AUFGABEN

I. INTEGRALRECHNUNG

1. Konsumentenrente

Für einen Monopolisten sei $x = x(p)$ die Nachfrage in Abhängigkeit vom Preis p.
p_h: Höchstpreis, p_0 : Gleichgewichtspreis (Angebot = Nachfrage)
Umsatz U bei Absenkung des Preises von p_h auf p_0 in Schritten $p_h = p_n > p_{n-1} > ... > p_0$: Einteilung E von $[p_0,p_h]$.
Für i = 1, ... n wird die Menge $x(p_{i-1}) - x(p_i)$ zum Preis p_{i-1} gekauft; Käufer, die ihren Bedarf zum Preis p_i gedeckt haben, kommen nicht mehr in Frage. Damit

$$U = x(p_n)\, p_n + (x(p_{n-1}) - x(p_n))\, p_{n-1} + ... + (x(p_0) - x(p_1))\, p_0 = \sum_{i=1}^{n} x(p_i)\,(p_i - p_{i-1}) + x(p_0)\,p_0 .$$

Also beträgt der über $x(p_0)p_0$ hinausgehende Umsatz $\sum_{i=1}^{n} x(p_i)\Delta p_i$.
Werden die Differenzen immer kleiner und kleiner, so betrachtet man

$$\lim_{\|E\|\to\infty} \sum_i x(p_i)\Delta p_i = \int_{p_0}^{p_h} x(p)\,dp = \text{Konsumentenrente.}$$

(Es ist also viel günstiger, gleich mit dem Integral zu rechnen als mit den Summen.)

<u>Beispiel</u>: Für $x(p) = a + bp$, $a > 0$, $b < 0$(!) berechne man die Konsumentenrente.

2. Grenzbetriebskosten

Seien K die Kosten. Wir betrachten die Kosten als Funktion der produzierten Menge: $K = K(x)$.
Grenzkosten: $\frac{dK}{dx}$ ($\frac{dK}{dx} \approx \frac{\Delta K}{\Delta x}$; für $\Delta x = 1$ ergeben sich die Kosten für die Produktion einer weiteren Einheit)
Kosten K(t) als Funktion der Betriebszeit t:→ Grenzkosten $k(t) := \frac{dK}{dt}$.
Für eine Maschine mögen die Grenzkosten gemäß der Gleichung $k(t) = a + b(1 - e^{-ct})$ (a, b, c > 0) zunehmen, (t in Stunden). Die Werte $k(0) = k_0$ und $k(T) = k_1$ für einen Zeitpunkt $T > 0$ seien bekannt.
Man berechne einen Mittelwert für die Grenzkosten im Intervall [0,T] und drücke diesen durch k_0, k_1 und $k_\infty = \lim_{t\to\infty} k(t)$ aus.
Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung sind daher die durchschnittlichen Grenzkosten

$$k(\bar{t}) = \frac{1}{T-0}\int_0^T k(t)\,dt = \frac{1}{T}\left(at + bt + \frac{b}{c}e^{-ct} \Big|_0^T \right) = a + b + \frac{b}{cT}e^{-cT} - \frac{b}{cT} = a + b - \frac{b}{cT}\left(1 - e^{-cT}\right)$$

$k_0 = a$, $k_1 = a + b\left(1 - e^{-cT}\right)$, $k_\infty = a + b$

$$\Rightarrow k_1 = k_\infty - be^{-cT} \Leftrightarrow e^{-cT} = \frac{k_\infty - k_1}{b} \Rightarrow cT = -\ln\frac{k_\infty - k_1}{k_\infty - k_0}$$

$b = k_\infty - k_0 \quad k_1 - k_0 = b\left(1 - e^{-cT}\right)$. Damit

$$k\left(\bar{t}\right) = k_\infty - \frac{k_1 - k_0}{cT} = k_\infty + \frac{k_0 - k_1}{\ln\left(k_\infty - k_0\right) - \ln\left(k_\infty - k_1\right)}$$

<u>Beispiel</u>: Mittelwert für die Grenzkosten für $k(t) = \alpha + \beta t$, $k_0 = k(0)$, $k(T) = k_1$?

<u>Beispiel</u>: Gegeben: Grenzkosten $k(x)$ im Hinblick auf die Menge x + Fixkosten $K_0 \rightarrow$ Gesamtkosten $K(x) = \int k(x) + K_0$. Man berechne die Gesamtkosten für $k(x) = 6x^2 - 6x + 11$, $K_0 = 5$

3. <u>Ein Modell zur Entwicklung von Erwerbsbevölkerung L(t), Kapitalstock K(t) und Output Y(t) und der Zeit t</u>.

