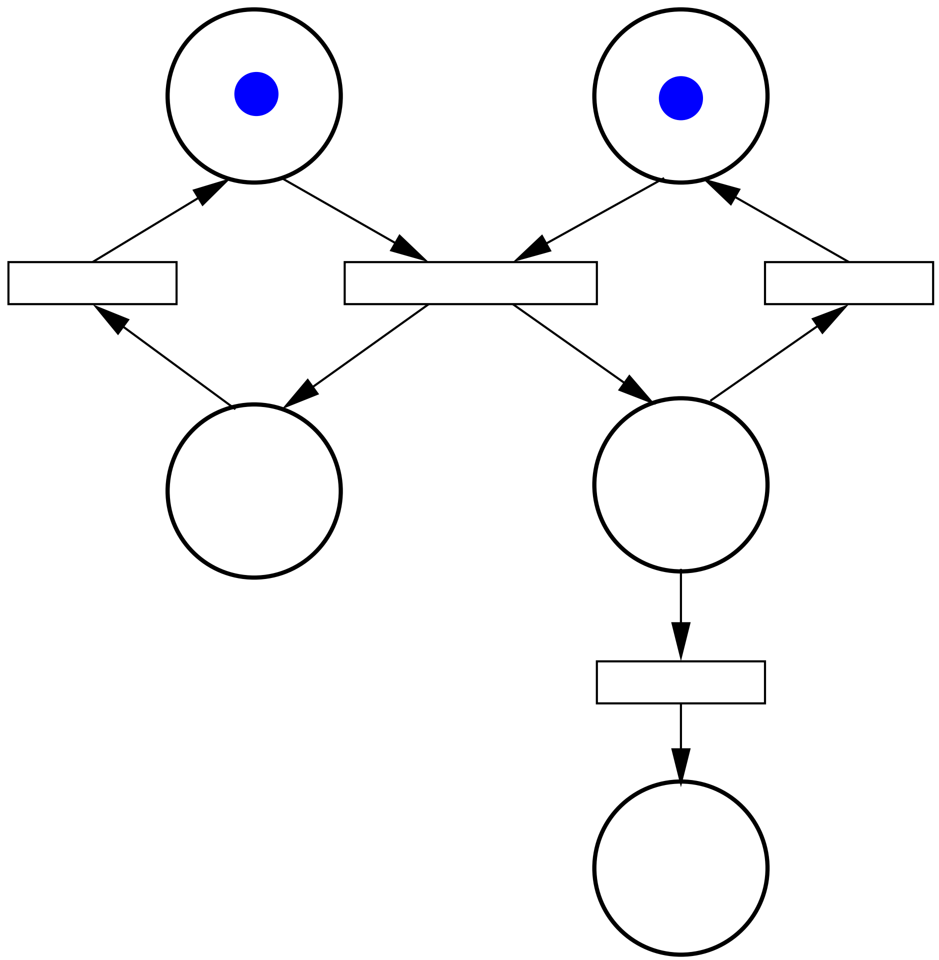
Motivation: Petrinetze



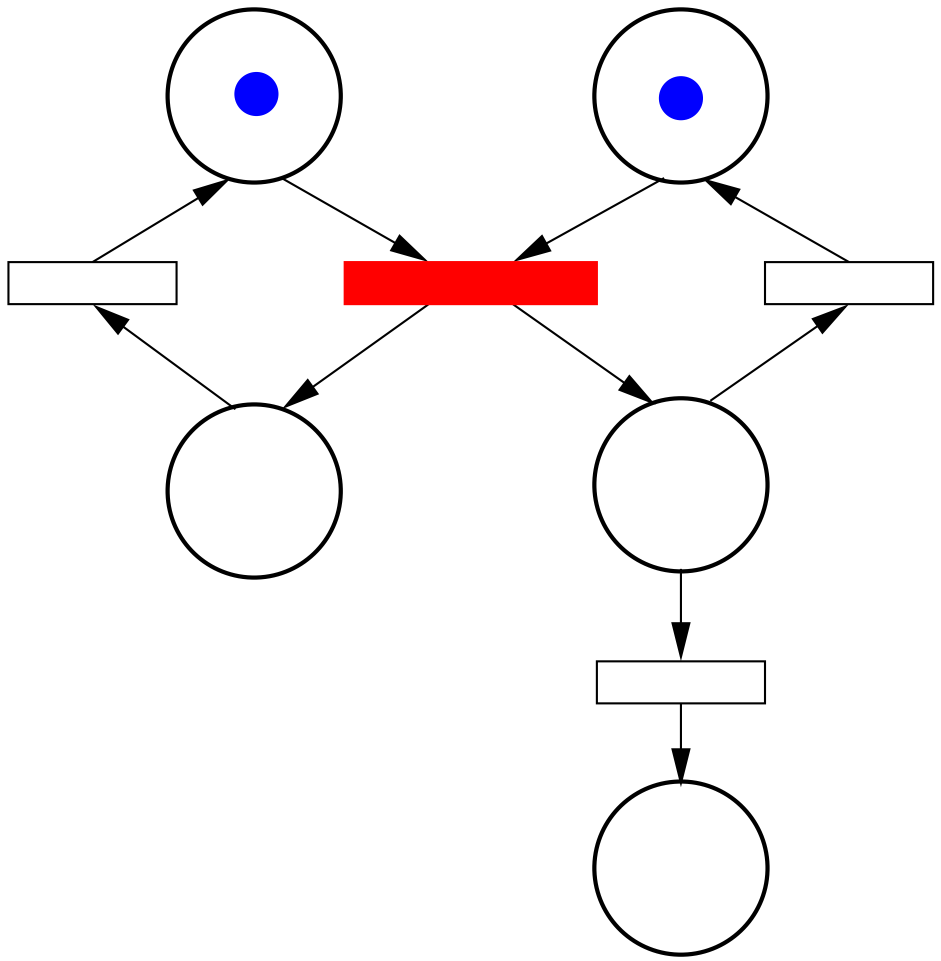