(1) $Y(t) = K(t)^\alpha L(t)^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ (Produktionsfunktion)

(2) $\dfrac{L'(t)}{L(t)} = n$ (exogene Wachstumsrate von L(t))

(3) $I(t) = K'(t) = sY(t)$ (Investitionsfunktion, s: Sparquote)

Gegeben: $K_0 = K(0)$, $L_0 = L(0)$.

Man berechne K(t).

4.a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}\,dx = ?$

b) $\displaystyle\int_4^9 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} = ?$

5.a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = ?$

b) $\displaystyle\int \tan x\,dx = ?$

6. <u>Der Barwert des gesamten Einkommens</u> betrage für eine gewisse Berufssparte bis zum Zeitpunkt t $R(t) = \displaystyle\int_0^t \phi(\tau)e^{-r\tau}d\tau$ (r: Zinssatz >0). Man berechne den Barwert R(t) für

(a) $\phi(\tau) = a + b\tau$ und

(b) $\phi(\tau) = ce^{\lambda\tau}\left(c, \lambda > 0, \lambda \neq r\right)$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a - x)(b - x)} = ?$

8. Für den Erwartungswert (das Mittel) E(X) einer Zufallsvariablen X gilt:
$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx,$ wobei $f(x)$ die Dichtefunktion von X ist. Für Lebensdauerprozesse nimmt man $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & \text{für } x\geq 0 \; (\lambda>0)\\ & 0 \text{ sonst}\end{cases}$
Man berechne E(X) für die obige Dichtefunktion.

9. Der Gegenwartswert eines Investitionsgutes, welches bei stetiger Verzinsung mit dem Zinssatz p konstante Einnahme z erbringt ist gegeben durch
$w=\int_0^{\infty} z e^{-pt}dt. \quad w=?$

II. MEHRDIMENSIONALE ANALYSIS

10. Gesucht sind Definitionsbereich D und Wertebereich $f(D)$ für folgende Funktionen f; weiters bestimme man die Höhenlinien.
    a) $f(x,y)=\sqrt{(x+2)^2-y^2}$
    b) $f(x,y)=\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}}$
    c) $f(x,y)=\arctan\frac{y-2}{x}$

11. Gegeben: $z=f(x,y)=xy^2-10x.$ Gesucht sind die Schnittkurven mit den Ebenen $x=x_0,\ y=y_0$ und die Höhenlinien $z=z_0$.

12. Man prüfe, ob die folgenden Funktionen homogen sind:
    a) $f(x,y,z)=x+(y^2z)^{1/3}$
    b) $f(x,y)=x^2+y$
    c) $f(x,y)=a^b xy^c \; (a,y>0).$
    d) Produktionsfunktion $Y=c\left(aA^\gamma+bK^\gamma\right)^{1/\gamma} \; (a,b,c,\gamma>0)$
       A = Arbeit, K = Kapital

13. $f(x,y)=x^2\cos y+\sin(x+2y), f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}, f_{xx}, f_{yy}=?$

14. Die Nachfrage $x=a-bp_1$ nach einem Produkt A mit dem Preis p_1 hänge von den Preisen p_2, p_3 zweier anderer Produkte B,C wie folgt ab: $a=\frac{hp_2}{p_3}, b=\frac{c+dp_3}{p_2}.$ Definitionsbereich von x? Interpretation des Vorzeichens von $\frac{\partial x}{\partial p_i}, i=1,2,3$? Partielle Elastizität von x nach p_1?

15. Für die Kostenfunktion $K(v_1, v_2) = v_1 + \ln v_1 + v_2$ berechne man die Elastizität von K bezüglich v_1 und jene von $\frac{K}{v_1}$ bezüglich v_1.

16. Man zeige, dass $dz = (2x + e^y)dx + (x+1)e^y dy$ ein totales Differential ist und berechne alle zugehörigen Stammfunktionen.

17. Gesucht: Produktionsfunktion $Y = f(A, K)$ deren partielle Elastizitäten bezüglich Arbeit A und Kapital K konstant gleich φ_A bzw. φ_B sind $(\varphi_A, \varphi_B > 0)$.

18.a) Sei B = $\left\{(x,y) \middle| 0 \le x \le 1, -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$. $\iint\limits_B (x + \cos y)\,dx\,dy = ?$

b) Sei B = $\{(x,y) | 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$. $\iint\limits_B (x \cdot e^y + y \cdot e^x)\,dx\,dy = ?$

19.a) Gegeben seien $f(x,y) = x^2+y^2$, $g(x,y) = \cos(x) + \sin(y)$, $h(x,y) = 2x + y + 1$

Mit Hilfe der Kettenregel berechne man $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)$ für die Funktion $F(x,y) = f(g,h)$.

b) Zwischen dem Output z und den Inputfaktoren x,y bestehe der Zusammenhang $z^3 - x^2 - y^2 + z^2 - x - y - 1 = 0$. Gesucht ist die Grenzrate der Substitation von y durch x.