Motivation: Petrinetze



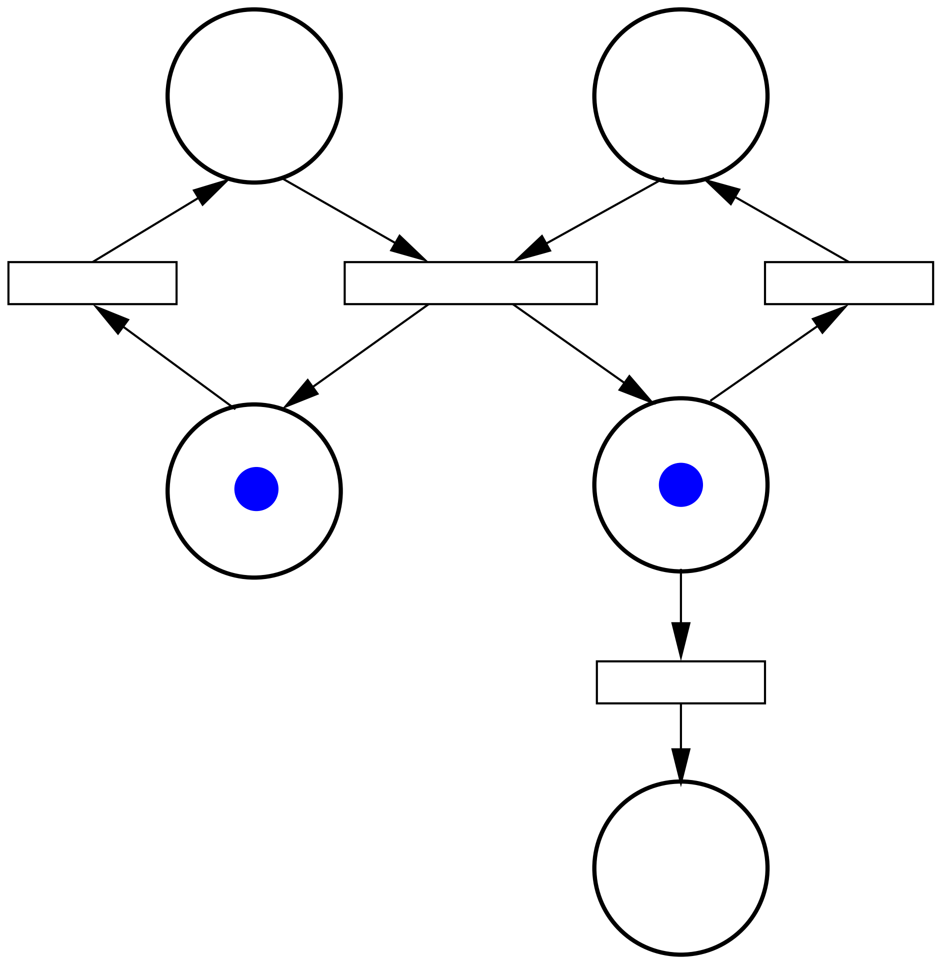
Motivation: Petrinetze