20. $Y(A,K) = c\left((1-d)A^{-r} + dK^{-r}\right)^{-\frac{1}{r}}$.

Y: Output, A: Arbeit, K: Kapital. $c,d,r > 0$. Man zeige, dass die Grenzrate $s = \frac{dA}{dK}$ der Substitution von Arbeit durch Kapital als Funktion des Faktorverhältnisses $v = \frac{A}{K}$ geschrieben werden kann und die Elastizität von s bezüglich v gleich r+1 ist. (Y wird daher als CES-Funktion bezeichnet: <u>c</u>onstant <u>e</u>lasticity of <u>s</u>ubstitution)

21. Gegeben: $f(x,y) = x^2(y-1) + xe^{y^2}$. Man bestimme eine lineare bzw. quadratische Approximation in (0,1).

22. Die Funktion $u = a_1\ln(1+x_1) + a_2\ln(1+x_2)$ $(a_1,a_2 \ge 0,\ x_1,x_2 \ge 0)$ beschreibe den Nutzen des Konsums der Gütermenge x_1,x_2.

Man zeige: Der Definitionsbereich von $u(x_1,x_2)$ ist konvex und die Funktion u darüber konkav. Was kann man daraus schließen?

23. $f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + x^2 + y^2$. Man untersuche die Funktion auf Konvexität.

24. Man bestimme die relativen Extrema der Funktion $f(x,y) = x^4 + y^4 + 4x^2y^2 - 4x^2 + 4y^2$.

25. $K(x_1,x_2) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$: Produktionskosten für die Gütermengen x_1, x_2 von A beziehungsweise B eines Monopolisten. Die Nachfragefunktionen seien $x_1 = \frac{28}{3} - \frac{1}{3}p_1$, $x_2 = 11 - \frac{1}{2}p_2$. Gesucht: Mengen x_1,x_2 für einen maximalen Gewinn.

26. Seien G_1,G_2 zwei konkurrierende Güter mit den Preisen p_1 und p_2. Absetzbare Mengen von G_1 bzw. G_2: $g(p_1,p_2) = (a_1 - b_1p_1)p_2$, $g_2(p_1,p_2) = (a_2 - b_2p_2)p_1$, ($a_1$, a_2, b_1, b_2 positive Konstanten); p_1, p_2 sind die Preise von G_1 bzw. G_2. Man bestimme ein relatives Maximum für den Gesamterlös.
Gesamterlös: $G = g_1p_1 + g_2p_2 = p_1p_2(a_1 + a_2 - b_1p_1 - b_2p_2)$.

27. Man bestimme das absolute Maximum von $f(x,y) = xy(5 - x - y)$ auf dem Definitionsbereich $D = \{(x,y) \in R^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 5\}$.

28. Man bestimme die absoluten Extrema von $f(x,y) = 3x^2 - 2x(y+1) + 3y - 1$ auf $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

29. Für die Produktion eines Gutes werden zwei Inputfaktoren (Mengen x_1 bzw. x_2) benötigt: Produktionsfunktion: $y = f(x_1,x_2) = 5 - \frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{\sqrt{x_2}}, (x_1 > 0, x_2 > 0)$. Der Gewinn der Produzenten sei gegeben durch $G(x_1,x_2,p_0) = yp_0 - x_1p_1 - x_2p_2$. Man ermittle die im Gewinnmaximum benötigten Faktormengen x_1 und x_2, die Produktmenge y und den Unternehmergewinn für $p_0 = 3, p_1 = 1, p_2 = 12$.

30. Mit Hilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren berechne man die möglichen Extrema der Funktion $f(x,y) = x - y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

31. Gegeben: Produktionsfunktion $y = f(x_1,x_2) = 2x_1^2x_2$ und Kostenfunktion $K(x_1,x_2) = 12x_1 + 6x_2 + 10$. Mögliche minimale Kosten für einen Output von y = 400 Mengeneinheiten?

32. Gegeben: Nutzfunktion $u(x,y)$ für zwei Güter sowie deren Preise p und q. Man zeige: Nimmt u unter der Budgetbeschränkung $px + qy = a$ $(a > 0,\ \text{konst})$ ein relatives Minimum an, dann gilt für die Grenznutzen u_x und u_y der Zusammenhang $u_x : u_y = p : q$.

33. Man zeige, dass die Differentialgleichung $y' = \sqrt[3]{y^2}$ eine singuläre Lösung besitzt.

34. Man bestimme die Gleichgewichtslösungen der Differentialgleichung $y' = (1-y)y$ und untersuche diese auf Stabilität .