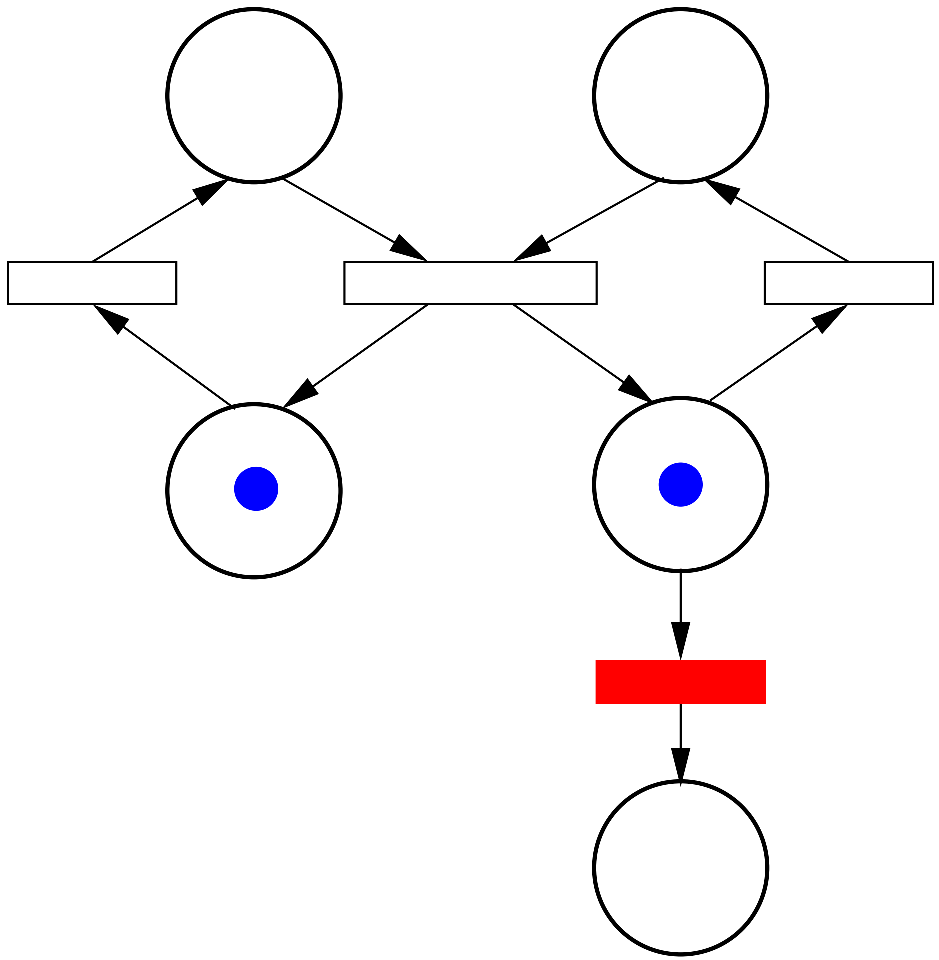
Motivation: Petrinetze



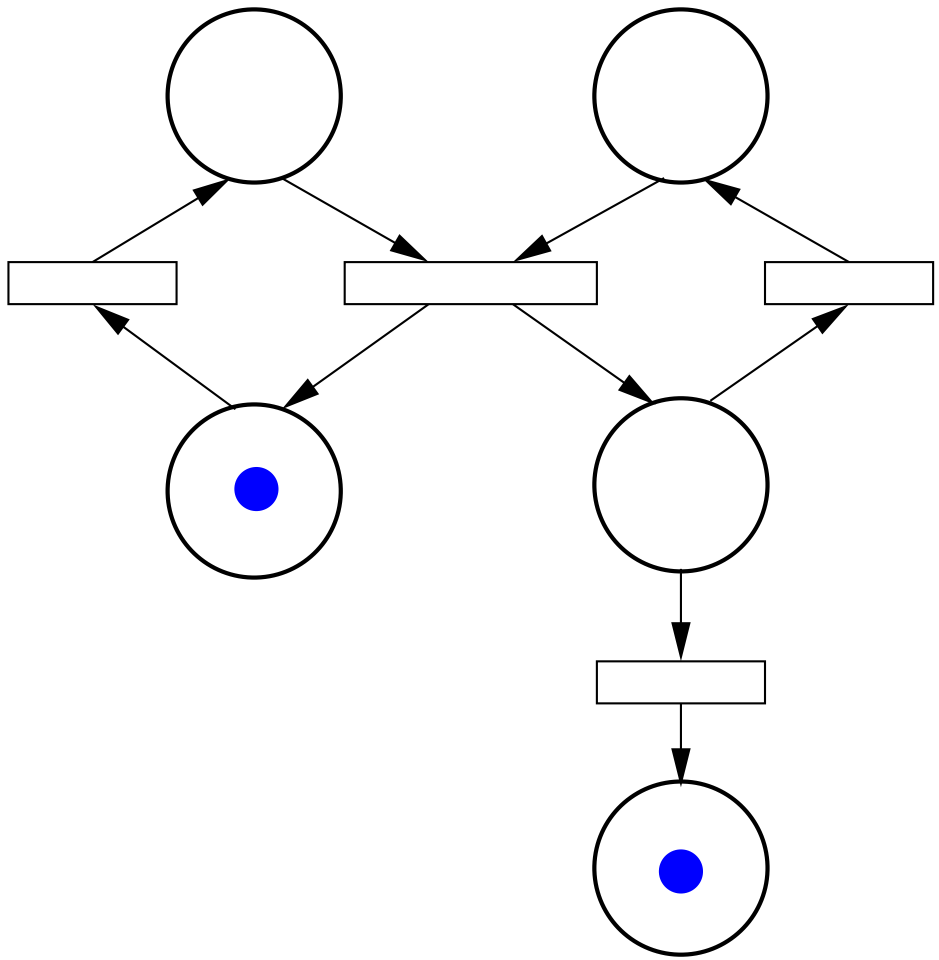
Motivation: Petrinetze