35. Auswirkungen von Defiziten im Staatshaushalt auf die Staatsverschuldung: Seien $Y(t)$ das Volkseinkommen zum Zeitpunkt t und $D(t)$ die gesamte Staatsverschuldung bis zum Zeitpunkt t: Annahmen: $\frac{dD}{dt} = \alpha Y(t);\ Y(0) = Y_0,\ D(0) = D_0$ seien bekannt.
Gesucht: Entwicklung von $\frac{D(t)}{Y(t)}$, falls $Y(t)$ a) konstant bleibt, b) linear wächst, c) in einem konstanten Verhältnis wächst, d.h. $\frac{dY}{dt} = rY$.

36. Gesucht ist der Zusammenhang zwischen dem Absatz x und Werbeaufwand w, falls
$\frac{dx}{dw} = a(b-x) \quad (x < b, a, b > 0);\ x(0)$ sei x_0.

37. Man löse die Differentialgleichung $y' - 2y = e^x$

38. Ebenso $xy' - y = x^2 + 2x - 3$

39. Für die Herstellungskosten $K(x)$ eines Gutes als Funktion der produzierten Menge x gelte:
$\frac{dK}{dx} + aK = b + cx\ (a, b, c > 0);\ K(0) = 0.$
Man bestimme die Funktion K(x).

40. Zwei Unternehmen beliefern denselben Markt: Die Marktanteile seien $x(t)$ bzw. $y(t)$, der Werbeaufwand w_1 bzw. w_2 (Konstante). Es gelte
$\frac{dx}{dt} = \frac{k_1w_1y - k_2w_2x}{w_1 + w_2} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{k_2w_2x - k_1w_1y}{w_1 + w_2}\ (k_1, k_2 > 0).$
Es seien $x(0) = x_0,\ y(0) = y_0,\ x_0 + y_0 = 1$.
Man bestimme $x(t)$ und $y(t)$.

41. Seien $K(t)$ die Kapitalausstattung einer Wirtschaft und $I(t) = K'(t)$ die Investitionen zur Zeit t. Ferner gelte $I'(t) = -b(K(t) - K^*)$ mit $b > 0, I(0) = I_0, K(0) = K_0; K^*$ ist ein bestimmter Gleichgewichtswert des Kapitals. $K(t) = ?$

42. Gesucht ist die allgemeine Lösung von $y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x^2}$.

43. Ebenso für $y'' + 3y' + 2y = 2x$

44. $x_{k+1} = \frac{5}{2}x_k - \frac{x_k^2}{100}$ Gleichgewichte? Stabilität?

45. N_t: Anzahl der Individuen einer Population in den t-ten Generation. Es gelte

$N_{t+1} = e^{r\left(1-\frac{N_t}{K}\right)} N_t,\ t = 0,1,2,...$

($r > 0$ Zuwachsrate, $K > 0$: Umweltkapazität)

Gleichgewichtszustände? Stabilität?

46. $x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n}\ (n \geq 0),\ x_0 = -2.$

Gleichgewicht? Stabilität?

47. Man löse die Differenzengleichung $\Delta x_k - x_k = 3,\ k = 1,2,3,...;\ x_1 = 0$.

48. Gesucht ist die allgemeine Lösung von $x_{k+1} = -x_k - (k+1)$.

49. $a_1 ..., a_k$ seien paarweise verschieden und sind der Größe nach zu ordnen. Wie groß ist die durchschnittliche Anzahl von notwendigen Vergleichen bei Quicksort von Sedgewick?

50. Man löse die Differenzengleichung $4x_{n+2} + 12x_{n+1} - 7x_n = 18,\ n = 0,1,2,...;\ x_0 = 3,\ x_1 = 6$.

51. Multiplikator-Akzeleratormodell von Samuelson

Y_t: Volkseinkommen in Periode t

C_t: Ausgabe für Konsumgüter

I_t: Investitionen

G_t: Regierungsausgaben

Es gelte: $Y_t = C_t + I_t + G_t$ unter folgenden Annahmen:

(1) $C_t = \alpha\, Y_{t-1};\ \alpha > 0$ (marginale Konsumneigung)

(2) $I_t = \beta\left(C_t - C_{t-1}\right),\ \beta > 0$ (Akzeleratorprinzip)

(3) $G_t =$ konstant; ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $G_t = 1$.

Man bestimme Y_t für $\alpha = 0,5;\ \beta = 1,\ Y_0 = 2,\ Y_1 = 3$.

52. $\Delta^2 x_k + \Delta x_k - 2x_k = k^2$. Allgemeine Lösung?