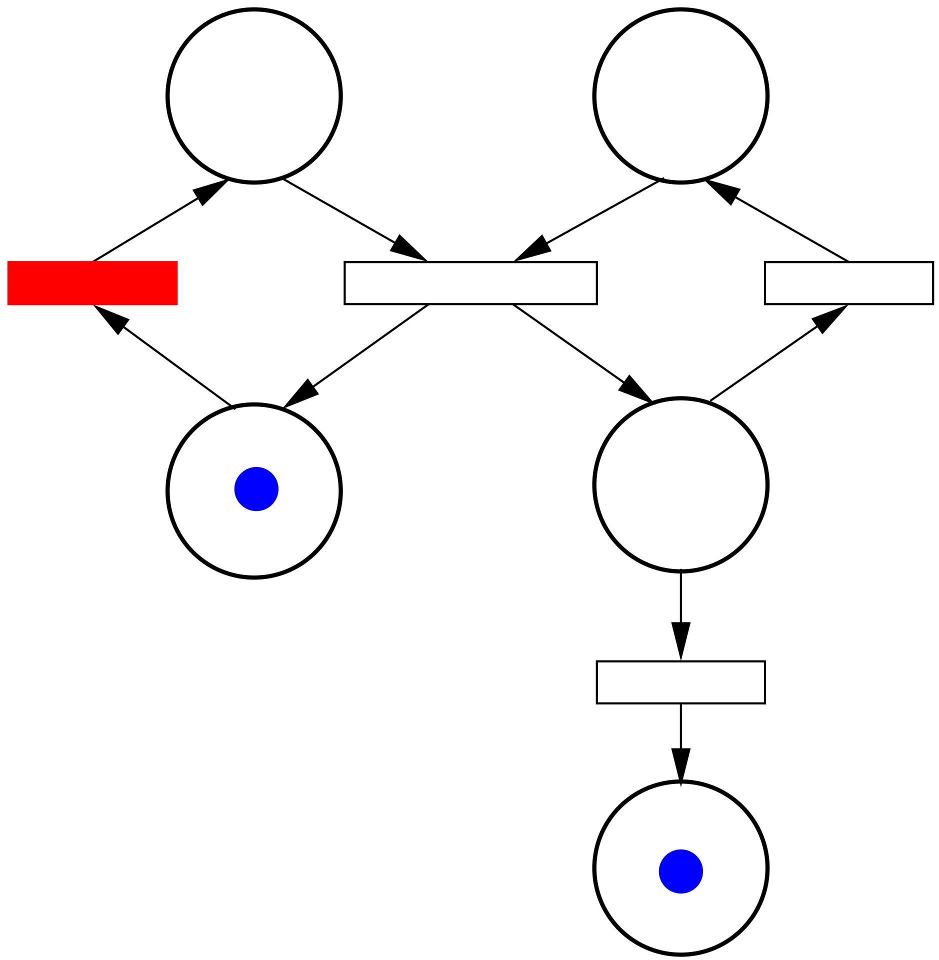
Motivation: Petrinetze



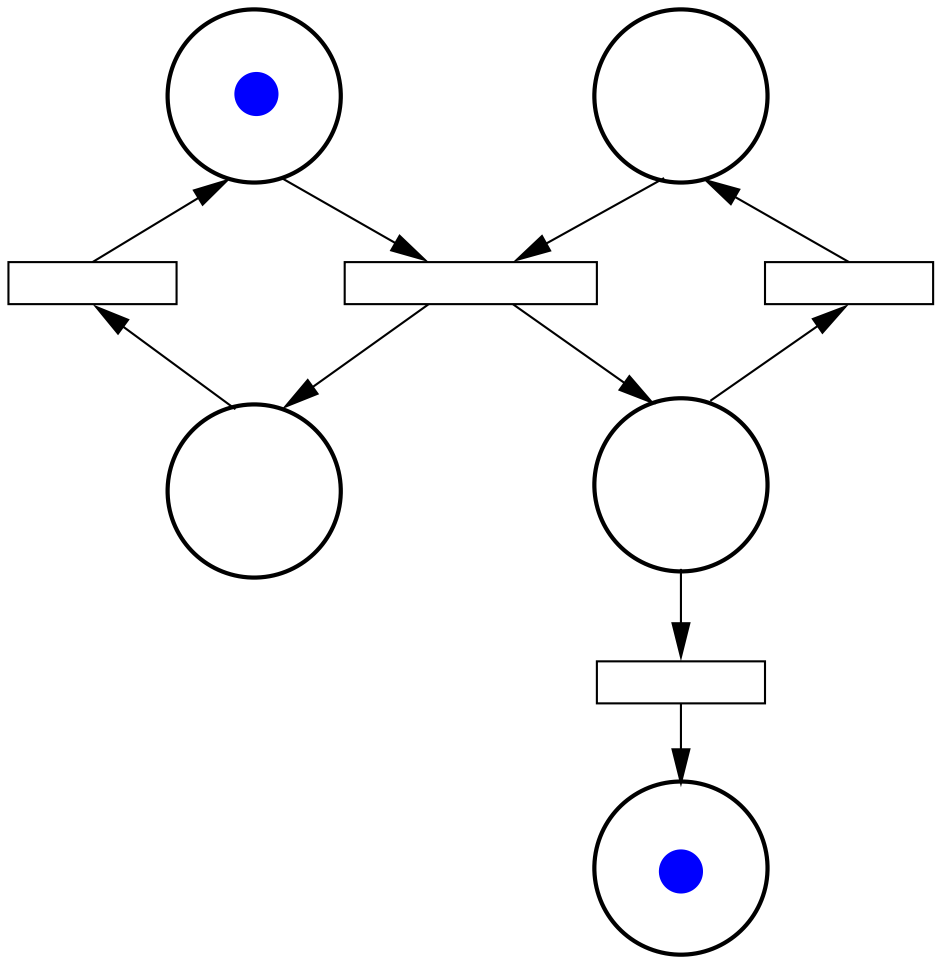
Motivation: Petrinetze



Motivation: Petrinetze



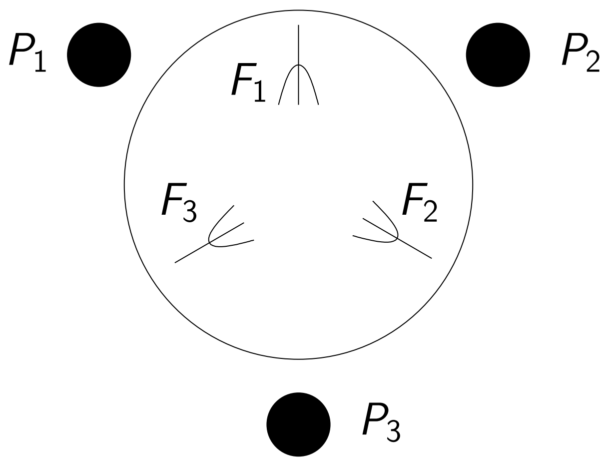
Motivation: Petrinetze



Beispiel: Dining Philosophers

Wir kommen wieder auf das Beispiel der Dining Philosophers zurück:

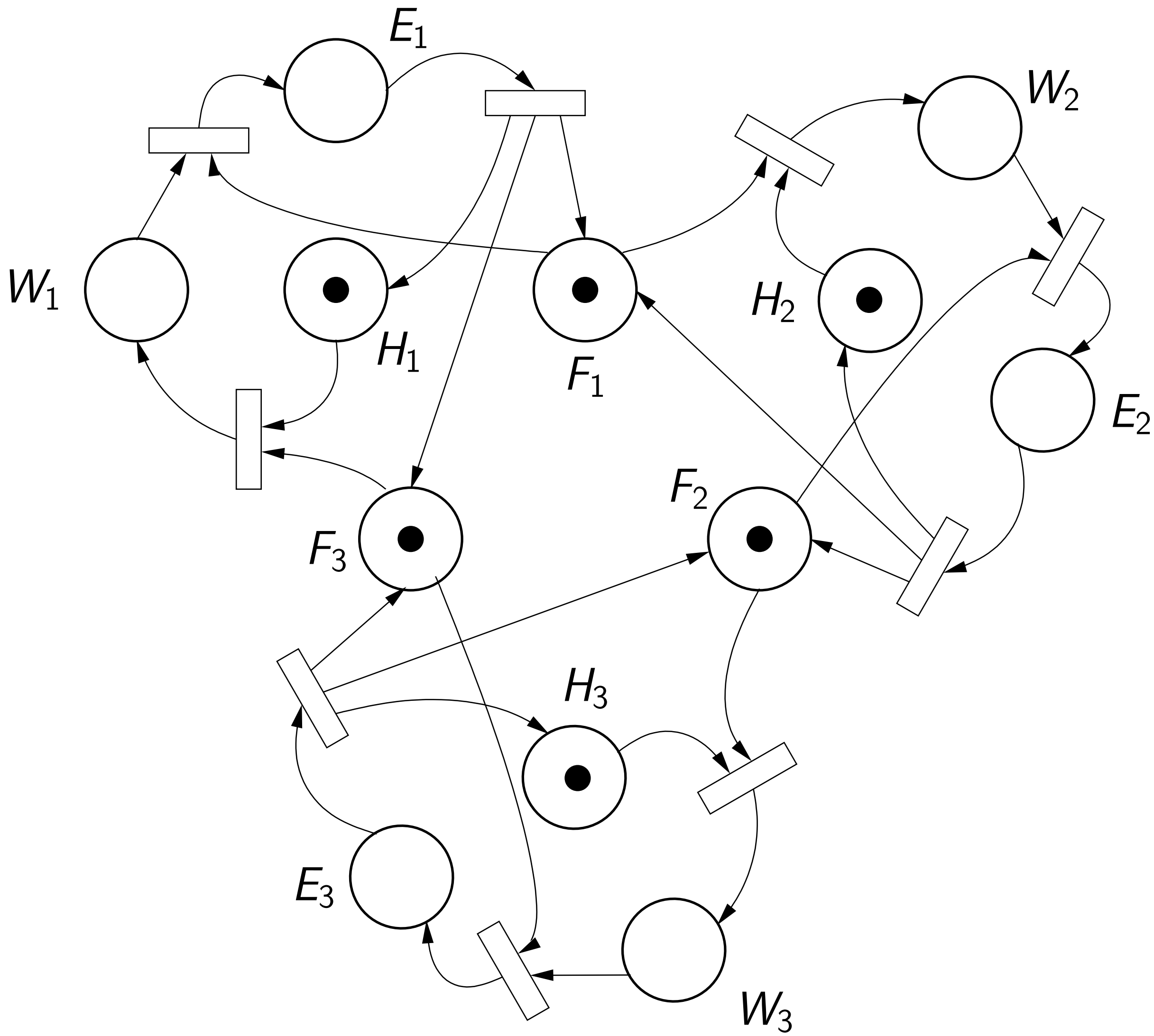
- Es sitzen drei Philosophen um einen runden Tisch, zwischen je zwei Philosophen liegt eine Gabel.
- Philosophen werden von Zeit zu Zeit hungrig und benötigen zum Essen beide benachbarte Gabeln.
- Jeder Philosoph nimmt zu einem beliebigen Zeitpunkt beide Gabeln nacheinander auf (die rechte zuerst), isst und legt anschließend beide Gabeln wieder zurück.



Beispiel: Dining Philosophers

Modellierung als Petrinetz:

In dem Netz ist ein Deadlock erreichbar, d.h., eine Markierung, bei der keine Transition mehr geschaltet werden kann.



Petrinetze: Definitionen

Petrinetz (Definition)

Ein Petrinetz ist ein Tupel $N = (S, T, {}^\bullet(), ()^\bullet, m_0)$, wobei

- S eine Menge von Stellen und
- T eine Menge von Transitionen ist.
- Außerdem gibt es für jede Transition t zwei Funktionen ${}^\bullet t \colon S \to \mathbb{N}_0$, $t^\bullet \colon S \to \mathbb{N}_0$, die angeben, wieviele Marken t aus einer Stelle entnimmt und in eine Stelle legt.
- $m_0 \colon S \to \mathbb{N}_0$ ist die Anfangsmarkierung (oder initiale Markierung).

Im allgemeinen ist eine Markierung eine Abbildung $m \colon S \to \mathbb{N}_0$, die festlegt, wieviele Marken in jeder Stelle liegen. Falls eine Reihenfolge $s_1, \dots, s_n$ der Stellen fixiert wurde, kann eine Markierung m auch durch $(m(s_1), \dots, m(s_n))$ dargestellt werden.

Petrinetze: Definitionen

Eine andere (auch oft verwendete) Definition stellt die Verbindungen zwischen Stellen und Transitionen und die dazugehörigen Gewichte folgendermaßen dar:

$$\begin{array}{rcll} F & \subseteq & (S \times T) \cup (T \times S) & \text{(Flußrelation)} \\ W : F & \to & \mathbb{N}_0 \backslash \{0\} & \text{(Zuordnung von Gewichten)} \end{array}$$

Zusammenhang zur eingeführten Notation:

$$\begin{array}{rcl} (s,t) \in F & \iff & {}^\bullet t(s) \geq 1 \\ W((s,t)) & = & {}^\bullet t(s) \\ (t,s) \in F & \iff & t^\bullet(s) \geq 1 \\ W((t,s)) & = & t^\bullet(s) \end{array}$$

Petrinetze: Definitionen

Operationen auf Markierungen:

Seien $m, m' \colon S \to \mathbb{N}_0$ zwei Abbildungen von Stellen auf natürliche Zahlen. Wir definieren:

- Ordnung: Es gilt $m \leq m'$, falls für alle $s \in S$ gilt: $m(s) \leq m'(s)$.
- Addition: Es gilt $m \oplus m' = m''$, wobei $m'' \colon S \to \mathbb{N}_0$ mit $m''(s) = m(s) + m'(s)$ für alle $s \in S$.
- Subtraktion: Es gilt $m \ominus m' = m''$, wobei $m'' \colon S \to \mathbb{N}_0$ mit $m''(s) = m(s) - m'(s)$ für alle $s \in S$. (Dabei gilt $n - k = 0$, falls $n, k \in \mathbb{N}_0$, $n < k$.)

Für eine Markierung m bezeichnen wir mit $Set(m)$ die Menge $\{s \in S \mid m(s) \geq 1\}$, d.h., die Menge der Stellen, die der Markierung zugrunde liegen.

Petrinetze: Definitionen

Schalten und Erreichbarkeit (Definition)

- Eine Transition t ist für eine Markierung m aktiviert, falls ${}^\bullet t \leq m$ gilt. (D.h., falls genug Marken vorhanden sind, um die Transition zu schalten.)
- Sei m eine Markierung und t eine Transition, die für m aktiviert ist. Dann kann t schalten, was zu der Nachfolgemarkierung $m' = m \ominus {}^\bullet t \oplus t^\bullet$ führt. Symbolisch $m[t\rangle m'$.
- Eine Markierung m heißt erreichbar in einem Netz, falls es eine Folge von Transitionen $t_1, \dots, t_n$ gibt mit $m_0[t_1\rangle m_1 \dots m_{n-1}[t_n\rangle m$, wobei m_0 die Anfangsmarkierung ist.

Petrinetze: Definitionen

Bemerkungen:

- Nach Definition dürfen mehrere Marken in einer Stelle liegen.
- Das Schalten einer Transition t entfernt so viele Marken, wie durch die Funktion ${}^\bullet t$ beschrieben wird und erzeugt so viele Marken wie es $t^\bullet$ vorgibt.
- In der graphischen Notation werden ${}^\bullet t$ bzw. $t^\bullet$ folgendermaßen dargestellt:
  - Kein Pfeil zwischen s und t, falls ${}^\bullet t(s) = 0$ (bzw. $t^\bullet(s) = 0$).
  - Ein Pfeil zwischen s und t, falls ${}^\bullet t(s) = 1$ (bzw. $t^\bullet(s) = 1$).
  - Ein Pfeil mit Beschriftung n zwischen s und t, falls ${}^\bullet t(s) = n > 1$ (bzw. $t^\bullet(s) = n > 1$).

  Der Wert ${}^\bullet t(s)$ bzw. $t^\bullet(s)$ wird auch als Gewicht bezeichnet.